

Дифференциальная эволюция в задачах поиска оптимальных параметров популяционно-миграционных моделей

О. В. Дружинина¹, О. Н. Масина², И. И. Васильева²

¹ ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22

² ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина», г. Елец, Российская Федерация

Адрес: 399770, Российская Федерация, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28-1

* olga121@inbox.ru

Аннотация

Применение компьютерных методов, методов интеллектуального анализа и методов оптимизации для исследования популяционных динамических моделей с миграционными потоками является актуальным направлением. Использование указанных методов позволяет моделировать сложные процессы и системы, исследование которых аналитическими методами является затруднительным. В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с применением метода дифференциальной эволюции в задачах моделирования популяционно-миграционных динамических систем. Изучена популяционная модель «два конкурента – один ареал миграции» и ее модификации. Проведено моделирование процессов взаимодействия видов в условиях конкуренции и миграционных потоков. Выполнены серии компьютерных экспериментов, изучена траекторная динамика, построены проекции фазовых портретов, выявлены качественные эффекты и дан сравнительный анализ полученных результатов для таких модификаций модели «два конкурента – один ареал миграции», которые связаны с вариативностью коэффициентов естественного воспроизводства видов, внутривидовой и межвидовой конкуренции, скоростями миграции. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач глобальной параметрической оптимизации, компьютерного моделирования многомерных экологических систем, а также задач прогнозирования поведения в системах химической кинетики, при описании демографических процессов.

Ключевые слова: методы оптимизации, дифференциальная эволюция, динамическая популяционная модель, конкуренция, миграция, траекторная динамика, интеллектуальные технологии

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Дружинина О. В., Масина О. Н., Васильева И. И. Дифференциальная эволюция в задачах поиска оптимальных параметров популяционно-миграционных моделей // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2024. Т. 20, № 1. С. 58-69. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202401.58-69>

© Дружинина О. В., Масина О. Н., Васильева И. И., 2024



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Differential Evolution in Problems Optimal Parameters Search for Population-Migration Models

O. V. Druzhinina^a, O. N. Masina^{b*}, I. I. Vasilyeva^b

^a Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Address: 44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation

^b Bunin Yelets State University, Yelets, Russian Federation

Address: 28-1 Kommunarov St., Yelets 399770, Lipetsk region, Russian Federation

* olga121@inbox.ru

Abstract

The use of computer methods, methods of intellectual analysis and optimization methods for the study of population dynamic models with migration flows is an urgent direction. The use of these methods makes it possible to model complex processes and systems, the study of which by analytical methods is difficult. In this paper, the issues related to the application of the differential evolution method in the problems of modeling population-migration dynamic systems are considered. The population model “two competitors – one migration area” and its modifications are studied. The modeling of the processes of interaction of species in conditions of competition and migration flows is carried out. A series of computer experiments are performed, trajectory dynamics is studied, projections of phase portraits are constructed, qualitative effects are identified and a comparative analysis of the obtained results for such modifications of the “two competitors – one migration area” model, which are associated with variability in the coefficients of natural reproduction of species, intraspecific and interspecific competition, and migration rates. The obtained results can be used in solving problems of global parametric optimization, computer modeling of multidimensional ecological systems, as well as problems of predicting behavior in chemical kinetics systems, and in describing demographic processes.

Keywords: optimization methods, differential evolution, dynamic population model, competition, migration, trajectory dynamics, intelligent technologies

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Druzhinina O.V., Masina O.N., Vasilyeva I.I. Differential Evolution in Problems Optimal Parameters Search for Population-Migration Models. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2024;20(1):58-69. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202401.58-69>

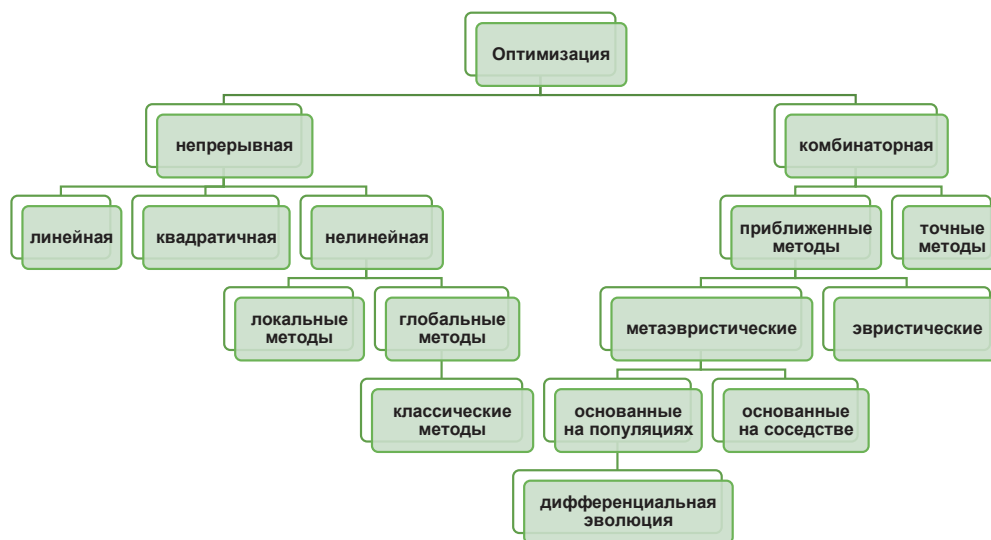


Введение

Построение и исследование многомерных популяционных моделей направлено на решение задач прогнозирования поведения видов в различных условиях и на получение условий сохранения биологических ресурсов. Анализ и синтез математических моделей популяционной динамики являются стандартными процедурами, позволяющими выявить характер взаимодействий между видами, оценить влияние параметров модели на траекторную динамику и на устойчивость системы¹. Например, наличие конкуренции в модели может приводить к тому, что один вид вытесняет другой, или оба вида сосуществуют, но их численность остается на низком уровне. Наличие миграционных потоков может способствовать увеличению численности популяций или их распространению на новые территории [1, 2]. Таким образом, учет различных видов взаимодействия в моделях популяционной динамики позволяет получить более точные результаты и прогнозы, а также разработать эффективные стратегии управления биологическими ресурсами. В [3] рассмотрена популяционно-миграционная модель Лотки-Вольтерры с конкуренцией видов, описываемая системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналитическое исследование проведено при константных значениях коэффициентов естественного роста и внутривидовой конкуренции. Выявлено, как линейная и нелинейная миграция приводит от вымирания одного вида к сохранению или гло-

бальной асимптотической устойчивости всех видов. Различные модификации предложенной в [3] модели при неравномерной миграции с учетом управляющих воздействий изучены в работах². При увеличении числа модельных параметров установление характера устойчивости аналитическими методами затруднительно, поэтому возникает задача поиска такого набора параметров, при котором возможно сосуществование видов в общем ареале обитания и существование особей, имеющих возможность мигрировать в убежища [4-7].

Поиск параметров может осуществляться с помощью методов численной оптимизации, в том числе методов, инспирированных природой³. Одним из наиболее популярных методов оптимизации является метод дифференциальной эволюции [8-10]. Указанный метод обладает рядом таких свойств, как простота реализации, эффективность и способность работать с многомерными функциями. Дифференциальная эволюция базируется на алгоритме генетического отжига, разработанного К. Прайсом. Впоследствии дополнен Р. Сторном. Следует отметить, что дифференциальная эволюция применима только к вещественным входным данным и не требует использования градиента оптимизируемой функции. Преимущество этого метода заключается в способности адаптироваться к зашумленным или неопределенным целевым функциям и эффективно находить оптимальные или близкие к оптимальным решения. Дифференциальная эволюция относится к метаэвристическим методам, основанным на популяциях, что представлено на рис. 1.



Р и с. 1. Место дифференциальной эволюции среди методов оптимизации

F i g. 1. The Place of Differential Evolution Among Optimization Methods

Источник: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены авторами.

Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the authors.

¹ Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск : АНО «ИИКИ», 2003. 368 с. EDN: RTXUUZ; Пых Ю. А. Обобщенные системы Лотки-Вольтерра: теория и приложения : монография. СПб : СПбГИПСР, 2017. 229 с.

² Дружинина О. В., Масина О. Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М. : ВЦ РАН, 2009. 180 с. EDN: QMUKIX

³ Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой : Учебное пособие. 3-е изд. исправ. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. 448 с. EDN: NCAEFY



На основе дифференциальной эволюции исследователи разрабатывают собственные модификации алгоритмов оптимизации. В [11] разработан самонастраивающийся алгоритм дифференциальной эволюции для решения проблемы настройки параметров. Его основная идея заключается в периодической переоценке выбора типа алгоритма и связанных с ним параметров, отдавая предпочтение тем конфигурациям, которые продемонстрировали высокую производительность. Самонастраивающиеся алгоритмы могут переключаться между совершенно разными методами оптимизации, каждый со своим набором параметров и стратегий. В [12] предлагается новый гибридный эволюционный подход, основанный на дифференциальной эволюции и субградиентном алгоритме в качестве процедуры локального поиска. Предложенный алгоритм позволяет получить улучшение среднего наилучшего значения достигнутого глобального минимума по сравнению с дифференциальной эволюцией для недифференцируемой тестовой функции, которая характеризуется высокой размерностью и большим количеством локальных экстремумов.

Классическая дифференциальная эволюция и ее модификации внедрены в соответствующие библиотеки языков программирования Python, R, Julia, а также системы компьютерной математики MATLAB, Mathematica. В [13] реализация пакета DEoptim использует набор алгоритмов, доступных для глобальной оптимизации, на языке R и в среде статистических вычислений. Функция DEoptim пакета DEoptim выполняет поиск минимумов целевой функции между нижней и верхней границами для каждого оптимизируемого параметра. В Python применяется несколько библиотек, поддерживающих метод дифференциальной эволюции. Например, в модуль SciPy.optimize встроена функция differential_evolution [14]. В языке программирования Julia используется пакет глобальной оптимизации BlackBoxOptim [15]. Указанный пакет поддерживает многокритериальные задачи оптимизации и ориентирован на эвристические и метаэвристические стохастические алгоритмы (например, метод дифференциальной эволюции), которые не требуют, чтобы оптимизируемая функция была дифференцируемой. Пакет также поддерживает параллельные вычисления для ускорения оптимизации функций.

В ряде работ для построения популяционных моделей и поиска оптимальных параметров рассмотрены специализированные библиотеки языков программирования Julia и Python. В

[16] построена четырехмерная модель динамики популяций с учетом миграционных потоков вида «два конкурента – два ареала миграции». Оптимизационная задача поиска параметров модели, обеспечивающих сосуществование популяций в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов, решена методом дифференциальной эволюции на языке Julia с применением пакета BlackBoxOptim.jl. В [17] предложено формализованное описание четырехмерной детерминированной и соответствующей стохастической модели «два конкурента – два ареала миграции» и ее модификаций. В [18, 19] найдены приближенные значения модельных параметров в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов для модели типа «три конкурента – три ареала миграции». В [16-19] поиск оптимальных параметров осуществлен с помощью функции differential_evolution из библиотеки scipy.optimize языка Python. С учетом полученных наборов параметров найдены положительные состояния равновесия, обеспечивающие сосуществование видов в основном ареале обитания и положительную динамику видов в убежищах. Выполнена серия компьютерных экспериментов, построены проекции фазовых портретов, выявлены качественные эффекты и дан сравнительный анализ полученных результатов. Однако для трехмерных моделей, изученных в [3-5], и их обобщений, не проводилось исследование с учетом поиска параметров методами оптимизации.

В настоящей работе представлены результаты исследований различных модификаций популяционной динамической модели «два конкурента – один ареал миграции», в которых учитывается межвидовая конкуренция и двунаправленная неравномерная миграция первой популяции в убежище. Посредством дифференциальной эволюции найден набор параметров, удовлетворяющих заданным условиям сосуществования двух видов в основном ареале и существование мигрирующего в убежище вида.

1. Дифференциальная эволюция как метод прикладной оптимизации

Дифференциальная эволюция представляет собой простой алгоритм оптимизации действительных параметров. Этот алгоритм базируется на циклическом выполнении этапов, представленных на рис. 2 [20].



Р и с. 2. Схема метода дифференциальной эволюции
F i g. 2. Scheme of the method of differential evolution



Дифференциальная эволюция выполняет поиск глобальной точки оптимума в n -мерном пространстве действительных параметров пространства R^n , при этом поиск принято разделять на шесть этапов, представленных на рис. 2. Указанные этапы состоят в следующем.

Этап 1. На начальном этапе осуществляется инициализация случайной совокупности N_p n -мерных действительных векторов. Каждый вектор формирует возможное решение задачи многомерной оптимизации. Обозначим последующие поколения через $G = 0, 1, \dots, G_{\max}$. Поскольку векторы параметров будут изменяться с каждым новым поколением, примем следующую запись для представления i -го вектора популяции в текущем поколении: $\bar{X}_{i,G} = [x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, \dots, x_{n,i,G}]$.

Для каждого параметра задачи может существовать определенный диапазон, в пределах которого значение параметра должно быть ограничено (например, если одним из параметров является коэффициент воспроизводства видов в популяционно-миграционной динамической модели, то он не должен быть отрицательным). Исходная популяция (при $G = 0$) должна максимально охватывать этот диапазон путем равномерной рандомизации индивидов в пределах пространства поиска, ограниченного предписанными минимальными и максимальными границами: $\bar{X}_{\min} = \{x_{1,\min}, x_{2,\min}, \dots, x_{n,\min}\}$ и $\bar{X}_{\max} = \{x_{1,\max}, x_{2,\max}, \dots, x_{n,\max}\}$. Следовательно, необходимо инициализировать j -ю компоненту i -го вектора как $x_{j,i,0} = x_{j,\min} + \text{rand}_{i,j}[0,1] \cdot (x_{j,\max} - x_{j,\min})$, где $\text{rand}_{i,j}[0,1]$ – такое равномерно распределенное случайное число между 0 и 1 ($0 \leq \text{rand}_{i,j}[0,1] \leq 1$), которое создается независимо для каждого компонента i -го вектора.

Этап 2. На этапе генерации возмущения вычисляется разность между двумя случайными векторами из совокупности векторов, полученной на первом этапе. В дальнейшем эта разность будет использоваться на этапе мутации (этап 3).

Этап 3. На этапе мутации выбирается новый случайный вектор, который вместе со взвешенным вектором разности дает пробный вектор. В контексте эволюционных вычислений мутация рассматривается как разность случайных элементов. Родительский вектор из текущего поколения называется целевым вектором. Мутантный вектор, полученный в результате операции дифференциальной мутации, называется донорским вектором. Потомство, образованное путем рекомбинации донора с целевым вектором, называется пробным вектором.

При построении донорского вектора для каждого i -го целевого вектора из текущей совокупности отбираются три других различных вектора $\bar{X}_{r_1}^i, \bar{X}_{r_2}^i, \bar{X}_{r_3}^i$ случайным образом. Индексы r_1^i, r_2^i, r_3^i являются взаимоисключающими случайным образом выбранными из диапазона $[1, N_p]$ целыми числами, которые отличаются от индекса базового вектора i . Индексы r_1^i, r_2^i, r_3^i генерируются случайным образом один раз для каждого мутантного вектора. В этом случае разность любых двух из этих трех векторов масштабируется с учетом умножения на число $F \in (0, k), k \geq 1$. Масштабный коэффициент F является положительным действительным числом, которое контролирует скорость эволюции популяции. Хотя верхнего предела для F не существует, эффективные значения редко превышают 1. Затем масштабированная разность добавляется к $\bar{X}_{r_1,G}$, откуда получен донорский вектор $\bar{V}_{i,G}$. В соответствии с этапом 3 формула для нахождения донорского вектора имеет вид:

$$\bar{V}_{i,G} = \bar{X}_{r_1,G} + F \cdot (\bar{X}_{r_2,G} - \bar{X}_{r_3,G}).$$

Этап 4. На этом этапе исходный вектор скрещивается с вектором мутации для генерации целевого вектора из пробных векторов. Дифференциальная эволюция скрещивает каждый вектор с мутантным вектором:

$$\bar{U}_{i,G} = \begin{cases} \bar{V}_{i,G} & \text{при } \text{rand}_j(0,1) \leq C_r \text{ или } j = j_{\text{rand}}, \\ \bar{X}_{i,G} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вероятность скрещивания $C_r \in [0,1]$ определяется пользователем и управляется значениями, которые копируются из мутантного вектора. Этап равномерного скрещивания сравнивает C_r с выходными данными генератора равномерных случайных чисел $\text{rand}_{i,j}[0,1]$. Пробный вектор выбирается со случайным индексом j_{rand} . Если случайное число меньше или равно C_r , то пробный вектор наследуется от донорского вектора $\bar{V}_{i,G}$, в противном случае значение пробного вектора копируется из вектора $\bar{X}_{i,G}$.

Этап 5. На этом этапе вектор с меньшим значением целевой функции помечается как вектор с индексом 0 следующей совокупности. Чтобы сохранить численность популяции постоянной в течение последующих поколений, необходимо провести отбор вектора. Если выполнено условие «Пробный вектор $\bar{U}_{i,G}$ имеет значение целевой функции, равное или меньшее, чем целевая функция вектора $\bar{X}_{i,G}$ », то вектор $\bar{U}_{i,G}$ заменяет вектор $\bar{X}_{i,G}$ в следующем поколении. Если условие не выполнено, то целевой вектор сохраняет свое место в популяции по крайней мере еще на одно поколение.

Этап 6. На данном этапе новый вектор популяции мутирует с помощью случайно сгенерированного возмущения. После создания новой популяции процессы мутации, рекомбинации и отбора (этапы 3–5) повторяются до тех пор, пока не будет найден оптимум или не будет выполнен заранее определенный критерий останова. Примером реализации критерия останова является достижение заданного максимума G_{\max} количества поколений.

Если в результате работы алгоритма не достигнут оптимум, то происходит возврат на инициализацию новой совокупности векторов, т.е. осуществляется циклический переход от шестого этапа создания нового вектора к первому этапу генерации новой совокупности векторов.

Пример реализации алгоритма дифференциальной эволюции на псевдокоде представлен на листинге 1, в котором учитываются этапы 1–6 этого алгоритма.

```

нц пока (критерий сходимости еще не выполнен)
  xi определить вектор текущей векторной совокупности
  ui определить вектор новой векторной совокупности
  нц для i от 0 до Np
    r1 = random(NP); //выберите случайный индекс из 1,
    2, ..., Np
    r2 = random(Np); //выберите случайный индекс из 1, 2,
    ..., Np
    r3 = random(Np); //выберите случайный индекс из 1, 2,
    ..., Np
    ui = xi + F*(x_{r1} - x_{r2});
    если (f(ui) <= f(xi))
      yi = ui;
    иначе
      yi = xi;
  кц пока

```

Л и с т и н г 1. Пример реализации алгоритма дифференциальной эволюции
L i s t i n g 1. An example of the implementation of the differential evolution algorithm



Методология дифференциальной эволюции адаптирована к широкому спектру алгоритмов оптимизации [16-19], в то же время в отдельных задачах требуется дополнительный анализ производительности и адаптация к изучаемым математическим моделям. В популяционно-миграционных моделях при реализации алгоритма дифференциальной эволюции необходимо учитывать:

- диапазоны параметров модели;
- неотрицательность фазовых переменных;
- расположение траекторий решений в неотрицательном ортанте фазового пространства;
- возможность исследования многомерных моделей;
- экологический смысл оптимизационных критериев.

Отметим, что различные модификации дифференциальной эволюции могут использоваться при решении прикладных задач. Например, в [21] представлен алгоритм, который оптимизирует искусственные нейронные сети с использованием дифференциальной эволюции. Данный метод имеет отличия от классической дифференциальной эволюции при построении этапов мутации и скрещивания. Авторами создана новая самоадаптивная версия дифференциальной эволюции под названием MAD-ShaDE с уменьшенным количеством параметров. Алгоритм использует прямое кодирование с взаимно однозначным отображением между весами нейронных сетей и значениями индивидов в популяции.

В настоящей работе мы используем модифицированную стратегию best1bin дифференциальной эволюции с учетом коэффициента биномиального распределения⁴ [22-25]. Указанная стратегия обеспечивает наилучшее решение, найденное в родительской популяции, а также более быстрое приближение к оптимальному решению. В случае популяционно-миграционных динамических моделей высокой размерности целесообразно управлять такими параметрами, как погрешность вычислений, оптимальный выбор масштабного коэффициента F и вероятности распределения пробного вектора C_r .

2. Описание модели «два конкурента – один ареал миграции»

В [4] предложена общая нелинейная многомерная миграционно-популяционная модель, в которой k видов мигрирует в $2k$ ареалов в условиях наличия k конкурентов размерности $n = 3k$, причем $n \geq 3$. Указанная модель имеет достаточно сложную структуру, и в настоящее время изучены отдельные частные случаи этой многомерной модели. Далее приведем описание миграционно-популяционной модели в случае $n=3, k=1$, которая задается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - p_{11} x_1^2 - p_{13} x_1 x_3 + \beta_2 F_2(x_1, t) \cdot x_2 - \gamma_1 F_1(x_1, t) \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - p_{22} x_2^2 + \gamma_2 F_2(x_2, t) \cdot x_1 - \beta_1 F_1(x_2, t) \cdot x_2, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 - p_{33} x_3^2 - p_{31} x_1 x_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_1 и x_3 – плотности популяций конкурирующих видов в первом ареале, x_2 – плотность популяции в убежище,

где, p_{ij} ($i \neq j$) – коэффициенты межвидовой конкуренции, p_{ii} ($i = 1, 2, 3$) – коэффициенты внутривидовой конкуренции, a_i ($i = 1, 2, 3$) – коэффициенты естественного прироста, $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ – коэффициенты миграции вида между первым и вторым ареалами, при этом второй ареал является убежищем, функции $F_i(x_p, t)$ непрерывны и определены в неотрицательном ортанте фазового пространства. На фазовые переменные и параметры накладываются ограничения вида $x_i \geq 0, a_i > 0, p_{ii} > 0, i = 1, 2, 3, p_{13} > 0, p_{31} > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$. Модель (1) имеет достаточно сложную структуру для исследования, поэтому выполним переход к упрощенным модификациям этой модели. Сравнительный анализ поведения модифицированных моделей позволит выявить качественные эффекты, связанные с влиянием различных параметров (например, коэффициентов миграции).

Положим в модели (1) $F_1(x_1, t) = 1, F_2(x_1, t) = 1, F_1(x_2, t) = 1, F_2(x_2, t) = 1$ для всех значений x, t . В этом случае система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - p_{11} x_1^2 - p_{13} x_1 x_3 + \beta_2 x_2 - \gamma_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - p_{22} x_2^2 + \gamma_2 x_1 - \beta_1 x_2, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 - p_{33} x_3^2 - p_{31} x_1 x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

Частным случаем модели (2) при $\beta_1 = \beta_2 = \beta, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ является модель вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - p_{11} x_1^2 - p_{13} x_1 x_3 + \beta x_2 - \gamma x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - p_{22} x_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 - p_{33} x_3^2 - p_{31} x_1 x_3, \end{aligned} \quad (3)$$

Модели (2), (3) являются упрощениями модели (1) и соответствуют разным случаям миграционных взаимодействий. В частности, в модели (2) коэффициенты миграции различны, а в модели (3) коэффициенты миграции попарно равны. Коэффициенты миграции могут использоваться для оценки изменения численности популяций. Вариативность коэффициентов миграции может использоваться при управлении популяциями, например, в ситуациях, когда необходимо регулирование численности хищников или контроль над инвазивными видами. Коэффициенты миграции могут учитываться при анализе генетической структуры популяций. Большие значения коэффициентов миграции могут способствовать обоснованию генетического разнообразия популяции, а низкие значения – обоснованию инбридинга или потери генетического разнообразия.

3. Поиск оптимальных параметров модели

Для системы (2) рассмотрим оптимизационную задачу поиска такого набора модельных параметров, при котором обеспечивается сосуществование видов в основном ареале и существование вида в ареале миграции. Необходимо получить оптимальные значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, a_4, p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{13}, p_{31}, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$.

⁴ Qiang J., Mitchell C. A Unified Differential Evolution Algorithm for Global Optimization [Электронный ресурс] // California Digital Library, University of California, 2014. P. 1-8. URL: <https://escholarship.org/uc/item/41b84414> (дата обращения: 21.01.2024).



Если обозначить через A параметрическое множество системы (2), то можно записать $(a_1, a_2, a_3, a_4, p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{13}, p_{31}, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in A$. В модели (2) для учета требования сосуществования двух популяций в ареале с межвидовой конкуренцией и существования популяции в убежище мы будем использовать условие оптимальности вида

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1(t)x_2(t)x_3(t)dt \rightarrow \max,$$

где t_0 – предполагаемое время выхода системы (2) на стационарный режим. В случае вымирания одного из двух видов в основном ареале или мигрирующей части популяции подынтегральное выражение обращается в нуль. Для решения оптимизационной задачи (2), (4) используется модифицированный алгоритм дифференциальной эволюции. Для удобства вычислительных процедур запишем условие (4) в виде

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} x_1(t)x_2(t)x_3(t)dt\right)^{-1} \rightarrow \min$$

Вариант программной реализации целевой функции, обозначаемой в коде через `fit_evo(w)` и соответствующей условию (5), представлен на рис. 2. Функция `eval_eco_4d(w)`, фигурирующая на рис. 3, предоставляет массив результатов численного решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

```

bounds = list([(0.1,11) for i in range(10)])
x0 = list([0 for i in range(10)])

res = differential_evolution(fit_evo, bounds, strategy='best1bin',
                             maxiter=250, popsize=1, tol=0.01,
                             mutation=(0.5, 1), recombination=0.5,
                             seed=None, callback=None, disp=True,
                             polish=True, init='latinhypercube',
                             atol=0, updating='immediate', workers=1,
                             constraints=(), integrality=None,
                             vectorized=False)
print(res)
print(res.x)

```

Р и с. 4. Фрагмент кода реализации метода дифференциальной эволюции для модели (2)

F i g. 4. A code fragment for implementing the differential evolution method for model (2)

Представленные на рис. 3, 4 фрагменты компьютерных программ охватывают этапы 1-6 метода дифференциальной эволюции (рис. 1). Приведем описание основных параметров функции `differential_evolution`.

1. *Целевая функция*, с помощью которой задан критерий оптимальности. В рассматриваемом случае необходимо численно решить систему дифференциальных уравнений. Задача сводится к минимизации функции `fit_evo`, обратной к интегралу от произведения плотностей популяций.
2. *Значения параметров*, которые содержатся в замкнутом интервале $[0.1, 11]$. Данный диапазон подбирается для рассматриваемой модели эмпирическим путем на этапе 1 алгоритма дифференциальной эволюции.
3. *Стратегия*. По умолчанию в методе используется алгоритм `best1bin` одной из модификаций дифференциальной эволюции, обеспечивающий более быструю и точную сходимость к минимальному значению по сравнению с рассмотренными

```

def fit_evo(w):
    plane,time=eval_eco_4d(w)
    p = np.array(plane)

    p1 = p[:,0]; p2 = p[:,1]; p3 = p[:,2]
    px = p1*p2*p3

    error = np.trapz(px[-50:])
    if error <= 0: return 1000
    else: return error**(-1)

```

Р и с. 3. Вариант реализации целевой функции с учетом критерия качества
F i g. 3. A variant of implementing the objective function considering the quality criterion

Для того, чтобы обеспечить устойчивую работу алгоритма реализации целевой функции, отрицательные и нулевые результаты отсеиваются путем присваивания фиксированного значения 1000. Оптимизация проводится с помощью модифицированного метода дифференциальной эволюции, реализованного в библиотеке `scipy` языка программирования Python, при этом используется функция `differential_evolution(parameters)` в составе подбиблиотеки `scipy.optimize`.

С помощью созданной в среде Jupyter Notebook программы проведен вычислительный эксперимент по подбору параметров модели (2) с учетом заданных начальных условий $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.5, 0.5, 1)$. Значения параметров выбираются из замкнутого интервала $[0.1, 11]$, согласующегося с экологическим смыслом модельных параметров. На рис. 4 представлен фрагмент кода, реализующего алгоритм дифференциальной эволюции для модели (2) с учетом выбранного замкнутого интервала.

выше этапами 2-5 классического метода дифференциальной эволюции.

4. *Количество итераций*. Указанный параметр представляет собой максимальное количество поколений G_{\max} и является критерием останова алгоритма на этапе 6. В рассматриваемой задаче для популяционно-миграционной модели количество итераций G_{\max} равно 250, но сходимость алгоритма обеспечивается на 159-й итерации.

5. *Коэффициент мутаций* $F \in [0.5, 1]$ характеризует масштабный коэффициент, который контролирует скорость эволюции популяции на этапе 3.

6. *Константа рекомбинации* C_r , равная 0.5 и применяемая на этапе 4, определяет вероятность скрещивания.

На рис. 5 представлен результат работы функции `differential_evolution` для модели (2). Найдены оптимальные модельные параметры $a_1=8.141, a_2=10.928, a_3=10.998, p_{11}=0.478, p_{22}=0.100, p_{33}=0.100, p_{13}=0.137, p_{31}=0.100, \beta_1=0.124, \gamma_1=0.310, \beta_2=10.908, \gamma_2=10.864$.



```
Polishing solution with 'L-BFGS-B'
message: Optimization terminated successfully.
success: True
fun: 4.547666035969471e-08
x: [ 8.141e+00  1.093e+01  1.100e+01  4.776e-01  1.001e-01
      1.003e-01  1.375e-01  1.004e-01  1.244e-01  3.096e-01
      1.091e+01  1.086e+01]
nit: 159
nfev: 1933
[ 8.14127928 10.9277733 10.99820708 0.477648 0.10013032 0.10032202
 0.13752147 0.1003975 0.12435612 0.30956702 10.90773128 10.86367571]
```

Р и с. 5. Результат работы функции differential_evolution для модели (2)
F i g. 5. The result of the differential_evolution function for model (2)

Проведена серия вычислительных экспериментов по поиску оптимальных параметров для моделей (2) и (3) с учетом заданных начальных условий. Полученные наборы параметров приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1. Наборы параметров для моделей (2), (3), полученные с помощью дифференциальной эволюции

T a b l e 1. Parameter sets for models (2), (3) obtained using differential evolution

Модель	Набор параметров
(2)	$a_1=8.141, a_2=10.928, a_3=10.998, p_{11}=0.478, p_{22}=0.100, p_{33}=0.100, p_{13}=0.137, p_{31}=0.100, \beta_1=0.124, \gamma_1=0.310, \beta_2=10.908, \gamma_2=10.864.$
(3)	$a_1=10.013, a_2=10.885, a_3=10.934, p_{11}=0.359, p_{22}=0.100, p_{33}=0.101, p_{13}=0.101, p_{31}=0.184, \beta=3.839, \gamma=9.133.$

Найденные наборы параметров использованы для анализа траекторной динамики популяций, построения фазовых портретов и сравнительного анализа динамических режимов моделей (2), (3).

3. Результаты компьютерных экспериментов

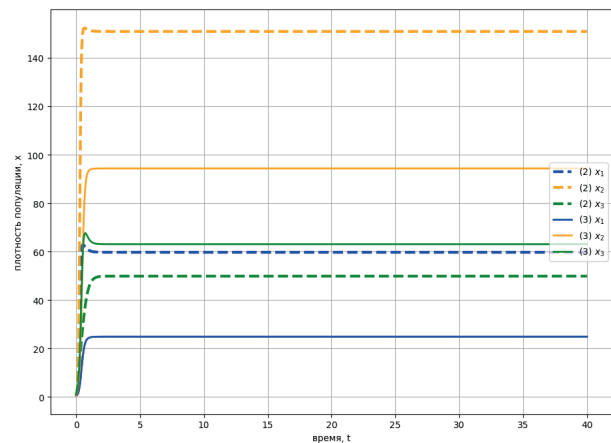
В настоящем разделе приведены результаты вычислительных экспериментов для моделей (2), (3) с учетом начальных условий $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.5, 0.5, 1)$ и наборов параметров из таблицы 1. На рис. 6 представлены траектории системы (2) для плотностей популяций x_1, x_2, x_3 в сравнении с соответствующими траекториями системы (3).

Согласно рис. 6, наблюдается соответствующее стационарному режиму как сосуществование двух видов в основном ареале, так и существование мигрирующего вида в убежище. Разные скорости миграции значительно влияют на плотность популяций как в основном ареале, так и в убежище. Плотность популяции x_1 в основном ареале обитания и плотность популяции x_2 в убежище для модели (2) значительно выше, чем плотности соответствующих популяций для модели (3). Однако для модели (2) наблюдается убывание плотности популяции x_3 , которая не имеет возможности мигрировать в убежище, по сравнению с плотностью соответствующей популяции модели (3).

Построены фазовые портреты моделей (2), (3) в неотрицательном ортанте пространства (x_1, x_2, x_3) с учетом начальных условий $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.5, 0.5, 1)$ и наборов параметров из таблицы 1, а также проекции фазовых портретов моделей

(2), (3) на плоскости. В частности, на рис. 7 представлен фазовый портрет модели (2) в неотрицательном ортанте пространства (x_1, x_2, x_3) , а на рис. 8 приведена проекция фазового портрета системы (2) на плоскости (x_2, x_3) . Вид проекции соответствует характеру устойчивого узла.

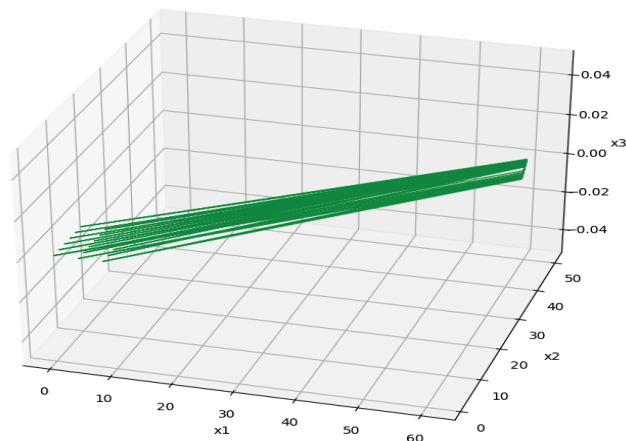
В ходе компьютерных экспериментов выявлены эффекты, связанные с влиянием коэффициентов миграции на траекторную динамику численности популяций. Сравнительный анализ поведения траекторий моделей (2), (3) показывает, что разные скорости миграции оказывают значительное влияние на численности популяций как в основном ареале обитания, так и в убежище. При оптимальных наборах параметров, полученных с учетом заданного критерия качества, наблюдается сосуществование двух конкурентов в основном ареале и существование мигрирующего вида в убежище как в случае с разными скоростями миграции, так и в случае попарно одинаковых миграционных коэффициентов.



Р и с. 6. Траектории систем (2), (3) для плотностей популяций x_1, x_2, x_3 с учетом набора параметров, соответствующего модели (2): $a_1=8.141, a_2=10.928, a_3=10.998, p_{11}=0.478, p_{22}=0.100, p_{33}=0.100, p_{13}=0.137, p_{31}=0.100, \beta_1=0.124, \gamma_1=0.310, \beta_2=10.908, \gamma_2=10.864$ и набора параметров, соответствующего модели (3): $a_1=10.013, a_2=10.885, a_3=10.934, p_{11}=0.359, p_{22}=0.100, p_{33}=0.101, p_{13}=0.101, p_{31}=0.184, \beta=3.839, \gamma=9.133$

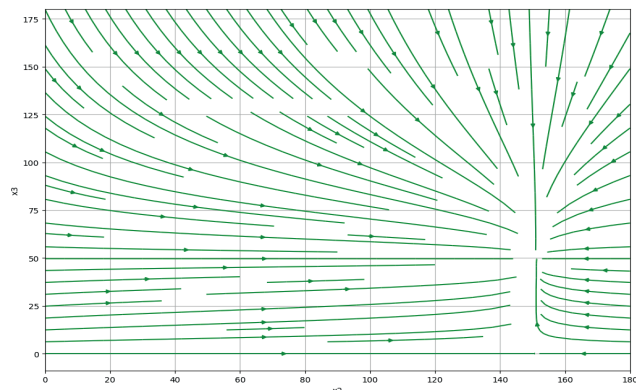
F i g. 6. Trajectories of systems (2), (3) for population densities x_1, x_2, x_3 considering the set of parameters corresponding to model (2): $a_1=8.141, a_2=10.928, a_3=10.998, p_{11}=0.478, p_{22}=0.100, p_{33}=0.100, p_{13}=0.137, p_{31}=0.100, \beta_1=0.124, \gamma_1=0.310, \beta_2=10.908, \gamma_2=10.864$ and the set of parameters corresponding to model (3): $a_1=10.013, a_2=10.885, a_3=10.934, p_{11}=0.359, p_{22}=0.100, p_{33}=0.101, p_{13}=0.101, p_{31}=0.184, \beta=3.839, \gamma=9.133$





Р и с. 7. Фазовый портрет модели (2) в неотрицательном ортанте пространства (x_1, x_2, x_3)

Fig.7. Phase portrait of model (2) in the non-negative orthant of space



Р и с. 8. Проекция фазового портрета модели (2) на плоскости (x_2, x_3)

Fig. 8. Projection of the phase portrait of the model (2) on the plane

Заключение

В настоящей статье предложен подход к построению и исследованию динамических популяционно-миграционных моделей вида «два конкурента – один ареал миграции» с применением интеллектуальных технологий поиска параметров. Разработанный на основе дифференциальной эволюции алгоритм позволяет выявить условия сосуществования видов в общем ареале обитания и существования особей, имеющих возможность мигрировать в убежище. Реализация задачи построения траекторий динамики популяций осуществлена с помощью программного обеспечения на языке Python с привлечением таких библиотек, как SciPy, NumPy и Matplotlib. Результаты могут найти применение при моделировании управляемых динамических популяционных систем высокой размерности. В качестве дополнительного исследования и в качестве расширения функционала метода поиска параметров модели (1) можно предложить использовать в алгоритме дифференциальной эволюции критерий оптимальности, основанный на проверке предположения о существовании положительного вектора, компоненты которого соответствуют приближенному состоянию равновесия.

Перспективным направлением исследований с применением метода дифференциальной эволюции является построение и анализ популяционно-миграционных моделей в стохастическом и нечетком случаях, характеризующихся неопределенностями, которые свойственны процессам развития биологических сообществ. Кроме того, планируется изучение методов машинного обучения для анализа данных и прогнозирования поведения популяций, а также оценка возможностей параллельных и распределенных вычислений для ускорения процесса моделирования систем.

Список использованных источников

- [1] Mathematical Modeling of Population Dynamics Based on Recurrent Equations: Results and Prospects. Part I / E. Y. Frisman [et al.] // *Biology Bulletin*. 2021. Vol. 48. P. 1-15. <https://doi.org/10.1134/S1062359021010064>
- [2] Ursell T. Structured environments foster competitor coexistence by manipulating interspecies interfaces // *PLOS Computational Biology*. 2021. Vol. 17, No. 1. Article number: e1007762. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007762>
- [3] Zhang X., Chen L. The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka-Volterra model // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2007. Vol. 66, issue 12. P. 2767-2776. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.04.006>
- [4] Синицын И. Н., Дружинина О. В., Масина О. Н. Аналитическое моделирование и анализ устойчивости нелинейных широкополосных миграционных потоков // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16, № 3. С. 3-16. EDN: XSNQYX
- [5] Rodzin S., Bozhenyuk A., Rodzina L. Bioheuristics as Tool for Global Optimization Problem Based on Collective Behavior Model of Animals // *2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. Sochi, Russian Federation: IEEE Computer Society, 2024. P. 420-425. <https://doi.org/10.1109/RusAutoCon61949.2024.10694243>
- [6] Дружинина О. В., Масина О. Н., Тарова Е. Д. Анализ и синтез нелинейных многомерных динамических моделей с учетом миграционных потоков и управляющих воздействий // *Нелинейный мир*. 2019. Т. 17, № 5. С. 24-37. <https://doi.org/10.18127/j20700970-201905-03>
- [7] Enhanced PSO feature selection with Runge-Kutta and Gaussian sampling for precise gastric cancer recurrence prediction / J. Zhao [et al.] // *Computers in Biology and Medicine*. 2024. Vol. 175. Article number: 108437. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2024.108437>



- [8] Storn R., Price K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces // Journal of Global Optimization. 1997. Vol. 11, issue 4. P. 341-359. <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
- [9] Price K. V., Storn R. M., Lampinen J. A. Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. Springer-Verlag Berlin Heidelberg : Springer, 2005. 539 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-31306-0>
- [10] Differential Evolution Using Enhanced Mutation Strategy Based on Random Neighbor Selection / M. H. Baig [et al.] // Symmetry. 2023. Vol. 15, issue 10. Article number: 1916. <https://doi.org/10.3390/sym15101916>
- [11] Novikov Z., Vakhnin A. Development and analysis of a self-configuring differential evolution algorithm // ITM Web of Conferences. 2024. Vol. 59. Article number: 02021. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20245902021>
- [12] A Hybrid Differential Evolution for Non-Smooth Optimization Problems / L. Egorova [et al.] // Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics. 2023. Vol. 38, No. 4. P. 829-845. <https://doi.org/10.22190/FUMI230802054E>
- [13] DEoptim: An R Package for Global Optimization by Differential Evolution / K. M. Mullen [et al.] // Journal of Statistical Software. 2009. Vol. 40, No. 6. P. 1-26. <https://doi.org/10.18637/jss.v040.i06>
- [14] SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python / P. Virtanen [et al.] // Nature Methods. 2020. Vol. 17. P. 261-272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
- [15] Mejía-de-Dios J.-A., Mezura-Montes E. Metaheuristics: A Julia Package for Single- and Multi-Objective Optimization // Journal of Open Source Software. 2022. Vol. 7, No. 78. Article number: 4723. <https://doi.org/10.21105/joss.04723>
- [16] Построение и анализ четырехмерных моделей динамики популяций с учетом миграционных потоков / А. А. Петров [и др.] // Ученые записки УлГУ. Серия «Математика и информационные технологии». 2022. № 1. С. 43-55. EDN: PBUGYG
- [17] Construction, stochastization and computer study of dynamic population models “two competitors – two migration areas” / I. I. Vasilyeva [et al.] // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2023. Vol. 31, No. 1. P. 27-45. <https://doi.org/10.22363/2658-4670-2023-31-1-27-45>
- [18] Дружинина О. В., Васильева И. И., Масина О. Н. Построение популяционных динамических моделей типа «три конкурента – три ареала миграции» // Нелинейный мир. 2023. Т. 21, № 4. С. 33-38. <https://doi.org/10.18127/j20700970-202304-04>
- [19] Масина О. Н., Дружинина О. В., Васильева И. И. Исследование популяционной динамической модели «три конкурента – три ареала миграции» // Ученые записки УлГУ. Серия «Математика и информационные технологии». 2023. № 2. С. 61-71. EDN: PIEKLU
- [20] Das S., Suganthan P. Differential Evolution: A Survey of the State-of-the-Art // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2011. Vol. 15, No. 1. P. 4-31. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2010.2059031>
- [21] Differential Evolution for Neural Networks Optimization / M. Baiocchi [et al.] // Mathematics. 2020. Vol. 8. Article number: 69. <https://doi.org/10.3390/math8010069>
- [22] Qiang J., Mitchell C., Qiang A. Tuning of an adaptive unified differential evolution algorithm for global optimization // 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). Vancouver, BC, Canada : IEEE Computer Society, 2016. P. 4061-4068. <https://doi.org/10.1109/CEC.2016.7744305>
- [23] Lampinen J. A constraint handling approach for the differential evolution algorithm // Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No.02TH8600). Honolulu, HI, USA : IEEE Computer Society, 2002. Vol. 2. P. 1468-1473. <http://dx.doi.org/10.1109/CEC.2002.1004459>
- [24] Hybrid Harmony Search Differential Evolution Algorithm / L. Fu [et al.] // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 21532-21555. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3055530>
- [25] Mezura-Montes E., Velázquez-Reyes J., Coello C. A. A comparative study of differential evolution variants for global optimization // Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation (GECCO '06). New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 2006. P. 485-492. <https://doi.org/10.1145/1143997.1144086>

Поступила 21.01.2024; одобрена после рецензирования 27.02.2024; принята к публикации 04.03.2024.

Об авторах:

Дружинина Ольга Валентиновна, главный научный сотрудник, ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), доктор физико-математических наук, профессор, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9242-9730>**, ovdruzh@mail.ru

Масина Ольга Николаевна, профессор кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности Института математики, естествознания и техники, ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина» (399770, Российская Федерация, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28-1), доктор физико-математических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0934-7217>**, olga121@inbox.ru

Васильева Ирина Ивановна, старший преподаватель кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности Института математики, естествознания и техники, ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина» (399770, Российская Федерация, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28-1), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4120-2595>**, irinavsl@yandex.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.



References

- [1] Frisman E.Y., Zhdanova O.L., Kulakov M.P. et al. Mathematical Modeling of Population Dynamics Based on Recurrent Equations: Results and Prospects. Part I. *Biology Bulletin*. 2021;48:1-15. <https://doi.org/10.1134/S1062359021010064>
- [2] Ursell T. Structured environments foster competitor coexistence by manipulating interspecies interfaces. *PLOS Computational Biology*. 2021;17(1):e1007762. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007762>
- [3] Zhang X., Chen L. The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka-Volterra model. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2007;66(12):2767-2776. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.04.006>
- [4] Sinitsyn I.N., Druzhinina O.V., Masina O.N. Analytical Modeling and Stability Analysis of Nonlinear Broadband Migration Flows. *Nelineinyi mir = Nonlinear World*. 2018;16(3):3-16. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: XSNQYX
- [5] Rodzin S., Bozhenyuk A., Rodzina L. Bioheuristics as Tool for Global Optimization Problem Based on Collective Behavior Model of Animals. In: 2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). Sochi, Russian Federation: IEEE Computer Society; 2024. p. 420-425. <https://doi.org/10.1109/RusAutoCon61949.2024.10694243>
- [6] Druzhinina O.V., Masina O.N., Tarova E.D. Analysis and Synthesis of Nonlinear Dynamic Models Taking into Account Migration Flows and Control Actions. *Nelineinyi mir = Nonlinear World*. 2019;17(5):24-37. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20700970-201905-03>
- [7] Zhao J., et al. Enhanced PSO feature selection with Runge-Kutta and Gaussian sampling for precise gastric cancer recurrence prediction. *Computers in Biology and Medicine*. 2024;175:108437. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2024.108437>
- [8] Storn R., Price K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997;11(4):341-359. <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
- [9] Price K.V., Storn R.M., Lampinen J.A. Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer; 2005. 539 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-31306-0>
- [10] Baig M.H., Abbas Q., Ahmad J., Mahmood K., Alfarhood S., Safran M., Ashraf I. Differential Evolution Using Enhanced Mutation Strategy Based on Random Neighbor Selection. *Symmetry*. 2023;15(10):1916. <https://doi.org/10.3390/sym15101916>
- [11] Novikov Z., Vakhnin A. Development and analysis of a self-configuring differential evolution algorithm. *ITM Web of Conferences*. 2024;59:02021. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20245902021>
- [12] Egorova L., Kazakovtsev L., Krutikov V., Tovbis E., Fedorova A. A Hybrid Differential Evolution for Non-Smooth Optimization Problems. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*. 2023;38(4):829-845. <https://doi.org/10.22190/FUMI230802054E>
- [13] Mullen K.M., Ardia D., Gil D., Windover D., Cline J. DEoptim: An R Package for Global Optimization by Differential Evolution. *Journal of Statistical Software*. 2009;40(6):1-26. <https://doi.org/10.18637/jss.v040.i06>
- [14] Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E., Haberland M., Reddy T., Cournapeau D. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*. 2020;17:261-272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
- [15] Mejía-de-Dios J.-A., Mezura-Montes E. Metaheuristics: A Julia Package for Single- and Multi-Objective Optimization. *Journal of Open Source Software*. 2022;7(78):4723. <https://doi.org/10.21105/joss.04723>
- [16] Petrov A.A., Druzhinina O.V., Masina O.N., Vasilyeva I.I. The construction and analysis of four-dimensional models of population dynamics taking into account migration flows. *Uchenyye zapiski Ulyanovskogo gosudarstvennogo universiteta. Fundamental'nyye problemy matematiki i mekhaniki = Scientific Notes of Ulyanovsk State University. Fundamental Problems of Mathematics and Mechanics*. 2022;(1):43-55. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PBUGYG
- [17] Vasilyeva I.I., Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N. Construction, stochastization and computer study of dynamic population models “two competitors – two migration areas”. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 2023;31(1):27-45. <https://doi.org/10.22363/2658-4670-2023-31-1-27-45>
- [18] Druzhinina O.V., Vasilyeva I.I., Masina O.N. Design of Population Dynamic Models of the “Three Competitors – Three Migration Areas” Type. *Nelineinyi mir = Nonlinear World*. 2023;21(4):33-38. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20700970-202304-04>
- [19] Masina O.N., Druzhinina O.V., Vasilyeva I.I. Research of the Population Dynamic Model «Three Competitors – Three Migration Areas». *Uchenyye zapiski Ulyanovskogo gosudarstvennogo universiteta. Fundamental'nyye problemy matematiki i mekhaniki = Scientific Notes of Ulyanovsk State University. Fundamental Problems of Mathematics and Mechanics*. 2023;(2):61-71. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PIEKLU
- [20] Das S., Suganthan P. Differential Evolution: A Survey of the State-of-the-Art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2011;15(1):4-31. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2010.2059031>
- [21] Bairoletti M., Di Bari G., Milani A., Poggioni V. Differential Evolution for Neural Networks Optimization. *Mathematics*. 2020;8:69. <https://doi.org/10.3390/math8010069>
- [22] Qiang J., Mitchell C., Qiang A. Tuning of an adaptive unified differential evolution algorithm for global optimization. In: 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). Vancouver, BC, Canada: IEEE Computer Society; 2016. p. 4061-4068. <https://doi.org/10.1109/CEC.2016.7744305>
- [23] Lampinen J. A constraint handling approach for the differential evolution algorithm. In: Proceedings of the 2002 Congress on



- Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No.02TH8600). Honolulu, HI, USA: IEEE Computer Society; 2002. Vol. 2. p. 1468-1473. <http://dx.doi.org/10.1109/CEC.2002.1004459>
- [24] Fu L., Zhu H., Zhang C., Ouyang H., Li S. Hybrid Harmony Search Differential Evolution Algorithm. *IEEE Access*. 2021;9:21532-21555. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3055530>
- [25] Mezura-Montes E., Velázquez-Reyes J., Coello C.A. A comparative study of differential evolution variants for global optimization. In: Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation (GECCO '06). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2006. p. 485-492. <https://doi.org/10.1145/1143997.1144086>

Submitted 21.01.2024; approved after reviewing 27.02.2024; accepted for publication 04.03.2024.

About the authors:

Olga V. Druzhinina, Chief Researcher, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9242-9730>**, ovdruz@mail.ru

Olga N. Masina, Professor of the Chair of Mathematical Modeling, Computer Technologies and Information Security, Institute of Mathematics, Natural Science and Technology, Bunin Yelets State University (28-1 Kommunarov St., Yelets 399770, Lipetsk region, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0934-7217>**, olga121@inbox.ru

Irina I. Vasilyeva, Associate Assistant of the Chair of Mathematical Modeling, Computer Technologies and Information Security, Institute of Mathematics, Natural Science and Technology, Bunin Yelets State University (28-1 Kommunarov St., Yelets 399770, Lipetsk region, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4120-2595>**, irinavsl@yandex.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

