



Теоретические вопросы информатики, прикладной математики,
компьютерных наук и когнитивно-информационных технологий

<https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202304.848-856>

УДК 519.872

Применение метода Симпсона в задаче численного интегрирования быстро осциллирующих функций

В. Ю. Иноземцев

Оригинальная статья

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»,
г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

1142220481@rudn.university

Аннотация

Численное интегрирование быстро осциллирующих функций является актуальной проблемой во многих научных и инженерных областях. Такие функции, обычно встречающиеся в физике, математике и инженерии, имеют множество локальных экстремумов на заданном интервале. Интегрирование таких функций может быть сложным, поскольку традиционные методы не всегда обеспечивают достаточную точность для получения надежных результатов. В этой связи, метод Симпсона является одним из эффективных методов численного интегрирования быстро осциллирующих функций. Он основывается на аппроксимации кривой функции с помощью парабол, что обеспечивает лучшую точность при интегрировании функций с быстро осциллирующими колебаниями. В отличие от других методов, метод Симпсона подходит для обработки функций с нечетным количеством узлов интегрирования и обеспечивает высокую точность при адекватном использовании количества узлов интегрирования. Метод Симпсона подходит для решения задачи численного интегрирования быстро осциллирующих функций, поскольку он обеспечивает точность при вычислении интегралов с возникающими экстремумами, а также прост в реализации. Это основные преимущества метода Симпсона перед другими методами, которые делают его полезным во многих научных и технических областях, где требуется вычисление интегралов быстро осциллирующих функций.

Ключевые слова: компьютерные науки, информационные технологии, численное интегрирование
быстро осциллирующих функций, метод Симпсона

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Иноземцев В. Ю. Применение метода Симпсона в задаче численного интегрирования
быстро осциллирующих функций // Современные информационные технологии и ИТ-
образование. 2023. Т. 19, № 4. С. 848-856.
<https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202304.848-856>

© Иноземцев В. Ю., 2023



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



**Theoretical Questions of Computer Science, Computational Mathematics,
Computer Science and Cognitive Information Technologies**

Application of Simpson's Method in the Problem of Numerical Integration of Rapidly Oscillating Functions

V. Yu. Inozemtsev

Original article

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

Address: 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

1142220481@rudn.university

Abstract

Numerical integration of rapidly oscillating functions is a pressing problem in many scientific and engineering fields. Such functions, commonly found in physics, mathematics and engineering, have many local extrema in a given interval. Integrating such features can be challenging because traditional methods are not always accurate enough to produce reliable results. In this regard, Simpson's method is one of the effective methods for integrating rapidly oscillating functions. It is based on approximating the curve of a function using a parabola, which ensures stability of accuracy when including a function with rapidly oscillating oscillations. Unlike other methods, Simpson's method is suitable for processing functions with an odd number of integration nodes and provides high accuracy when the number of integration nodes is adequately used. The use of Simpson's method for solving problems of numerical integration of rapidly oscillating functions is suitable because it ensures accuracy in calculating integrals with emerging extrema, as well as ease of implementation. This is the main advantage of the Simpson method over other methods and makes it important in many scientific and technical fields where the calculation of integrals of rapidly oscillating functions is required.

Keywords: computer science, information technology, numerical integration of rapidly oscillating functions, Simpson's method

Conflict of interests: The author declares no conflict of interests.

For citation: Inozemtsev V.Yu. Application of Simpson's Method in the Problem of Numerical Integration of Rapidly Oscillating Functions. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(4):848-856. <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202304.848-856>



Введение

Численное интегрирование представляет собой метод вычисления определенных интегралов с помощью числовых приближений. Оно актуально в научных и инженерных областях, поскольку множество физических и математических задач требуют вычисления площади под кривой или суммирования функций на заданном интервале. Численное интегрирование широко применяется в различных дисциплинах, включая физику, статистику, экономику, машинное обучение и другие. Оно используется для моделирования физических процессов, анализа данных, оптимизации параметров и решения множества других задач. Например, в физике численное интегрирование применяется для вычисления площади под графиком плотности вероятности функции, определения электрического заряда или описания движения тела в пространстве. В области инженерии численное интегрирование используется для решения уравнений и моделирования различных физических процессов, таких как теплообмен или электрические цепи. Быстро осциллирующие функции относятся к классу функций с быстрым изменением амплитуды или частоты на заданном интервале. Они возникают во множестве физических и математических задач, связанных с колебательными процессами или волновыми явлениями.

В качестве интеграла быстро осциллирующей функций в различных исследованиях рассматривается следующий вид:

$$I = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx,$$

где $f(x)$ – функция амплитуды, $g(x)$ – функция фазы, а $\omega \gg 1$ является константой¹. Одна из основных сложностей при численном интегрировании быстро осциллирующих функций заключается в необходимости достижения баланса между точностью и вычислительной сложностью. Из-за быстро меняющегося характера функции, стандартные числовые методы интегрирования могут демонстрировать сниженную сходимость или иметь проблемы с точностью вычислений².

На данный момент наиболее популярным является метод сведения интеграла к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) без граничных условий является наиболее популярным. В своей работе Д. Левин³ показывает, что систему ОДУ в свою очередь можно свести к системе линейных

алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой дает нужный результат. Следует отметить, что в этом подходе также существуют проблемы. Например, если функция $f(x)$ имеет осциллирующий характер, может возникнуть проблема неустойчивого поведения системы, что препятствует получению удовлетворительного результата. Тем не менее, при правильном выборе точек аппроксимации, их расположении в интервале интегрирования и их количестве, можно добиться повышения точности решения⁴.

Преимущества и ограничения метода Симпсона

Метод Симпсона имеет некоторые недостатки при численном интегрировании быстро осциллирующих функций. Одно из ограничений этого метода связано с требованием использовать достаточно малый шаг интегрирования, чтобы достичь высокой точности. Однако это может привести к существенному увеличению вычислительных затрат и времени, особенно при интегрировании на больших интервалах. Еще одним недостатком метода Симпсона является его неспособность адекватно аппроксимировать функции с очень высокочастотными осцилляциями, даже при использовании достаточно малого шага интегрирования. Проблема заключается в том, что квадратичная интерполяция, применяемая в методе Симпсона, может быть недостаточно гибкой для адекватной аппроксимации таких функций.

В данной научной статье исследуются возможности применения метода Симпсона для численного интегрирования быстро осциллирующих функций и определить пределы его применимости. Следует отметить, что метод Симпсона является одним из наиболее популярных методов численного интегрирования, и его простота в реализации по сравнению с другими существующими методами делает его особенно интересным.

Плюсы использования метода Симпсона в задаче численного интегрирования быстро осциллирующих функций:

1. Учет быстрых осцилляций: метод позволяет учесть осцилляции функции и обеспечить более точные результаты интегрирования.
2. Высокая точность: метод Симпсона превосходит другие методы численного интегрирования по точности вычислений, даже для быстро осциллирующих функций.

¹ Sevastianov L.A., Lovetskiy K.P., Kulyabov D.S. An Effective Stable Numerical Method for Integrating Highly Oscillating Functions with a Linear Phase // Computational Science – ICCS 2020. ICCS 2020. Lecture Notes in Computer Science ; ed. by V. Krzhizhanovskaya [et al.]. Vol. 12138. Cham: Springer, 2020. P. 29-43. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50417-5_3

² Jeffrey G.B. Louis Napoleon, George Filon (1875-1937) // Obituary Notices of Fellows of the Royal Society. 1939. Vol. 2, No 7. P. 500-509.

³ Levin D. Procedures for Computing One- and Two-Dimensional Integrals of Functions with Rapid Irregular Oscillations // Mathematics of Computation. 1982. Vol. 38, No. 158. P. 531-538. <https://doi.org/10.2307/2007287>

⁴ Севастьянов Л. А., Кокотчикова М. Г., Кулябов Д. С. Обработка данных методом преобразования значений производных функций на сетке в коэффициенты Фурье // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2009. № 1. С. 62-70. EDN: JYBFPK; Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кокотчикова М. Г. Дискретное преобразование значений функций на сетке в коэффициенты полиномов Цернике // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2007. № 3-4. С. 70-75. EDN: JWJLVW; Integration of highly oscillatory functions / K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, A. L. Sevastyanov, N. M. Mekeko // Mathematical Modelling and Geometry. 2014. Vol. 2, No. 3. P. 11-27. EDN: VLIQUP



3. Простота применения: метод Симпсона легко реализовать с использованием стандартных математических библиотек и не требует сложных вычислительных процедур.

Минусы использования метода Симпсона в задаче численного интегрирования быстро осциллирующих функций:

4. Ограничения на шаг интегрирования: для достижения высокой точности при использовании метода Симпсона требуется использование достаточно малого шага интегрирования, что может привести к большим вычислительным затратам и временным затратам при интегрировании на больших интервалах.

5. Неспособность адекватной аппроксимации: метод Симпсона может не быть способным адекватно аппроксимировать функции с очень высокочастотными осцилляциями, даже при использовании достаточно малого шага интегрирования. Это связано с ограниченной гибкостью квадратичной интерполяции, используемой в методе.

Таким образом, метод Симпсона обладает некоторыми преимуществами в численном интегрировании быстро осциллирующих функций, но также имеет определенные ограничения. Метод Симпсона является эффективным и точным методом численного интегрирования, который может быть успешно применен для оценки значений быстро осциллирующих функций. Применение метода позволяет учесть особенности функций с быстрыми осцилляциями и обеспечить более точные результаты интегрирования. Однако, нужно отметить, что в некоторых случаях, когда осцилляции слишком быстрые или функция слишком сложна, может потребоваться применение более сложных методов численного интегрирования. В данной статье предполагается изучить пределы применения данного метода и определить возможности его применения.

Особое внимание будет уделено возможности метода Симпсона для обработки быстро осциллирующих функций. Именно в таких случаях традиционные методы численного интегрирования могут терять точность и требовать большого объема вычислений. Однако, возможно, метод Симпсона сможет обеспечить достаточно точные результаты при интегрировании таких функций. Также будет отмечена актуальность рассмотрения данного метода в контексте численного интегрирования. Найденные результаты и пределы применения метода Симпсона помогут исследователям и практикам определить, когда и в каких условиях метод может быть наиболее эффективным и точным выбором для интегрирования быстро осциллирующих функций.

Результаты данного исследования будут иметь практическое значение, поскольку они позволят улучшить точность и сходимость численного интегрирования быстро осциллирующих функций при использовании метода Симпсона. Кроме того, расширение области применения численного интегрирования в задачах с быстро осциллирующими функциями способствует повышению качества

получаемых решений в научных и инженерных приложениях. Исследование данных аспектов позволит расширить понимание применимости метода Симпсона в численном интегрировании и может быть полезным для разработки более точных и эффективных методов численного интегрирования быстро осциллирующих функций.

Применение метода Симпсона

Метод Симпсона можно рассматривать для численного интегрирования быстро осциллирующих функций из-за его простоты использования и легкости в реализации. Метод основан на аппроксимации интегрируемой функции с помощью параболических сегментов. Он позволяет разбить интервал интегрирования на подынтервалы и вычислить интеграл на каждом из них, а затем объединить полученные значения, чтобы приближенно решить исходную задачу интегрирования. Метод Симпсона способен эффективно аппроксимировать быстро осциллирующие функции по нескольким причинам.

Во-первых, квадратичная интерполяция предоставляет адекватную аппроксимацию осциллирующей функции на каждом подынтервале, так как квадратичный многочлен обладает достаточной гибкостью для представления быстрых изменений функции.

Во-вторых, метод Симпсона учитывает локальную структуру функции, так как аппроксимация осуществляется на каждом подынтервале с использованием трех точек. Это позволяет более точно оценить интеграл на участках функции с быстрым осциллирующим поведением, тем самым увеличивая точность метода.

В-третьих, метод Симпсона оптимизирован для достижения баланса между точностью результата и вычислительной эффективностью. Он является одним из наиболее эффективных методов численного интегрирования, демонстрирующим хорошую точность для быстро осциллирующих функций при относительно небольшом количестве шагов интегрирования.

Метод Симпсона является численным методом интегрирования, который позволяет аппроксимировать значения интегралов быстро осциллирующих функций.

$$I(x) = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{N-1} [f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

Метод основан на аппроксимации функции квадратичным многочленом на каждом шаге интегрирования. На каждом шаге интегрирования интервал $[a, b]$ делится на n подынтервалов равной ширины $h = (b-a)/n$. Затем функция $f(x)$ аппроксимируется квадратичным многочленом через каждые три точки: x_{i-1}, x_i и x_{i+1} , где $x_i = a + ih$. Аппроксимация квадратичным многочленом применяется к каждому подынтервалу $[x_{i-1}, x_i]$. Интеграл функции на каждом подынтервале вычисляется путем интегрирования этого квадратичного многочлена. Затем все полученные значения интегралов на подынтервалах суммируются, чтобы получить приближенное значение искомого интеграла на интервале $[a, b]$.



В результате, метод Симпсона представляет собой эффективный и надежный метод численного интегрирования быстро осциллирующих функций, который может обеспечить высокую точность и вычислительную эффективность при вычислении определенных интегралов данных функций. Простота использования метода Симпсона заключается в том, что для его применения требуется всего лишь знание интегрируемой функции и выбор нужного количества подынтервалов. Кроме того, формулы и алгоритмы метода относительно просты и не требуют сложных вычислений. Простота в реализации метода Симпсона означает, что алгоритмы и программы, основанные на этом методе, могут быть легко разработаны и использованы, а результаты исследования проверены.

При решении задачи численного интегрирования быстро осциллирующих функций методом Симпсона был выбран язык программирования Python. Python является одним из наиболее распространенных и популярных языков программирования в современной науке и технике. Одним из значимых преимуществ Python является его способность эффективно визуализировать данные. С помощью библиотеки Matplotlib и других инструментов Python возможно создавать графики и диаграммы, что позволяет наглядно представить результаты численного интегрирования. Это облегчает анализ поведения интегрируемой функции и оценку полученных результатов. Более того, Python известен своей простотой в использовании и понятным синтаксисом. Эти особенности позволяют разработчикам легко создавать и отлаживать программы для численного интегрирования. Данное качество высоко ценится при разработке алгоритмов численного интегрирования, где верность и эффективность кода играют важную роль.

Выбор Python для численного интегрирования быстро осциллирующих функций методом Симпсона обусловлен его широким распространением в научном сообществе, возможностью удобной визуализации данных и простотой использования. Он обеспечивает эффективную реализацию алгоритмов и достоверные результаты, что делает его предпочтительным выбором в данной задаче. Для демонстрации результатов исследования были выбраны такие числовые примеры, которые широко распространены, имеют принципиальное значение, а также были приведены в качестве примеров в других научных работах.

Численные примеры

Пример 1

Для сравнения полученных результатов рассмотрим вычисление функции Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\tau - xsin\tau)} d\tau, \quad (1)$$

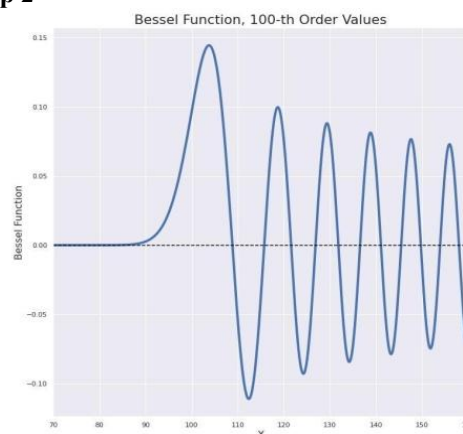
сотого порядка ($n = 100$) на интервале $x \in [70, 160]$, приведенное в работах с использованием метода квадратур (Рис. 1). Вычисленные по описанному методу значения функции сравнивались со значениями, вычисленными системой WolframAlpha. Максимальная

абсолютная ошибка на заданном интервале составляет 4.021×10^{-15} . На данном примере видно, что относительная ошибка растет при уменьшении абсолютного истинного значения функции Бесселя. В данной реализации метод Симпсона обеспечивает относительную точность до $10^{-16}/J_n(x)$, что соответственно влияет на пропорциональный рост относительной ошибки при малых значениях функции Бесселя (Рис. 2).

Аналогично предлагается рассмотреть вычисления функции Бесселя на интервале $x \in [70, 160]$ для порядков $n \in [70, 160]$ (Рис. 3).

Вычисление функции для разных порядков показывает идентичный по порядку ошибки результат. Изображения свидетельствуют о росте относительной ошибки при малых значениях функции Бесселя. Максимальная абсолютная ошибка на заданном интервале составляет 5.578×10^{-15} . Данные вычисления были проделаны методом Симпсона при разбиениях на 10^6 отрезков (Рис. 4).

Пример 2



Р и с. 1. Вычисленные значения функции Бесселя (1) на интервале $x \in [80, 130]$ при $n = 100$

F i g. 1. The computed values of the Bessel function (1) on the interval $x \in [80, 130]$ for $n = 100$

Источники: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены автором.

Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the author.

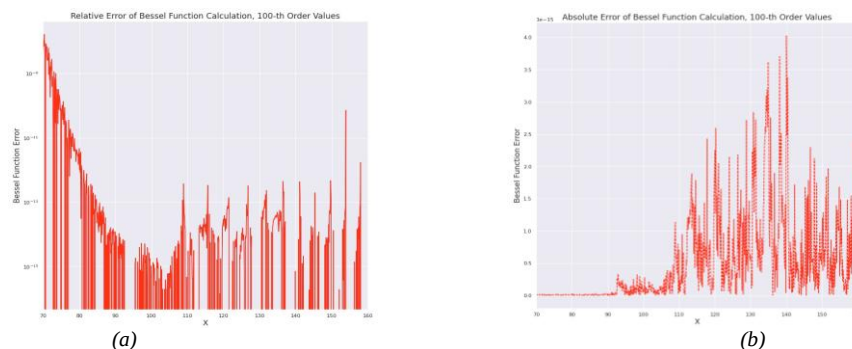
В работах [1], [7] в качестве примера рассматривается вычисление следующего интеграла:

$$I = \int_0^1 \sin(x) e^{i500(x^2-x)} dx, \quad (2)$$

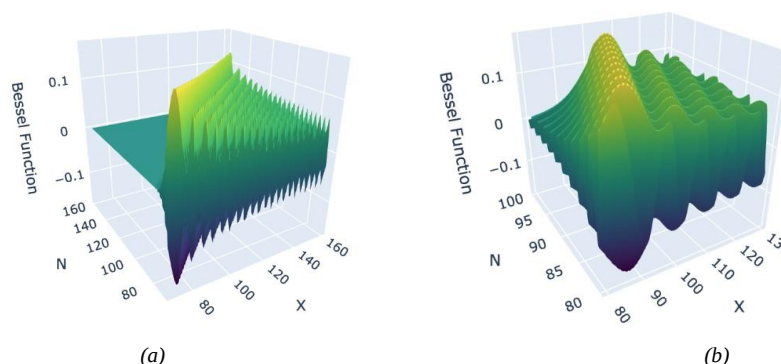
Приводится точное значение интеграла:

$$I = (4.59859397840143 - i \cdot 3.15443542737400) \times 10^{-4},$$

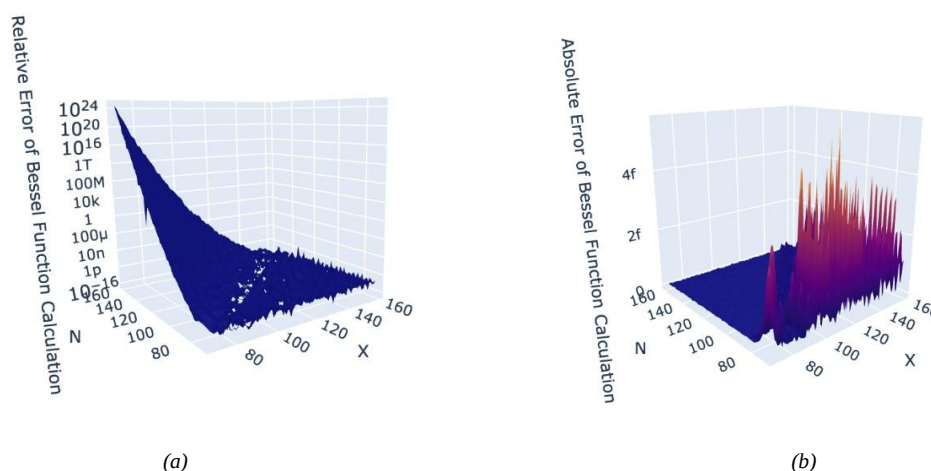
Методом Симпсона были вычислены значения действительной и мнимой части интеграла. Относительные ошибки при различном числе разбиений приведены на изображении (Рис. 5а). Таким образом средняя относительная ошибка после 10^6 разбиений достигает 4.607×10^{-14} и 9.106×10^{-14} для действительной и мнимой части соответственно. Средняя абсолютная ошибка составляет 2.391×10^{-17} и 3.083×10^{-17} для действительной и мнимой части соответственно.



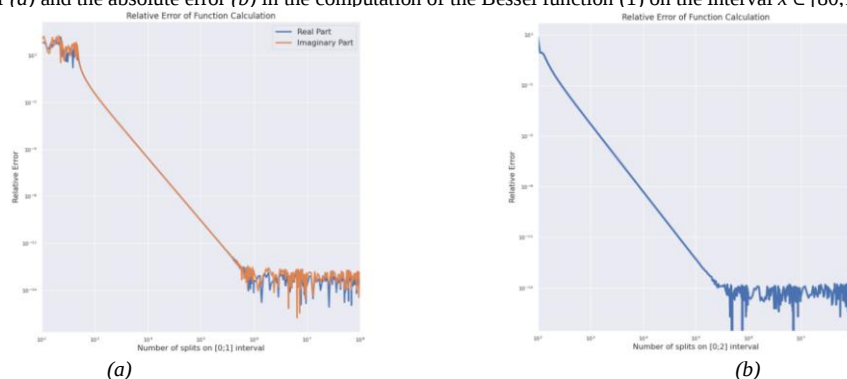
Р и с. 2. Относительная (a) и абсолютная (b) ошибка вычисления функции Бесселя (1) на интервале $x \in [80, 130]$
F i g. 2. The relative error (a) and the absolute error (b) in the computation of the Bessel function (1) on the interval $x \in [80, 130]$



Р и с. 3. Вычисленные значения функции Бесселя (1) на интервале для $x \in [70, 160]$ и порядка $n \in [70, 160]$ (a) и на интервале для $x \in [80, 130]$ и порядка $n \in [80, 100]$ (b)
F i g. 3. The computed values of the Bessel function (1) on the interval for $x \in [70, 160]$ and order $n \in [70, 160]$ (a), and on the interval for $x \in [80, 130]$ and order $n \in [80, 100]$ (b)



Р и с. 4. Относительная (a) и абсолютная (b) ошибка вычисления функции Бесселя (1) на интервале $x \in [80, 130]$ и порядка $n \in [80, 100]$
F i g. 4. The relative error (a) and the absolute error (b) in the computation of the Bessel function (1) on the interval $x \in [80, 130]$ and order $n \in [80, 100]$



Р и с. 5. Относительные ошибки значения вычисленных действительной и мнимой частей интеграла функции (2) (a) и действительной части интеграла функции (3) (b) при разбиениях $N \in [10^3, 10^8]$
F i g. 5. The relative errors of the computed values of the real and imaginary parts of the integral of function (2) (a) and of the real part of the integral of function (3) (b) for partitions $N \in [10^3, 10^8]$



Методом Симпсона были вычислены значения действительной и мнимой части интеграла. Относительные ошибки при различном числе разбиений приведены на изображении (Рис. 5а). Таким образом средняя относительная ошибка после 10^6 разбиений достигает 4.607×10^{-14} и 9.106×10^{-14} для действительной и мнимой части соответственно. Средняя абсолютная ошибка составляет 2.391×10^{-17} и 3.083×10^{-17} для действительной и мнимой части соответственно.

Пример 3

Следующим примером, продемонстрированным в работе [7] является интеграл:

$$I = \int_0^2 e^x \sin(50 \cdot \cosh(x)) dx, \quad (3)$$

Значение такого интеграла определено:

$I = 0.070765298796184$, Таким образом относительная ошибка составляет 5.953×10^{-15} . Средняя абсолютная ошибка составляет 4.212×10^{-16} (Рис. 5b). В работе [11] на данном примере демонстрировалась относительная точность $\sim 10^{-13}$ – 10^{-14} .

Пример 4

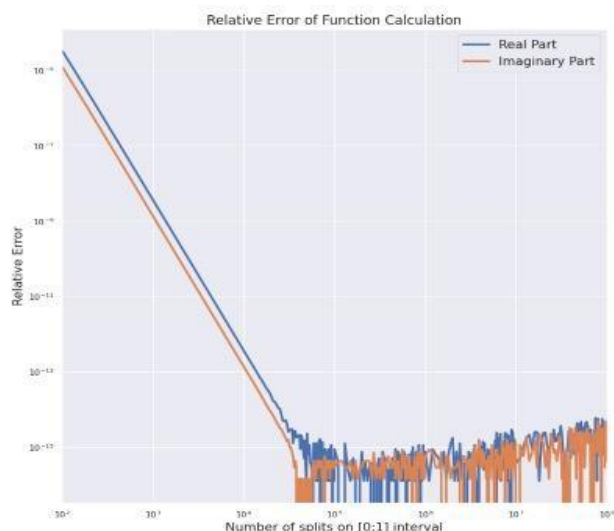
В работе [7] следующий интеграл был вычислен методом квадратур с относительной ошибкой $\sim 10^{-12}$ – 10^{-13} :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x + 0.05} + x^2 \right) \cdot e^{(i \cdot \sqrt{10^6 + 2 \cdot 10^5})} dx, \quad (4)$$

Авторы работы указывают, что точным значением интеграла является:

$$I = 0.879581397374915 + i \cdot 3.10802204874404,$$

В данной работе интеграл был вычислен с относительной ошибкой по действительной 8.148×10^{-16} и мнимой части 5.223×10^{-15} (Рис. 6). Средняя абсолютная ошибка по действительной и мнимой части составляет 7.167×10^{-16} и 1.623×10^{-15}



Р и с. 6. Относительные ошибки значения вычисленных действительной и мнимой частей интеграла функции (4) на интервале $x \in [0,1]$ при разбиениях $N \in [10^3, 10^9]$

Fig. 6. The relative errors of the computed values of the real and imaginary parts of the integral of function (4) on the interval $x \in [0,1]$ for partitions $N \in [10^3, 10^9]$

соответственно. Максимальные отклонения при

разбиениях $N > 10^6$ для мнимой и действительной части составляет 2.553×10^{-15} и 4.885×10^{-15} .

Заключение

В данной работе было исследовано применение метода Симпсона в задаче численного интегрирования быстро осциллирующих функций. Этот метод оказался прост в реализации и позволил достичь хороших результатов в точности вычисления. Он обладает достаточно высокой скоростью работы, что делает его привлекательным для использования в практических приложениях.

Проведенное исследование позволило выявить, что метод Симпсона является эффективным инструментом для приближенного вычисления интегралов быстро осциллирующих функций. Он позволяет достичь высокой точности результатов, что является важным фактором при численном интегрировании. Результаты данного исследования могут быть полезными как для научных исследователей, так и для инженеров и практиков, которые сталкиваются с задачами численного интегрирования в своей работе. Они могут использовать метод Симпсона в своих приложениях для быстрого и точного численного решения интегральных задач.

В ходе исследования было отмечено, что в реализации на языке Python метод показал наилучший результат при разбиении интервала на $N > 10^6$ отрезков. Выдвигается гипотеза, что число разбиений должно являться функцией, зависящей от границ интегрирования и частоты осцилляций интегрируемой функции, чтобы достичь определенной точности вычислений. В дальнейших исследованиях предполагается проверка выдвинутой гипотезы, а также рассмотрение возможности усовершенствования базового метода в зависимости от типа функций. Также будет уделено внимание оптимизации выбора параметров метода Симпсона для разных типов осциллирующих функций.

В целом, результаты данного исследования говорят в пользу использования метода Симпсона в задачах численного интегрирования быстро осциллирующих функций. Однако, перед его применением необходимо адекватно оценить особенности задачи и правильно настроить параметры метода. Это позволит достичь высокой точности вычислений и использовать метод Симпсона для решения разнообразных практических задач.

Благодарности

Благодарю за уделенное внимание к работе Л.А. Севастьянова и К.П. Ловецкого.

Acknowledgements

Thank you for your attention to the work of L. A. Sevastyanov and K. P. Lovetsky.



References

1. Li J., Xuesong W., Wang T. A universal solution to one-dimensional oscillatory integrals. *Science in China Series F Information Sciences*. 2008;51:1614-1622. <https://doi.org/10.1007/s11432-008-0121-2>
2. Khan S., Zaman S., Arama A., Arshad M. On the evaluation of highly oscillatory integrals with high frequency. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020;121:116-125. <https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2020.09.010>
3. Occorsio D., Serafini G. Cubature formulae for nearly singular and highly oscillating integrals. *Calcolo*. 2018;55:4. <https://doi.org/10.1007/s10092-018-0243-x>
4. Khan S., Zaman S., Arshad M., Kang H., Shah H., Issakhov A. A well-conditioned and efficient Levin method for highly oscillatory integrals with compactly supported radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021;131:51-63. <https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2021.06.012>
5. Fermo L., Mezzanotte D., Occorsio D. A product integration rule on equispaced nodes for highly oscillating integrals. *arXiv:2207.08881*. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.08881>
6. Zaman S., Siraj-ul-Islam. On numerical evaluation of integrals involving oscillatory Bessel and Hankel functions. *Numerical Algorithms*. 2019;82:1325-1343. <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00657-2>
7. Fermo L., Mezzanotte D., Occorsio D. On the numerical solution of Volterra integral equations on equispaced nodes. *arXiv:2207.06736*. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.06736>
8. Xu Z., Milovanović G. Efficient method for the computation of oscillatory Bessel transforms and Bessel Hilbert transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016;308:117-137. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.05.031>
9. Khan M., Zaman S. On Computation of Highly Oscillatory Integrals with Bessel Kernel. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*. 2020;3(1):51-63. <https://doi.org/10.34198/ejms.3120.5163>
10. Hasçelik A. Efficient computation of highly oscillatory Fourier-type integrals with monomial phase functions and Jacobi-type singularities. *Applied Numerical Mathematics*. 2020;150:303-312. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.10.007>
11. Kang H., Xiang S., He G. Computation of integrals with oscillatory and singular integrands using Chebyshev expansions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013;242:141-156. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.10.016>
12. Kayijuka I., Alfaqeh S., Özis T. Application of the Cauchy integral approach to singular and highly oscillatory integrals. *International Journal of Computer Mathematics*. 2021;98:2097-2114. <https://doi.org/10.1080/00207160.2021.1876228>
13. Kayijuka I., Ege S., Konuralp A., Topal F. Clenshaw-Curtis algorithms for an efficient numerical approximation of singular and highly oscillatory Fourier transform integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2021;385:113201. <https://doi.org/10.1016/J.CAM.2020.113201>
14. Domínguez V., Graham I., Smyshlyaev V. Stability and error estimates for Filon-Clenshaw-Curtis rules for highly oscillatory integrals. *Ima Journal of Numerical Analysis*. 2011;31:1253-1280. <https://doi.org/10.1093/IMANUM/DRQ036>
15. Li J. Multi-step hybrid methods adapted to the numerical integration of oscillatory second-order systems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. 2019;61:155-184. <https://doi.org/10.1007/S12190-019-01244-3>
16. Li J., Wang X., Wang T., Xiao S. An improved Levin quadrature method for highly oscillatory integrals. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60:833-842. <https://doi.org/10.1016/J.APNUM.2010.04.009>
17. Ma J., Liu H. A well-conditioned Levin method for calculation of highly oscillatory integrals and its application. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018;342:451-462. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.03.044>
18. Ma J., Liu H. On the Convolution Quadrature Rule for Integral Transforms with Oscillatory Bessel Kernels. *Symmetry*. 2018;10:239. <https://doi.org/10.3390/sym10070239>
19. Wang H., Kang H. Numerical methods for two classes of singularly oscillatory Bessel transforms and their error analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2020;371:112604. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112604>
20. Wu Q., Sun M. Numerical Steepest Descent Method for Hankel Type of Hypersingular Oscillatory Integrals in Electromagnetic Scattering Problems. *Advances in Mathematical Physics*. 2021;2021(1):8021050. <https://doi.org/10.1155/2021/8021050>
21. Thorsen K., Drengstig T., Ruoff P. The effect of integral control in oscillatory and chaotic reaction kinetic networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019;393:38-46. <https://doi.org/10.1016/J.PHYSD.2019.01.002>
22. Hasegawa T., Sugiura H. A user-friendly method for computing indefinite integrals of oscillatory functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017;315:126-141. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.10.034>
23. Hasegawa T., Sugiura H. Error estimate for a corrected Clenshaw-Curtis quadrature rule. *Numerische Mathematik*. 2015;130:135-149. <https://doi.org/10.1007/s00211-014-0660-y>
24. Grigori L., Hirstoaga S.A., Salomon J. A parareal algorithm for a highly oscillating Vlasov-Poisson system with reduced models for the coarse solving. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023;130:137-148.



<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.12.004>

25. Zhu B., Sun R., Wang Y., Chen W. Approximation-free-based adaptive integral robust control with prescribed performance for unknown pure feedback system with disturbance. *Aerospace Science and Technology*. 2021;118:107048. <https://doi.org/10.1016/J.AST.2021.107048>
26. Gao J., Condon M., Iserles A. Spectral computation of highly oscillatory integral equations in laser theory. *Journal of Computational Physics*. 2019;395:351-381. <https://doi.org/10.1016/J.JCP.2019.06.045>
27. Wang H., Kang H. Numerical methods for two classes of singularly oscillatory Bessel transforms and their error analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2020;371:112604. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112604>

Поступила 01.10.2023; одобрена после
рецензирования 06.11.2023; принята к публикации
29.11.2023.

Submitted 01.10.2023; approved after reviewing
06.11.2023; accepted for publication 29.11.2023.

Об авторе:

Иноземцев Владислав Юрьевич, аспирант кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Института компьютерных наук и телекоммуникаций, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0008-1195-0294>, 1142220481@rudn.university

About the author:

Vladislav Yu. Inozemtsev, Postgraduate student of the Probability Theory and Cybersecurity Department, Applied Mathematics & Communications Technology Institute, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0008-1195-0294>, 1142220481@rudn.university

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The author has read and approved the final manuscript.