

## Математическое моделирование движения осесимметричного авторотирующего тела сложной конфигурации в квазистатической среде

Д. В. Беляков

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4  
dimbel@rambler.ru

### Аннотация

В работе построена математическая модель тела сложной конфигурации, состоящего из двух ортогональных стержней и четырех прямоугольных пластинок. Рассматриваемая конструкция представляет собой рабочий элемент ветротурбины Дарье с четырьмя лопастями. Тело совершает плоскопараллельное снижение под действием силы тяжести и аэродинамических сил. Аэродинамические силы, приложенные к пластинкам, приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины. Исследуется вопрос о существовании стационарных режимов спуска. Наибольший интерес в работе представляет режим авторотации, при котором тело быстро вращается и осуществляет снижение по вертикали или наклонной прямой подобно свободно вращающемуся несущему винту. При помощи метода осреднения получены оценки средней угловой скорости, средней скорости центра масс и среднего угла планирования тела в режиме авторотации; доказано, что режим авторотации является притягивающим. Показано, что спуск в режиме авторотации происходит с наименьшей скоростью по сравнению с другими режимами, что позволяет применять эту конструкцию в качестве системы спуска или аэродинамического тормозного устройства, либо как систему планирования. Написаны программы, в которых проводится численное интегрирование уравнений движения рассматриваемого тела и результаты численного интегрирования сравниваются с полученными теоретическими оценками для оценки точности рассматриваемых методов.

**Ключевые слова:** тело, стационарный режим, устойчивость, авторотация

**Конфликт интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Беляков Д. В. Математическое моделирование движения осесимметричного авторотирующего тела сложной конфигурации в квазистатической среде // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2024. Т. 20, № 1. С. 112-117. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202401.112-117>

© Беляков Д. В., 2024



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



# Mathematical Modeling of the Motion of an Axisymmetric Autorotating Body of Complex Configuration in a Quasi-Static Environment

D. V. Belyakov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Address: 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

dimbel@rambler.ru

## Abstract

In this paper, a mathematical model of a body of complex configuration consisting of two orthogonal rods and four rectangular plates is constructed. The design in question is a working element of a Darye wind turbine with four blades. The body makes a plane-parallel descent under the influence of gravity and aerodynamic forces. The aerodynamic forces applied to the plates are assumed in accordance with the empirical theory of stationary flow around a flat plate. The question of the existence of stationary descent modes is investigated. The greatest interest in the work is the autorotation mode, in which the body rotates rapidly and descends vertically or in an inclined straight line like a freely rotating main rotor. Using the averaging method, estimates of the average angular velocity, the average velocity of the center of mass and the average planning angle of the body in the autorotation mode are obtained; it is proved that the autorotation mode is attractive. It is shown that the descent in the autorotation mode occurs at the lowest speed compared to other modes, which makes it possible to use this design as a descent system or an aerodynamic braking device, or as a planning system. Programs have been written in which numerical integration of the equations of motion of the body under consideration is carried out and the results of numerical integration are compared with the theoretical estimates obtained to assess the accuracy of the methods under consideration.

**Keywords:** body, stationary mode, stability, autorotation

**Conflict of interests:** The author declares no conflict of interests.

**For citation:** Belyakov D.V. Mathematical Modeling of the Motion of an Axisymmetric Autorotating Body of Complex Configuration in a Quasi-Static Environment. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2024;20(1):112-117. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202401.112-117>



## Введение

В работе рассматривается часто встречающийся режим вращения несущего винта, который называется авторотацией, т.е. режим вращения воздушного винта летательного аппарата под действием набегающего потока воздуха. Для самолета режим авторотации является аварийным режимом. Он возникает в случае остановки двигателя в полете, когда винт перестает приводиться от двигателя и начинает раскручиваться набегающим потоком воздуха [1-11]. При этом, возникает серьезное сопротивление потоку, которое тормозит самолет, а если двигатели расположены на консолях крыла, то возникает еще и достаточно сильный разворачивающий момент. Чтобы избежать этого, надо установить лопасти по потоку, чтобы уменьшить вредное аэродинамическое сопротивление. Для вертолета ситуация меняется в положительную сторону. Несмотря на то, что, что режим авторотации и является аварийным, но с его помощью вертолет может произвести мягкую посадку с неработающим двигателем. В начале снижения, шаг винта должен быть минимален для быстрой раскрутки лопастей. С помощью рычага шаг-газ выбирается режим с минимальной вертикальной скоростью и большой горизонтальной скоростью и удерживается равновесие. Снижение проводится по аналогии с посадкой самолета. Перед землей происходит выравнивание и касание [12-20].

В работе показано, что аналогичный режим существует при плоскопараллельном движении рабочего элемента ветротурбины Дарье с четырьмя лопастями с горизонтальной осью вращения и что тело сложной конфигурации можно использовать как систему спуска.

## Постановка задачи

В работе построена математическая модель плоскопараллельного спуска тела, представляющего собой рабочий элемент ветротурбины Дарье с горизонтальной осью, состоящее из двух ортогональных стержней и четырех пластинок, которые могут быть перекошены на угол  $\delta$  относительно нормали к стержням. При создании модели воздействия среды на тело использована гипотеза о квазистационарном обтекании пластинок средой. Согласно этой гипотезе сила воздействия среды на каждую пластинку характеризуется скоростью некоторой ее точки, которая называется центром давления [21]. В рассматриваемой модели предполагается также, что центры давления пластинок точки А,В,С,Д неподвижны, так как поперечные размеры пластинок намного меньше длины стержня. Считается, также, что среда не оказывает никакого влияния на стержень.

Аэродинамические силы, действующие на каждую пластин-

ку разложим на две составляющие: силы сопротивления  $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C, \vec{S}_D$ , направленные против воздушных скоростей центров давления  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \vec{V}_D$ , и подъемные силы  $\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{P}_C, \vec{P}_D$ , направленные им ортогонально. Введем углы атаки  $\alpha, \beta, \nu, \eta$ , между пластинками и соответствующими воздушными скоростями. Положительное направление отчета против часовой стрелки. Величины аэродинамических сил равны:

$$\begin{aligned} |\vec{S}_A| &= s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2, |\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2 \\ |\vec{S}_B| &= s(\beta)V_B^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\beta)V_B^2, |\vec{P}_B| = p(\beta)V_B^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\beta)V_B^2 \\ |\vec{S}_N| &= s(\nu)V_N^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\nu)V_N^2, |\vec{P}_N| = p(\nu)V_N^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\nu)V_N^2 \\ |\vec{S}_D| &= s(\eta)V_D^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\eta)V_D^2, |\vec{P}_D| = p(\eta)V_D^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\eta)V_D^2 \end{aligned}$$

Где  $c_x, c_y$  безразмерные аэродинамические функции,  $\rho$  - плотность воздуха,  $\sigma$  - площадь пластинок. Введем систему координат, связанную с вектором  $\vec{V}$ . Ось  $\tau$  свяжем с направлением вектора  $\vec{V}$ , ось  $\eta$  свяжем с направлением нормальным. При выводе уравнений движения тела, воспользуемся теоремой о движении центра масс в проекциях на оси  $\tau$  и  $\eta$ , теоремой об изменении кинетического момента и теоремой о сложении скоростей.

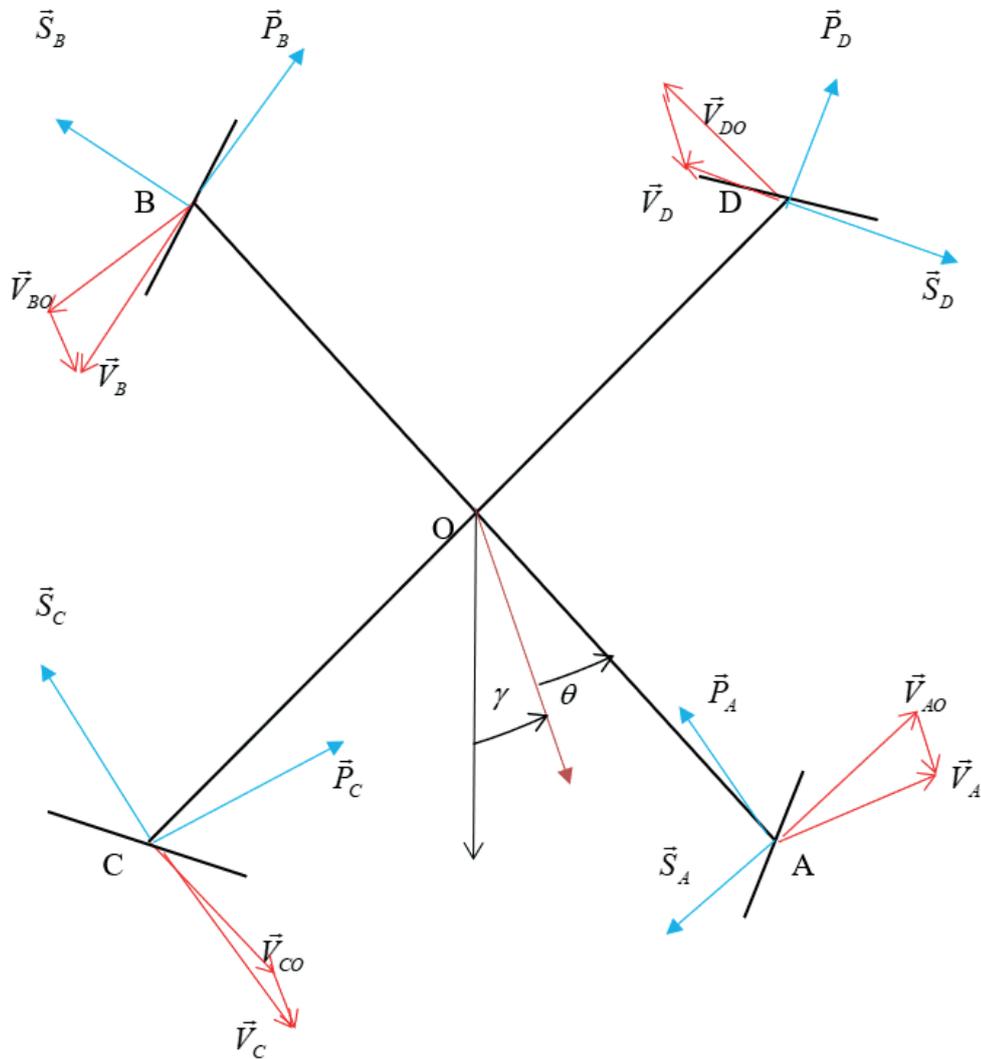
$$\begin{aligned} m\dot{V} &= p(\alpha)V_A r \omega \cos \theta - p(\beta)V_B r \omega \cos \theta - s(\alpha)V_A(r \omega \sin \theta - V) + s(\beta)V_B(r \omega \sin \theta + V) + \\ &- p(\eta)V_D r \omega \sin \theta + p(\nu)V_C r \omega \sin \theta + s(\eta)V_D(r \omega \cos \theta + V) - V_C s(\nu)(r \omega \cos \theta + V) + mg \cos \gamma \quad (1) \\ mV\dot{\gamma} &= -s(\alpha)V_A r \omega \cos \theta + s(\beta)V_B r \omega \cos \theta + p(\alpha)V_A(r \omega \sin \theta - V) - p(\beta)V_B(r \omega \sin \theta + V) - \\ &+ V_D s(\eta) r \omega \sin \theta - V_C s(\nu) r \omega \sin \theta + p(\eta)V_D(r \omega \cos \theta - V) + V_C p(\nu)(r \omega \cos \theta - V) - mg \sin \gamma \\ J\dot{\omega} &= r(V_A^2(p(\alpha)\sin(\alpha - \delta) - s(\alpha)\cos(\alpha - \delta)) + V_B^2(p(\beta)\sin(\beta - \delta) - s(\beta)\cos(\beta - \delta)) \\ &+ V_C^2(p(\nu)\sin(\nu - \delta) - s(\nu)\cos(\nu - \delta)) + V_D^2(p(\eta)\sin(\eta - \delta) - s(\eta)\cos(\eta - \delta)) \\ \dot{\theta} + \dot{\gamma} &= \omega \end{aligned}$$

кинематические соотношения, связывающие  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \vec{V}_D$ ,  $\alpha, \beta, \nu, \eta$  с  $V, \theta, \delta$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} V_A \sin(\alpha - \delta) &= -V \cos \theta, V_A \cos(\alpha - \delta) = r\omega - V \sin \theta \\ V_B \sin(\beta - \delta) &= V \cos \theta, V_B \cos(\beta - \delta) = r\omega + V \sin \theta \quad (2) \\ V_C \sin(\nu - \delta) &= V \sin \theta, V_C \cos(\nu - \delta) = r\omega - V \cos \theta \\ V_D \sin(\eta - \delta) &= -V \sin \theta, V_D \cos(\eta - \delta) = r\omega + V \cos \theta \end{aligned}$$

После того, как мы проинтегрируем систему уравнений (1)-(2), мы можем окончательно определить положение тела при помощи интегрирования кинематических соотношений  $\dot{x} = V \cos \gamma, \dot{y} = V \sin \gamma$  и решения уравнения  $\psi = \gamma + \theta$ . Таким образом, мы получили замкнутую и определенную систему уравнений (1)-(2) описывающую математическую модель рассматриваемого тела.





Р и с. 1. Рассматриваемое тело  
F i g. 1. The body under consideration

Источник: составлено автором.  
Source: Compiled by the author.

### Режим авторотации

Рассмотрим движение тела при высокой угловой скорости под действием силы тяжести и аэродинамических сил. При этом окружная скорость пластинок  $r\dot{\theta}$  велика по сравнению с абсолютной скоростью центра масс  $V$ , поэтому углы атаки  $\alpha, \beta$  близки к  $\delta$ . Из уравнения вращения и уравнений движения центра масс системы (1) видно, что правые части этих уравнений при высокой угловой скорости достаточно малы. Предположим, что существует стационарный режим, при котором тело вращается с высокой угловой скоростью и осуществляет спуск по наклонной прямой под малым углом  $\gamma$ .

Итак, пусть тело раскручено до высокой угловой скорости, т.е.  $r\dot{\theta} \gg V, \alpha, \beta, \eta, \nu \rightarrow \delta$ . Аэродинамические функции  $p, S$  разложим в ряд при  $\alpha, \beta, \eta, \nu \rightarrow \delta$  и возьмем члены первого порядка.

$$s(\alpha) = s_\delta + s'_\delta(\alpha - \delta), p(\alpha) = p_\delta + p'_\delta(\alpha - \delta),$$

$$s(\beta) = s_\delta + s'_\delta(\beta - \delta), p(\beta) = p_\delta + p'_\delta(\beta - \delta)$$

$$s(\eta) = s_\delta + s'_\delta(\eta - \delta), p(\eta) = p_\delta + p'_\delta(\eta - \delta)$$

$$s(\nu) = s_\delta + s'_\delta(\nu - \delta), p(\nu) = p_\delta + p'_\delta(\nu - \delta)$$

где:  $s_\delta = s(\delta), s'_\delta = s'(\delta), p_\delta = p(\delta), p'_\delta = p'(\delta)$ .



Левые части кинематических соотношений (2) линеаризуем при  $\alpha, \beta, \eta, \nu \rightarrow \delta$

$$\begin{aligned} V_A(\alpha - \delta) &= -V \cos \theta, & V_A &= r\omega - V \sin \theta \\ V_B(\beta - \delta) &= V \cos \theta, & V_B &= r\omega + V \sin \theta \\ V_C(\nu - \delta) &= V \sin \theta, & V_C &= r\omega - V \cos \theta \\ V_D(\eta - \delta) &= -V \sin \theta, & V_D &= r\omega + V \cos \theta \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями, сделаем в уравнениях (1), переход от переменных  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \vec{V}_D, \alpha, \beta, \nu, \eta$  к переменным  $\theta, \dot{\theta}, V$  и проведем осреднение правых частей полученной системы на отрезке  $[0, 2\pi]$ , оставим в ней только стационарные слагаемые и учтем, что среднее значение  $\dot{\gamma}$  на обороте равно нулю:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= -4rs_\delta(r\omega)^2 + V^2(p'_\delta + s'_\delta) \\ m\dot{V} &= -2r\omega V s_\delta + mg \\ mV\dot{\gamma} &= -2r\omega V p_\delta - mg\gamma \end{aligned} \quad (3)$$

Эта система имеет следующие стационарные решения:

$$\omega_0 = \frac{V_0}{r} \sqrt{\frac{p'_\delta - s'_\delta}{2s_\delta}}, V_0 = \frac{mg}{2r\omega_0 s_\delta}, \gamma_0 = -\frac{p_\delta}{s_\delta} \quad (4)$$

Воспользуемся тем, что при  $\delta \ll 1$  справедливы соотношения

$$p'_\delta = p'_0, p_\delta = p'_0 \delta, s_\delta = s_0 + \frac{s''_0 \delta^2}{2}, s'_\delta = s''_0 \delta.$$

Исключив из формул (11)  $V_0, \omega_0$ , получим:

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{mg}{2s_0 + s''_0 \delta^2} \sqrt{\frac{p'_0 - s_0 - \frac{s''_0 \delta^2}{2}}{2s_0 + s''_0 \delta^2}}}, V_0 = \sqrt{\frac{mg}{2s_0 + s''_0 \delta^2} \sqrt{\frac{2s_0 + s''_0 \delta^2}{p'_0 - s_0 - \frac{s''_0 \delta^2}{2}}}}, \gamma_0 = -\frac{p'_0 \delta}{s_0 + \frac{s''_0 \delta^2}{2}} \quad (5)$$

Это установившееся движение носит название режима авторотации [22-24].

Таким образом, можно сделать вывод, что установившийся

угол планирования пропорционален величине угла перекоса пластинки  $\delta$ . Мы видим, что при уменьшении сопротивления  $S_\delta$  увеличиваются средняя угловая скорость и средний угол планирования и уменьшается средняя скорость центра масс. При увеличении  $\delta$ ,  $\omega_0$  уменьшается, а  $V_0$  и  $\gamma_0$  увеличиваются. В случае  $\delta = 0$  (пластинки ортогональны державке) имеем:  $p_\delta = 0, s'_\delta = 0, \omega_0$  принимает максимальное значение,  $V_0$  принимает минимальное значение,  $\gamma_0 = 0$ .

Заметим, что найденный стационарный режим авторотации  $\omega_0, V_0, \gamma_0$  является притягивающим. Действительно, при  $\omega < \omega_0, V < V_0, \gamma < \gamma_0$  правые части осредненной системы (10) положительны и величины  $\omega, V, \gamma$  в осредненной системе возрастают. Это означает, что и в полной системе (1) величины  $\omega, V, \gamma$  в среднем за период будут возрастать. При  $\omega > \omega_0, V > V_0, \gamma > \gamma_0$  проводим аналогичные рассуждения. В случае  $\delta = 0$  (пластинки ортогональны державке) из третьего уравнения системы (10) мы видим, что средняя боковая сила равна нулю, поэтому свободное плоскопараллельное падение тела, раскрученного до высокой угловой скорости, будет вертикальным. В работе [25] рассмотрен этот случай. При  $\delta < 1$  свободное плоскопараллельное падение тела будет проходить по наклонной прямой под малым углом  $\gamma_0$ . В работе<sup>1</sup> проведена линеаризация системы (4.2) в окрестности режима авторотации. Полученные уравнения первого приближения нормализованы и показано, что они имеют ограниченное периодическое решение, т.е. обоснована законность осреднения.

## Заключение

Таким образом, в работе:

1. Разработана математическая модель спуска тела.
2. Найдено стационарное решение осредненной системы которое названо режимом авторотации.
3. Показано, что вертикальная скорость режима авторотации невелика по сравнению с угловой скоростью и указанную конструкцию можно использовать как систему спуска.

## References

- [1] Cocco A., Mazzetti S., Masarati P., et al. Numerical Whirl-Flutter analysis of a tiltrotor semi-span wind tunnel model. *CEAS Aeronautical Journal*. 2022;13:923-938. <https://doi.org/10.1007/s13272-022-00605-2>
- [2] Kakimpa B., Hargreaves D.M., Owen J.S. CFD Modelling of Free-Flight and Auto-Rotation of Plate-Type Debris. *Wind and Structures*. 2010;13(2):169-189. <https://doi.org/10.12989/was.2010.13.2.169>
- [3] Dosaev M. Interaction Between Internal and External Friction in Rotation of Vane with Viscous Filling. *Applied Mathematical Modelling*. 2019;68:21-28. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
- [4] Valeev A., Zotov A. Study of Horizontal Aerodynamic Force Directed Against a Fluid Flow. *Liquid and Gaseous Energy Resources*. 2022;2(2):58-65. <https://doi.org/10.21595/lger.2022.23041>
- [5] Hargreaves D.M., Kakimpa B., Owen J.S. The Computational Fluid Dynamics Modelling of the Autorotation of Square, Flat Plates. *Journal of Fluids and Structures*. 2014;46:111-133. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.12.006>
- [6] Su J.N., Zhu Q.T., Sun W.X., Zhang C. Autorotation of Passive Microfliers Comprising Spiral Filamentous Wings. *Physics of Fluids*. 2023;35:063602. <https://doi.org/10.1063/5.0151713>
- [7] Wulandana R., Foote D., Chung B.J., Vaidya A. Vortex-Induced Autorotation Potentials of Bladeless Turbine Models. *International Journal of Green Energy*. 2022;19(2):190-200. <https://doi.org/10.1080/15435075.2021.1941044>

<sup>1</sup> Беляков Д. В., Самсонов В. А., Филиппов В. В. Исследование движений несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2006. № 4. С. 5-10. EDN: HXXZMN



- [8] Domenge P.X.C., Das T. Large-Eddy Simulations of an Autorotating Square Flat Plate. *Applied Mathematical Modelling*. 2016;40(13-14):6576-6587. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.058>
- [9] Iversen J.D. Autorotating Flat-Plate Wings: The Effect of the Moment of Inertia, Geometry, and Reynolds Number. *Journal of Fluid Mechanics*. 1979;92(2):327-348. <https://doi.org/10.1017/S0022112079000641>
- [10] Andronov P.R., Grigorenko D.A., Guvernyuk S.V. Numerical Simulation of Plate Autorotation in a Viscous Fluid Flow. *Fluid Dynamics*. 2007;42:719-731. <https://doi.org/10.1134/S0015462807050055>
- [11] Bohr J., Markvorsen S. Autorotation. *Physica Scripta*. 2016;91(2):023005. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/91/2/023005>
- [12] Huang P., Lin H., Gu M. Wind tunnel investigation of autorotation of plate: The effects of geometry, Reynolds number and rotation direction. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2020;196:104012. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2019.104012>
- [13] Klimina L.A., Masterova A.A., Samsonov V.A. et al. Numerical-Analytical Method for Searching for the Autorotations of a Mechanical System with Two Rotational Degrees of Freedom. *Mechanics of Solids*. 2021;56:392-403. <https://doi.org/10.3103/S0025654421030055>
- [14] Uchibori K., Tamura T. LES study on aerodynamics of auto-rotating square flat plate by IBM and SAMR. *Journal of Fluids and Structures*. 2019;89:108-122. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.04.013>
- [15] Zbikowski R., Ansari S.A., Knowles K. On mathematical modelling of insect flight dynamics in the context of micro air vehicles. *Bioinspiration & Biomimetics*. 2006;1(2):R26. <https://doi.org/10.1088/1748-3182/1/2/R02>
- [16] Zhang Y., Cai X., Lin S., Wang Y., Guo X. CFD Simulation of Co-Planar Multi-Rotor Wind Turbine Aerodynamic Performance Based on ALM Method. *Energies*. 2022;15(17):6422. <https://doi.org/10.3390/en15176422>
- [17] Rezaeiha A., Montazeri H., Blocken B. On the accuracy of turbulence models for CFD simulations of vertical axis wind turbines. *Energy*. 2019;180:838-857. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.05.053>
- [18] Abramov N.B., Goman M.G., Khrabrov A.N. Aerodynamic modeling for poststall flight simulation of a transport airplane. *Journal of Aircraft*. 2019;56(4):1427-1440. <https://doi.org/10.2514/1.C034790>
- [19] Yang Y., Ding Z., Sun G. Dynamic analysis of a skeet-inspired vehicle to achieve a spiral scanning detection motion. *Physica Scripta*. 2024;99:075256. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad5650>
- [20] Lee D.h., Kim C.-j., Lee S.h. Development of Unified High-Fidelity Flight Dynamic Modeling Technique for Unmanned Compound Aircraft. *International Journal of Aerospace Engineering*. 2021;513337. <https://doi.org/10.1155/2021/513337>
- [21] Castelli M.R., Englaro A., Benini E. The Darrieus wind turbine: Proposal for a new performance prediction model based on CFD. *Energy*. 2011;36(8):4919-4934. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2011.05.036>
- [22] Lokshin B.Ya., Samsonov V.A. Features of Movement of a Rotational Body. *Mechanics of Solids*. 2018;53:51-59. <https://doi.org/10.3103/S0025654418010065>
- [23] Chen L., et al. Flapping rotary wing: A novel low-Reynolds number layout merging bionic features into micro rotors. *Progress in Aerospace Sciences*. 2024;146:100984. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.100984>
- [24] Nye-Matthew T., Wang X. Modeling, design and control of middle-size tilt-rotor quadrotor. *arXiv:2411.05994v2*. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.05994>
- [25] Belyakov D.V. Simulation Model of Releasing a Symmetric Auto-rotating Body in the Air. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2019;15(3):702-711. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.15.201903.702-711>

Поступила 10.11.2023; одобрена после рецензирования 22.01.2024; принята к публикации 17.02.2024.

Submitted 10.11.2023; approved after reviewing 22.01.2024; accepted for publication 17.02.2024.

#### Об авторе:

**Беляков Дмитрий Валерьевич**, доцент кафедры компьютерной математики Института № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат технических наук, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>**, [dimbelster@yandex.ru](mailto:dimbelster@yandex.ru)

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

#### About the author:

**Dmitry V. Belyakov**, Associate Professor of the Chair of Computational Mathematics, Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation), Cand. Sci. (Eng.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>**, [dimbelster@yandex.ru](mailto:dimbelster@yandex.ru)

The author has read and approved the final manuscript.

