

Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Обрамление первого порядка множество Мандельброта, множества Жюлиа, структура неподвижных точек семейства полиномов третьей степени» как средство развития креативности студентов

В. С. Секованов¹, В. А. Ивков^{1*}, Е. С. Смирнова¹, Л. Б. Рыбина²

¹ ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Российская Федерация
Адрес: 156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17

² ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», г. Кострома, Российская Федерация

Адрес: 156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, п. Караваево, Учебный городок, д. 34

* ivkov_wa@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы из области нелинейной динамики, в частности такого ее раздела, как голоморфная динамика. Считаем, что важными объектами исследования голоморфной динамики выступают множество Мандельброта и множества Жюлиа. С помощью математических методов и компьютерных экспериментов выявлены обрамления первого порядка множества Мандельброта и структура неподвижных точек семейства полиномов третьей степени комплексной переменной. Разработаны алгоритмы построения множеств Жюлиа, множества Мандельброта и обрамления первого порядка множества Мандельброта рассматриваемого семейства в математическом пакете MathCad и паскаль-программах. В статье изложена методика выполнения многоэтапных математико-информационных заданий (ММИЗ), которые нацелены на развитие креативности студентов. Представлена подробная план-схема одного из многоэтапных математико-информационных заданий, в которой обозначены все шаги проведения исследования. При выполнении этапов задания студенты последовательно переходят от постановки задачи исследования к нахождению неподвижных точек и их типов, определению структуры неподвижных точек, разработке алгоритмов построения множества Мандельброта с помощью различных языков программирования. Предложенная методика работы с многоэтапными математико-информационными заданиями дает возможность развивать креативные качества мышления студентов, интуицию, мотивировать их к дальнейшим исследованиям.

Ключевые слова: множество Мандельброта, обрамление множества Мандельброта, множество Жюлиа, заполняющее множество Жюлиа, неподвижная точка, структура неподвижных точек, критическая точка, обрамление первого порядка множества Мандельброта

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Обрамление первого порядка множество Мандельброта, множества Жюлиа, структура неподвижных точек семейства полиномов третьей степени» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2024. Т. 20, № 2. С. 336-347. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202402.336-347>

© Секованов В. С., Ивков В. А., Смирнова Е. С., Рыбина Л. Б., 2024



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Performing a Multi-Stage Mathematical and Informational Task “Framing the First-Order Mandelbrot Set, Julia Sets, the Structure of Fixed Points of a Family of Polynomials of the Third Degree” as a Means of Developing Students’ Creativity

V. S. Sekovanov^a, V. A. Ivkov^{a*}, E. S. Smirnova^a, L. B. Rybina^b

^a Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation

Address: 17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation

^b Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russian Federation

Address: 34 educational campus, Karavaevo, Kostroma region 156530, Russian Federation

* ivkov_wa@mail.ru

Abstract

The article deals with issues from the field of nonlinear dynamics, in particular, such a section of it as holomorphic dynamics. We believe that the Mandelbrot set and the Julia set are important objects of holomorphic dynamics research. Using mathematical methods and computer experiments, the first-order frames of the Mandelbrot set and the structure of fixed points of a family of polynomials of the third degree of a complex variable are revealed. Algorithms have been developed for constructing Julia sets, Mandelbrot sets and first-order framing of the Mandelbrot set of the family under consideration in the MathCad mathematical package and Pascal programs. The article describes the methodology of performing multi-stage mathematical and informational tasks (MMIZ), which are aimed at developing students’ creativity. A detailed plan-scheme of one of the multi-stage mathematical and informational tasks is presented, in which all the steps of the research are indicated. When completing the task stages, students consistently move from setting the research task to finding fixed points and their types, determining the structure of fixed points, developing algorithms for constructing the Mandelbrot set using various programming languages. The proposed method of working with multi-stage mathematical and informational tasks makes it possible to develop students’ creative thinking qualities, intuition, and motivate them to further research.

Keywords: The Mandelbrot set, the framing of the Mandelbrot set, the Julia set filling the Julia set, the fixed point, the structure of fixed points, the critical point, the first-order framing of the Mandelbrot set

Conflict of interests: The authors declares no conflict of interest.

For citation: Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Smirnova E.S., Rybina L.B. Performing a Multi-Stage Mathematical and Informational Task “Framing the First-Order Mandelbrot Set, Julia Sets, the Structure of Fixed Points of a Family of Polynomials of the Third Degree” as a Means of Developing Students’ Creativity. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2024;20(2):336-347. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202402.336-347>



Введение

Нелинейная динамика является важным разделом современной математики. Данному разделу науки посвящены многочисленные исследования, среди которых работы¹ [1-22]. В настоящее время интенсивно развивается важная ветвь нелинейной динамики – голоморфная динамика, в состав которой входят такие математические объекты, как множество Жюлиа и множества Мандельброта.

Множества Жюлиа и множества Мандельброта являются сложнейшими математическими объектами, которые в настоящее время интенсивно исследуются и находят приложения. Важными компонентами множества Мандельброта являются его обрамления. Исследованию обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени посвящены работы Р. Кроновера², Д. Минлора [2]. Р. Кроновер показал, что главной частью множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^2 + c$ является обрамление первого порядка, ограниченное кардиoidой. Д. Минлор показал, что обрамлением первого порядка множества Мандельброта для функции $f_2(z) = z^2 + cz$ являются области, ограниченные касающимися окружностями. В данной статье мы будем исследовать семейство функций $f_c(z) = z^3 + c$ (для краткости ниже будем писать $f(z) = z^3 + c$). В рамках многоэтапного математико-информационного задания (ММИЗ) укажем нацеленную на развитие креативности студентов методику изучения следующих математических объектов:

- 1) обрамление первого порядка множества Мандельброта семейства полиномов третьей степени $f(z) = z^3 + c$;
- 2) структуру неподвижных точек семейства функций $f(z) = z^3 + c$;
- 3) алгоритмы построения множества Мандельброта и обрамления первого порядка множества Мандельброта данного семейства;
- 4) алгоритм построения множеств Жюлиа, тесно связанных с множеством Мандельброта и структурой неподвижных точек семейства функций $f(z) = z^3 + c$.

Данная методика выполнения ММИЗ нацелена на развитие креативности студентов, связанной с творческой математической деятельностью, студентов математических и инженерных направлений подготовки, при решении нестандартных задач и разработке алгоритмов.

Креативность мы понимаем в самом широком смысле, как способность к творчеству, и ставим целью в данной статье развивать ее при изучении голоморфной динамики, важнейшей составляющей которой являются указанные выше математические объекты.

Материалы и методы

На наш взгляд, развитие креативности эффективно при выполнении многоэтапных математико-информационных заданий (ММИЗ).

Отметим, что исследованиям голоморфной динамики и креативности посвящены многочисленные работы (см., например, [1-19], [23]).

Важной компонентой голоморфной динамики является структура неподвижных точек, от которой, как правило, зависит форма связанных с множеством Мандельброта множеств Жюлиа.

Выполнение ММИЗ «Обрамление первого порядка множества Мандельброта, множества Жюлиа, структура неподвижных точек семейства полиномов третьей степени» нацелено на развитие креативности студентов математических и инженерных направлений подготовки.

План-схема данного ММИЗ указана на рис. 1. При исследовании структуры неподвижных точек рациональных функций студенты под руководством преподавателя выполняют большой объем работы, развивают гибкость мышления, решая нестандартные задачи различными математическими методами с применением информационных и коммуникационными технологиями (ИКТ).

Кроме того, при выполнении данного ММИЗ студенты сталкиваются с совершенно новыми задачами, которые имеют оригинальные решения и требуют значительных интеллектуальных усилий, связанных с применением математических методов и разработкой компьютерных алгоритмов. При решении данных задач у студентов формируется толерантность к новизне, происходит преодоление стереотипов мышления. Они на практике убеждаются интенсивности и пользе в интеграции математических методов и компьютерных технологий.

Важно подчеркнуть, что множества Жюлиа являются одними из самых красивых математических объектов, построение которых с помощью компьютерных программ развивает эстетические способности студентов.

При изучении голоморфной динамики в рамках данного ММИЗ студентам предоставляется возможность разрабатывать математические модели и создавать художественные композиции.

При выполнении данного ММИЗ студент оказывается в роли математика, программиста, компьютерного художника.

Как уже отмечалось, указанные действия студентов нацелены на развитие их креативности при выполнении данного ММИЗ.

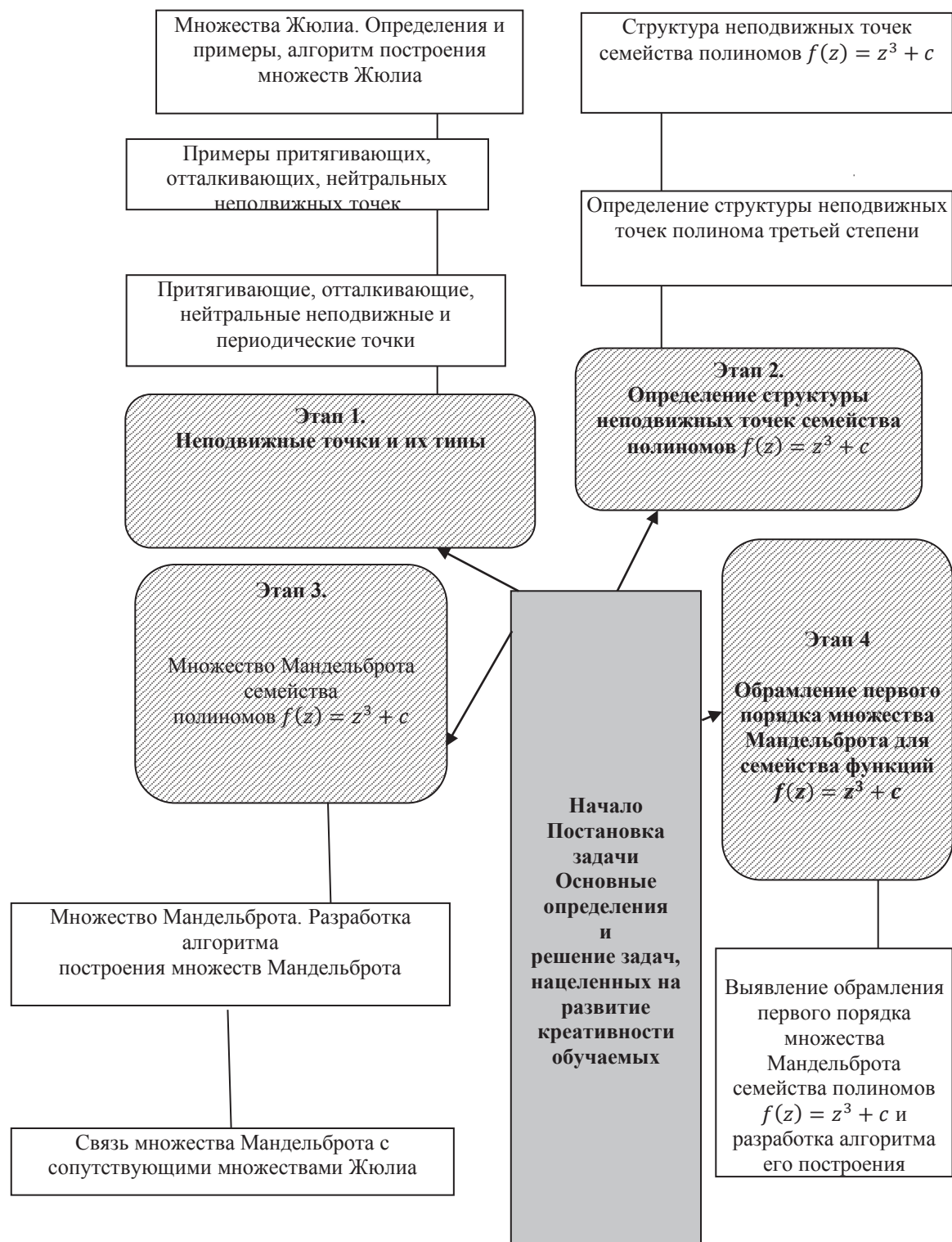
Этап 1. Пусть дана функция $f(z)$. Точка z_0 называется неподвижной, если $f(z_0) = z_0$. Если же $f^{(n)}(z_0) = z_0$ ($n > 1$), то точку z_0 мы назовем периодической точкой. Такое наименьшее n , при котором $f^{(n)}(z_0) = z_0$ называется периодом z_0 . Если $|\lambda| > 1$ ($|\lambda| = 1, |\lambda| < 1$), то точка z называется отталкивающей (соответственно нейтральной, притягивающей), где $\lambda = (f^{(n)}(z))'$.

Приведем примеры функций, имеющих неподвижные и периодические точки. Пусть $f(z) = z^2 - z - 3$. Решая уравнение $z^2 - z - 3 = z$, находим неподвижные точки $z_1 = 3$,

¹ Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. М. : Просвещение, 1977. 320 с.; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных. 2-е изд., перераб. и доп. Кострома : КГУ, 2006. 157 с. EDN: ZFXTWF; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств : Учеб. пособие. 4-е изд., перераб. и доп. Кострома : КГУ, 2012. 208 с. EDN: ZFSPGF; Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Березкина А. Е. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. Кострома : КГУ, 2018. С. 144-150. EDN: YXAECH; Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? М. : ЛЕНАН, 2016. 272 с. EDN: ZELYOV; Секованов В. С. Фрактальная геометрия: Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения. СПб : Изд-во Лань, 2019. 180 с. EDN: ZDKQVN; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств : Учеб. пособие. 4-е изд., перераб. и доп. Кострома : КГУ, 2012. 208 с. EDN: ZFSPGF; Ивков В. А. Наглядное моделирование преобразования Арнольда // Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А. Н. Колмогорова : материалы межд. научно-методической конференции. Кострома : КГУ, 2016. С. 92-96. EDN: YGQAIF

² Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М. : Постмаркет, 2000. 352 с.





Р и с. 1. Обрамление первого порядка множества Мандельброта и структура неподвижных точек семейства полиномов третьей степени
F i g. 1. First-order framing of the Mandelbrot set and the fixed-point structure of a family of third-degree polynomials

Источник: здесь и далее в статье все рисунки и таблицы составлены авторами.
Source: Hereinafter in the article, all tables and figures are compiled by the authors.



$z_2 = -1$. Поскольку $|f'(z_1)| = 5$, а $|f'(z_2)| = -1$, то неподвижная точка z_1 отталкивающая, а неподвижная точка $z_2 = -1$ нейтральная.

Рассмотрим функцию $f(z) = z^4 - 2z^2$. Из уравнения $z^2 - 1 = z$ находим 4 ее неподвижные точки $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $z_3 = 0$, $z_4 = -1$.

Поскольку производная $f(z)$ равна $(f(z))' = 4z^3 - 4z$, то нетрудно подсчитать, что для функции $f(z)$ точки $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ отталкивающие, а точки $z_3 = 0$, $z_4 = -1$ – притягивающие.

Студентам здесь полезно убедиться в справедливости данного суждения. Заметим, что $z^4 - 2z^2 = h^{(2)}(z)$, где $h(z) = z^2 - 1$. Нетрудно проверить, что точки $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ имеют период два для функции $h(z) = z^2 - 1$ и являются отталкивающими неподвижными точками для функций $f(z)$, $h(z)$.

Следуя работе³, введем понятие множества Жюлиа полинома комплексной переменной и приведем при меры множеств Жюлиа. Пусть z_0 – притягивающая неподвижная точка функции f . Множество $A(z_0) = \{z \in C : f^{(n)}(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow \infty\}$ будем называть бассейном притяжения точки z_0 . Множество Жюлиа $j(f)$ функции f есть граница множества точек z , стремящихся к бесконечности при итерировании $f(z)$.

Под заполняющим множеством Жюлиа полинома мы понимаем множество точек комплексной плоскости, орбиты которых ограничены. Множеством Жюлиа полинома является границей заполняющегося множества Жюлиа.

Важно отметить, что множества Жюлиа, как правило, не являются гладкими и построить их в виду большого количества итераций без компьютера практически невозможно.

Приведем пример построения множества Жюлиа функции $f(z) = z^2 - 1$ с помощью компьютерной программы:

```
uses crt, GraphABC;
var height, width: integer;
var i, j, k, n, m: integer;
var dx, dy, x_max, x_min, y_max, y_min, kef, scall: real;
function fx(z: complex): complex; begin fx := z*z-1 end;
var c: complex;
var iter: integer;
begin
width := 500;
height := 500;
setwindowsize(width, height);
iter := 20;
scall := 2;
if (width >= height) then
begin
kef := width / height; x_min := scall * -kef; x_max := scall * kef;
y_min := scall * -1; y_max := scall;
end else if (height > width) then
begin
kef := height / width; x_min := scall * -1; x_max := scall;
y_min := scall * -kef; y_max := scall * kef;
end;
```

```
dx := (x_max - x_min) / width; dy := (y_max - y_min) / height;
```

```
for i:=1 to width do
```

```
for j:=1 to height do begin
```

```
c := (x_min + i * dx, y_min + j * dy);
```

```
try
```

```
for k:=1 to iter do c := fx(c);
```

```
kef := power(c.real, 2) + power(c.imaginary, 2);
```

```
if (abs(kef) < 4) then
```

```
setpixel(i, j, clblack);
```

```
except
```

```
end;
```

```
end;
```

```
end.
```

Иногда заполняющие множества Жюлиа являются гладкими. Например, множество Жюлиа для функции $f(z) = z^4$ есть окружность $|z| = 1$. На самом деле $f(z) = z^4$, $f^{(2)}(z) = z^{16}$, ...

Нетрудно проверить, что последовательность $f^{(n)}(z_0) = f(f^{(n-1)}(z_0))$, $n = 1, 2, \dots$ стремится к ∞ , если $|z_0| > 1$.

При $|z_0| < 1$ данная последовательность будет стремиться к 0.

В рассмотренном случае множеством Жюлиа будет окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Следовательно, $J(f) = \partial\{z : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$ есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Можно показать, что множеством Жюлиа функции $l(z) = z^3 - 3z$ является отрезок $[-2; 2]$.

Этап 2. Будем считать, что функция $f(z)$ имеет три неподвижные притягивающие точки (или триаду неподвижных точек) и писать (P P P) (соответственно одну неподвижную притягивающую точку и две нейтральные неподвижные точки и писать (P N N)). Аналогично определяются случаи (P O O), (N N N), (N O O), (O O O) и другие.

Объединение всех возможных триад мы будем считать структурой неподвижных точек функции семейства функций $f_c(z) = z^3 + c$ и обозначать $SNP(f)$. То есть в структуру неподвижных точек входят те тетрады, которые достигаются хотя бы при одном значении параметра c . Как оказалось, для нашего семейства функций $f_c(z) = z^3 + c$ структурой неподвижных точек является объединение триад $SNP(f) = ((P O O), (O N N), (O O N), (O O O))$.

Отметим, что мы не различаем триады, в состав которых входит одинаковое число притягивающих, нейтральных, отталкивающих неподвижных точек. Например, тетрады (O N N) и (N O N) мы не различаем.

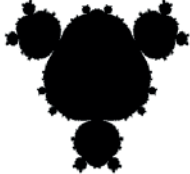
В Таблице 1 выявляется структура неподвижных точек и строятся соответствующие заполняющие множества Жюлиа. Отметим, что знак + означает наличие структуры неподвижных точек у соответствующей функции и строится заполняющее множество Жюлиа, которому данные точки принадлежат. Знак – в Таблице 1 означает отсутствие указанной в структуре неподвижных точек каждой из функции $f(z)$.

Покажем, что у функции $f(z)$ ни при каких значениях параметра c нет двух неподвижных притягивающих точек и одной отталкивающей неподвижной точки (отсутствует случай (P P O)) и трех неподвижных притягивающих точек (отсутствует случай (P P P)).

³ Там же.



Таблица 1.
Table 1.

№	z_1	z_2	z_3	$f(z) = z^3 + c$ $f(z)$ and $j(f)$
1	P	P	P	-
2	P	P	N	-
3	P	O	O	+ z_3 
4	O	N	N	+ $z^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 
5	P	P	O	-
6	N	N	N	-
7	N	O	O	+ $z^3 + \frac{4i}{3\sqrt{3}}$ 
8	O	O	O	+
9	N	N	P	-
10	P	N	O	-

Следуя работе⁴, исследуем структуру неподвижных точек функции $f(z) = z^3 + c$. Покажем, что случай **(P P O)** не имеет места для функции $f(z)$.
Для $f(z)$ найдем значение параметра c , при котором выполняется условие **(O N N)**. Каждая неподвижная точка $f(z)$ удовлетворяет уравнению (1).

$$z^3 - z + c = 0$$

(1)

Пусть z_1, z_2, z_3 – корни данного уравнения. Согласно формуле Виета получим равенства (2):

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = -1 \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -c \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, что z_1, z_2 и z_3 являются и неподвижными точками функции $f(z)$.

Предположим противное. То есть точки z_1, z_2 – притягивающие, а точка z_3 – отталкивающая. В этом случае имеем:

$$|z_1| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |z_2| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |z_3| > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Из первого уравнения системы (2) имеем:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, z_3 = -z_1 - z_2. \text{ Следовательно, } |z_3| = |-z_1 - z_2| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ и } |z_3| \leq |z_1| + |z_2|$$

Выразим также z_2 из первого уравнения системы (2):

$$\begin{aligned} z_2 &= -z_1 - z_3 \\ z_2^2 &= -z_1 z_2 - z_2 z_3 \end{aligned}$$

⁴ Секованов В. С. Голоморфная динамика. СПб: Изд-во «Лань», 2021. 168 с. EDN: WFQGLW



С другой стороны, из второго уравнения системы (2) имеем:

$$-z_1 z_2 - z_2 z_3 = 1 + z_1 z_3$$

Таким образом, имеем: $z_2^2 = 1 + z_1 z_3$, $|z_2^2| = |1 + z_1 z_3| \geq |1| - |z_1 z_3|$.

Поскольку $|z_1| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|z_3| < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $-|z_1 z_3| > -\frac{2}{3}$. Далее имеем: $1 - |z_1 z_3| > 1 - \frac{2}{3}$, $1 - |z_1 z_3| > \frac{1}{3}$, $|z_2^2| > \frac{1}{3}$. Однако, $|z_2^2| = |z_2| |z_2| < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Выявлено противоречие: $\frac{1}{3} < |z_2^2|$ и $|z_2^2| > \frac{1}{3}$, что невозможно. Следовательно, не найдется такого c , что функция $f(z) = z^3 + c$ будет иметь 2 притягивающие и 1 отталкивающую неподвижные точки⁵.

Здесь студентам полезно предложить доказать по аналогии, что отсутствуют случаи **(PPP)**, **(PPN)**.

Пусть для определенности точки z_1, z_2 – нейтральные, а точка z_3 – отталкивающая. Тогда $|z_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|z_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|z_3| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Заметим, что $|z_3| \leq |z_1| + |z_2| < \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Далее имеем: $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = 0$. Воспользовавшись равенством $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = -1$, получим: $2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_2 z_3 = -2$. Следовательно, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 2$. Если $|z_3| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ то получим:

$$2 = |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| + |z_3^2| < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2. \text{ Выявлено противоречие: } 2 < 2. \text{ Таким образом, должно выполняться равенство } |z_3| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку, $-z_3 = z_1 + z_2$. С геометрической точки зрения комплексное число $-z_3$ есть вектор, который является суммой двух векторов z_1 и z_2 . Длины данных векторов являются сторонами треугольника. Так как длина одной стороны треугольника равна сумме длин двух других его сторон, то треугольник вырождается в отрезок, и угол между z_1 и z_2 равен нулю (если бы между z_1 и z_2 угол равен 180 градусов то было бы $-z_3 = z_1 + z_2 = 0$, что невозможно). Итак, пусть $z_1 = z_0$, $z_2 = z_0$. Тогда $z_3 = -2z_0$.

Поскольку $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = -1$, то имеем: $z_0 \cdot z_0 - z_0 \cdot 2z_0 - 2z_0 \cdot z_0 = -1$. Откуда находим: $z_0^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_0^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Заметим, $\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(z + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = z^3 - z + \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Таким образом, $f(z) = z^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ и точка $z_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ параболическая неподвижная точка, а точка $z_0^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ – отталкивающая неподвижная точка. Действительно: $|f'(z_0^1)| = \left|3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right| = 1$. Таким образом, $z_0^1 = z_0^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ – параболические неподвижные точки.

Поскольку $|f'(z_0^3)| = \left|3 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right| = \left|3 \cdot \frac{4}{3}\right| = 4 > 1$, то точка $z_0^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ – отталкивающая неподвижная точка. Исходя из наших рассуждений можно указать еще одну функцию, удовлетворяющую условию **(ONN)** (см. упражнение 1). Таким образом, было показано, что функция $f(z) = z^3 + c$ при $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ имеет 2 параболические и 1 отталкивающую неподвижные точки.

Для $f(z)$ найдем значение параметра c , при котором выполняется условие **(NOO)**. не нарушая общности рассуждений будем считать, что z_2, z_3 – отталкивающие, а z_1 – параболическая неподвижные точки. В этом случае имеем:

$$|z_1| > \frac{1}{\sqrt{3}}, |z_2| > \frac{1}{\sqrt{3}}, |z_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Приведем пример, удовлетворяющий данным условиям.

Положим, что число $z_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}$ является корнем уравнения $z^3 - z + c = 0$. Тогда $c = \frac{i}{\sqrt{3}} - \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4i}{3\sqrt{3}}$ и выражение $z^3 - z + \frac{4i}{3\sqrt{3}}$ должно делиться на $z - \frac{i}{\sqrt{3}}$ без остатка. Проведя необходимые действия, получим $z^3 - z + \frac{4i}{3\sqrt{3}} = \left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(z^2 + \frac{i}{\sqrt{3}}z - \frac{4}{3}\right)$.

Корни уравнения $z_{2,3}$ находим из уравнения $z^2 + \frac{i}{\sqrt{3}}z - \frac{4}{3} =$

0. Получим: $z_{2,3} = \frac{-i \pm \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Непосредственная проверка показывает, что неподвижные точки $z_{2,3}$ – отталкивающие **(NOO)**.

В качестве самостоятельной работы студентам следует предложить выполнить следующие задачи:

1. установить, что для функции $f(z)$ наличие трех неподвижных нейтральных точек невозможно;
2. установить, что для функции $f(z)$ случай **(NPO)** невозможен.
3. установить, что для функции $f(z)$ условие **(PNN)** не выполняется.

Замечание. Множество Жюлиа для функции $f(z) = z^3 - 6$ не помещено в Таблице 2, поскольку оно сильно разряжено и значительно удалено от начала координат (однако данное множество существует и является бесконечным!).

Этап 3. Под множеством Мандельброта семейства функций $f_c(z) = z^3 + c$ (как и выше будем писать просто $f(z)$) мы будем понимать множество точек с комплексной плоскости для которых орбиты критической точки $z = 0$ для функции $f(z)$ ограничены. Множество Мандельброта является сложнейшим математическим объектом. Оно состоит из главной части и бесконечного числа ее копий меньшего размера, называемых почками (рис. 2). Будем обозначать множество Мандельброта буквой M .

Приведем алгоритм построения множества Мандельброта.

```
program pr;
uses graphabc;
var
  {i, j, k, }iterlim, height, width: integer; dx, dy, x_max, x_min,
  y_max, y_min, kef, scall: real; z, c, temp: complex; col: integer;
function f(z, c: complex): complex;
begin
  result := z*z*z+c;
end;
function distance(arg1: complex; arg2: complex): real;
begin
  result := sqrt(sqr(arg1.real - arg2.real) +
    sqr(arg1.imaginary - arg2.imaginary));
end;
begin
  width := 800; height := 800; setwindowsize(width, height); iterlim := 120;
  scall := 2;
  if (width >= height) then
  begin
    kef := width / height; x_min := scall * -kef; x_max := scall * kef;
    y_min := scall * -1; y_max := scall;
  end
  else
  begin
```

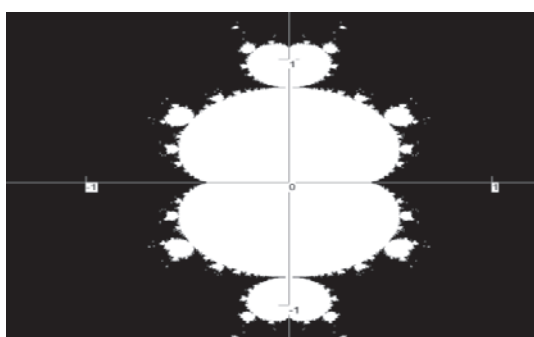
⁵ Там же.



```

kef := height / width; x_min := scall * -1; x_max := scall;
y_min := scall * -kef; y_max := scall * kef;
end;
dx := (x_max - x_min) / width; dy := (y_max - y_min) / height;
lockdrawing;
{$omp parallel for private(z, c, temp)}
for i: integer := 1 to width do
  for j: integer := 1 to height do
    begin
      c := cplx((x_min + i * dx), (y_min + j * dy));
      z := 0;
      temp := z;
      try
        for k: integer := 1 to iterlim do
          z := f(z, c);
          if (distance(z, temp) < 4) then
            setpixel(i, j, clwhite)
          else
            setpixel(i, j, clblack);
          except
            setpixel(i, j, clblack);
          end;
        end;
      end;
      unlockdrawing;
      // Оси координат
      Line(0, height div 2, width, height div 2, clGray);
      Line(width div 2, 0, width div 2, height, clGray);
      for var i := - Trunc(scall) to Trunc(scall) do
        begin
          Line(Round((i - x_min) / dx), height div 2 - 10, Round((i - x_min) / dx),
            height div 2 + 10, clGray); TextOut(Round((i - x_min) / dx),
            height div 2, i);
          Line(width div 2 - 10, Round((i - y_min) / dy), width div 2 + 10,
            Round((i - y_min) / dy), clGray);
          TextOut(width div 2, Round((i - y_min) / dy), -i);
        end;
      writeln('drawing completed in ', milliseconds / 1000, ' seconds');
      sleep(20000);
    end.

```



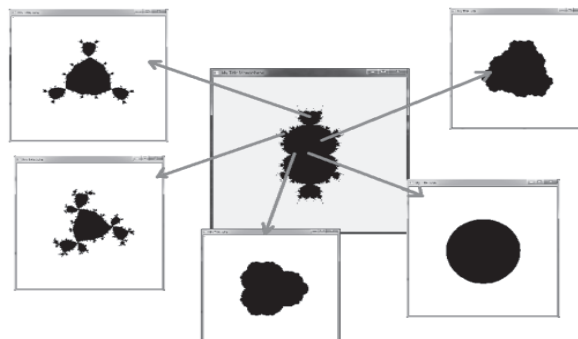
Р и с. 2. Множество Мандельброта функции $f(z) = z^3 + c$
F i g. 2. Mandelbrot set of a function $f(z) = z^3 + c$

Отметим важнейшие свойства множества Мандельброта, которые студентам следует выявить самостоятельно или с помощью используемой учебной литературы:

Множества Мандельброта являются индикаторами сопутствующих множеств.

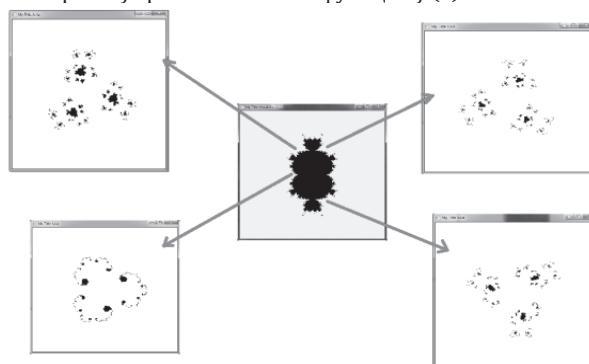
- 1) множество Мандельброта служит индикатором для двух типов множеств Жюлиа при итерировании функции $f(z) = z^3 + c$;
- 2) множество Мандельброта связно;
- 3) множество Мандельброта симметрично относительно вещественной и мнимой осей.

Учитывая компьютерные эксперименты, укажем связь множества Мандельброта с множествами Жюлиа. Пусть точка C находится внутри главной кардиоиды. Тогда при данном C , итерируя функцию $f(z) = z^3 + c$, множество Жюлиа будет деформированной окружностью. При перемещении C по черному телу множества Мандельброта заполняющее множество Жюлиа будет деформироваться (рис. 3). При выходе точки C за пределы множества Мандельброта соответствующее множество Жюлиа «взрывается», превращаясь в «пыль» (рис. 4). Именно: если мы возьмем точку c , принадлежащую множеству Жюлиа $f(z)$, то сопутствующее множество Жюлиа функции $f(z)$ при данном значении c будет связным (рис. 3) применительно к функции $f(z) = z^3 + c$.



Р и с. 3. Множество Мандельброта и сопутствующие множества Жюлиа для функции $f(z) = z^3 + c$, когда c принадлежит множеству Мандельброта
F i g. 3. The Mandelbrot set and associated Julia sets for a function $f(z) = z^3 + c$, when c belongs to the Mandelbrot set

Если же точка c не будет принадлежать множеству Мандельброта $f(z)$, то сопутствующее множество Жюлиа функции $f(z)$, при данном значении c , не будет связным (рассыплется в пыль рис. 4) применительно к функции $f(z) = z^3 + c$.



Р и с. 4. Множество Мандельброта и сопутствующие множества Жюлиа для функции $f(z) = z^3 + c$, когда c не принадлежит множеству
F i g. 4. The Mandelbrot set and associated Julia sets for a function $f(z) = z^3 + c$, when c it does not belong to the set



данном этапе мы рассмотрим обрамления первого порядка для функции $f(z)$.

Пусть $P_c(z)$ семейство полиномов комплексной переменной. Определение. Под обрамлением первого порядка множества Мандельброта полинома $P_c(z)$ будем называть такое множество M^1_c , для каждой точки c из которого полином $P_c(z)$ имеет притягивающую неподвижную точку.

Студентам полезно предложить задачу: показать, что $M^1_c \subset M$.

Найдем обрамления первого порядка для функции $f(z)$.

Доминирующей фигурой во множестве Мандельброта является множество, ограниченное линией, изображенной на рис. 4. Выведем уравнение данной линии и построим ее с помощью компьютерных средств.

Пусть z – неподвижная притягивающая точка функции $f(z) = z^3 + c$. Следуя работе⁶, получим $f'(z) = 3z^2$ и

$z^3 + c = z$. Замечаем, что граница притягивающих неподвижных точек задается равенством $|3z^2| = 1$. Поскольку $z = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{it}$

где $0 \leq t \leq 2\pi$, то $c = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{it} - \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{3it}$. Положим $c = c11 +$

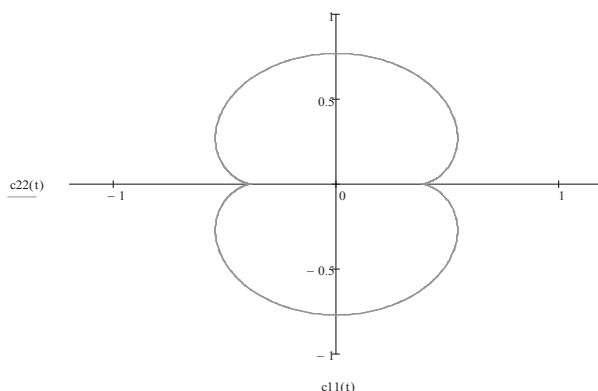
$ic22$. Тогда получим

$$c11 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cos 3t, \quad c22 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t - \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin 3t.$$

Построим обрамление первого порядка множества Мандельброта функции $f(z) = z^3 + c$ в пакете MathCad (рис. 5).

$$c11(t) := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\cos(t) - \frac{\cos(3t)}{3} \right)$$

$$c22(t) := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sin(t) - \frac{\sin(3t)}{3} \right)$$



Р и с. 5. Обрамление множества Мандельброта функции $f_3(z) = z^3 + c$
F i g. 5. Framing the Mandelbrot set of a function $f_3(z) = z^3 + c$

Заключение

В заключение отметим, что при выполнении данного ММИЗ студенты являются и математиками, и программистами при решении нестандартных задач, что характеризует интеграцию математики и информатики положительно влияет на их мотивацию к данным дисциплинам и развитие креативности.

Список использованных источников

- [1] Douady A. Julia Sets and the Mandelbrot Set // The Beauty of Fractals; ed. by. H. O. Peitgen, P. H. Richter. Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. P. 161-174. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_13
- [2] Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. Third Edition. Princeton: Princeton University Press, 2006. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7rnxn> (дата обращения: 11.03.2024).
- [3] Peitgen H. O., Richter P. H. Julia Sets and their Computergraphical Generation // The Beauty of Fractals; ed. by. H. O. Peitgen, P. H. Richter. Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. P. 27-52. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_2
- [4] Секованов В. С. О множествах Жюли некоторых рациональных функций // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2012. Т. 18, № 2. С. 23-28. EDN: PYNQJR
- [5] Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Построение фрактальных множеств с помощью L-систем и информационных технологий» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов [и др.] // CEUR Workshop Proceedings. 2016. Т. 1761. С. 204-211. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf> (дата обращения: 11.03.2024).
- [6] Visual Modeling and Fractal Methods in Science / V. S. Sekovanov [и др.] // 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Bulgaria: Varna, 2014. P. 94-98. <https://doi.org/10.1109/MCSI.2014.28>
- [7] Смирнов Е. И., Секованов В. С., Миронкин Д. П. Многоэтапные математико-информационные задачи как средство развития креативности учащихся профильных математических классов // Ярославский педагогический вестник. 2014. Т. 2, № 1. С. 124-129. EDN: RZLXNB
- [8] Секованов В. С., Смирнова А. О. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2016. Т. 22, № 3. С. 189-192. EDN: WTOYOL
- [9] Секованов В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 3. С. 185-199. EDN: YPVWJV
- [10] Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies / V. Sekovanov [и др.] // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science; ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. Cham: Springer, 2020. Vol. 1201. P. 59-68. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_4

⁶ Секованов В. С. Элементы теории дискретных динамических систем. СПб: Изд-во Лань, 2017. 180 с. EDN: ZBULNT



- [11] McCartney M., Glass D. H. Computing Feigenbaum's δ constant using the Ricker map // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2014. Vol. 45, issue 8. P. 1265-1273. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.920534>
- [12] Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Стрункина К. Ю. Изучение обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени как средство развития оригинальности мышления студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. Т. 25, № 4. С. 193-199. <https://doi.org/10.34216/2073-1426-2019-25-4-193-199>
- [13] Секованов В. С., Ивков В. А. Мотивации в изучении нелинейных отображений фрактальности и хаоса методом наглядного моделирования // Евразийское научное объединение. 2015. Т. 2, № 2. С. 302-305. EDN: TQLTYZ
- [14] Секованов В. С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // Фундаментальная и прикладная математика. 2021. Т. 23, № 4. С. 163-176. EDN: NZZRV
- [15] Секованов В. С. Гладкие множества Жюлиа // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 4. С. 133-150. URL: <https://www.mathnet.ru/links/44c77fdf5b9365ae378626d1d37a5661/fpm1751.pdf> (дата обращения: 11.03.2024).
- [16] Sekovanov V. S. Smooth Julia Sets // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. P. 202-216. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04687-3>
- [17] Секованов В. С., Салов А. Л., Самохов Е. А. О вычислении константы Фейгенбаума // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2010. Т. 6, № 1. С. 364-371. EDN: UIZHWR
- [18] Briggs K. M. A precise calculation of the Feigenbaum constants // Mathematics of Computation. 1991. Vol. 57. P. 435-439. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1991-1079009-6>
- [19] Развитие креативных качеств студентов при выполнении многоэтапного математико-информационного задания «Метод Ньютона для комплексных полиномов» / В. С. Секованов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023. Т. 19, № 1. С. 141-151. <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202301.141-151>
- [20] Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Динамика итерирования кусочно-линейных функций» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16, № 3. С. 711-720. <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202003.711-720>
- [21] Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Обрамления множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени и замечательные кривые» / Е. С. Смирнова, В. С. Секованов, Л. Б. Рыбина, Р. А. Щепин // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2024. Т. 30, № 1. С. 63-72. <https://doi.org/10.34216/2073-1426-2024-30-1-63-72>
- [22] Развитие гибкости мышления студентов при вычислении константы Фейгенбаума с помощью информационных и коммуникационных технологий / В. С. Секованов, В. А. Ивков, А. А. Пигузов, Л. Б. Рыбина // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 2. С. 415-422. <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.415-422>
- [23] Ивков В. А., Секованов В. С., Смирнов Е. И. Изучение аттракторов нелинейных отображений в рамках многоэтапных математико-информационных заданий как средство развития креативности студентов // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2018. Т. 12. С. 150-164. EDN: PAKBEA
- [24] Смирнова Е. С. Использование кейс-технологии на уроках математики и информатики с целью формирования метапредметных образовательных результатов обучающихся // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. № 2. С. 152-157. <https://doi.org/10.34216/2073-1426-2019-25-2-152-157>
- [25] Смирнова Е. С. Методические особенности введения понятия «фрактал» // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. 2016. № 4. С. 243-246. EDN: YFMLHP

Поступила 11.03.2024; одобрена после рецензирования 18.05.2024; принята к публикации 13.06.2024.

Об авторах:

Секованов Валерий Сергеевич, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий Высшей ИТ-школы, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), доктор педагогических наук, профессор, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8604-8931>**, sekovanovvs@yandex.ru

Ивков Владимир Анатольевич, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий Высшей ИТ-школы, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат экономических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1014-9381>**, ivkov_wa@mail.ru

Смирнова Елена Сафаровна, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий Высшей ИТ-школы, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат педагогических наук, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5834-6061>**, stakinaes@yandex.ru

Рыбина Лариса Борисовна, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», (156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, п. Караваево, Учебный городок, д. 34), кандидат философских наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7891-9373>**, larisa.rybina.2014@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.



References

- [1] Douady A. Julia Sets and the Mandelbrot Set. In: Peitgen H. O., Richter P. H. (eds.) The Beauty of Fractals. Berlin, Heidelberg: Springer; 1986. p. 161-174. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_13
- [2] Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. Third Edition. Princeton: Princeton University Press; 2006. 310 p. Available at: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7rnxn> (accessed 11.03.2024).
- [3] Peitgen H.O., Richter P.H. Julia Sets and their Computergraphical Generation. In: Peitgen H. O., Richter P. H. (eds.) The Beauty of Fractals. Berlin, Heidelberg: Springer; 1986. p. 27-52. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_2
- [4] Sekovanov V.S. On Julia set of some rational functions. *Vestnik of Kostroma State University*. 2012;18(2):23-28. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PYNQJR
- [5] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Fateev A.S. Execution of mathematics and information multistep task «Building a Fractal Set with L-systems and Information Technologies» as a means of creativity of students. *CEUR Workshop Proceedings*. 2016;1761:204-211. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf> (accessed 11.03.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [6] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A., Selezneva E.M., Shlyahina S.M. Visual Modeling and Fractal Methods in Science. In: 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Bulgaria: Varna; 2014. p. 94-98. <https://doi.org/10.1109/MCSI.2014.28>
- [7] Smirnov E.I., Sekovanov V.S., Mironkin D.P. Multi-stage mathematic-information tasks as a means to develop pupils' creativity in profile mathematical classes. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2014;2(1):124-129. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: RZLXHB
- [8] Sekovanov V.S., Smirnova A.O. development of students' ideation flexibility when studying structure of fixed points of polynomials of a complex variable. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2016;33(3):189-192. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: WTOYOL
- [9] Sekovanov V.S. On some discrete nonlinear dynamical systems. *Fundamental and Applied Mathematics*. 2016;21(3):185-199. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: YPVWJV
- [10] Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Seleznyova Y. Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies. In: Sukhomlin V., Zubareva E. (eds.) Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1201. Cham: Springer; 2020. p. 59-68. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_4
- [11] McCartney M., Glass D.H. Computing Feigenbaum's δ constant using the Ricker map. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2014;45(8):1265-1273. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.920534>
- [12] Sekovanov V.S., Rybina L.B., Strunkina K.Y. The study of frames of Mandelbrot sets of polynomials of the second degree as a means of developing the originality of students' thinking. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2019;25(4):193-199. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.34216/2073-1426-2019-25-4-193-199>
- [13] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. *Motivacii v izuchenii nelinejnyh otobrazhenij fraktal'nosti i haosa metodom nagljadnogo modelirovanija* [Motivation in the study of nonlinear mappings of fractality and chaos by the method of visual modeling]. *Eurasian Scientific Association*. 2015;2(2):302-305. (In Russ.) EDN: TQLTYZ
- [14] Sekovanov V.S. On Julia sets of functions having fixed parabolic points. *Fundamental and Applied Mathematics*. 2021;23(4):163-176. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: NZZZRV
- [15] Sekovanov V.S. Smooth Julia sets. *Fundamental and Applied Mathematics*. 2021;21(4):133-150. Available at: <https://www.mathnet.ru/links/44c77fd5b9365ae378626d1d37a5661/fpm1751.pdf> (accessed 11.03.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [16] Sekovanov V.S. Smooth Julia Sets. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;245:202-216. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04687-3>
- [17] Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. *O vychislenii konstanty Feigenbauma* [On the calculation of the Feigenbaum constant]. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2010;6(1):364-371. (In Russ.) EDN: UIZHWR
- [18] Briggs K.M. A precise calculation of the Feigenbaum constants. *Mathematics of Computation*. 1991;57:435-439. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1991-1079009-6>
- [19] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Rybina L.B., Shaposhnikova I.V. Development of Creative Qualities of Students When Performing a Multi-Stage Mathematical and Information Tasks "Newton's Method for Complex Polynomials". *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(1):141-151. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202301.141-151>
- [20] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Rybina L.B. Performing a Multi-Stage Mathematical and Informational Task «Dynamics of Iteration of Piecewise Linear Functions» as a Means of Developing Students' Creativity. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2020;16(3):711-720. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202003.711-720>
- [21] Sekovanov V.S., Smirnova E.S., Rybina L.B., Shchepin R.A. Performing a multi-stage mathematical information task «Framing the Mandelbrot set of families of polynomials of the third degree and remarkable curves». *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2024;30(1):63-72. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.34216/2073-1426-2024-30-1-63-72>
- [22] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Rybina L.B. Development of Thinking Flexibility of Students when Calculating the Feigenbaum Constant Using Information and Communication Technologies. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021;17(2):415-422. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.415-422>



- [23] Ivkov V.A., Sekovanov V.S., Smirnov E.I. Attractors of nonlinear mappings in the framework learning of multi-stage mathematical and information tasks as a means of students' creativity developing. *Mathematical Forum. (Results of Science. South of Russia)*. 2018;12:150-164. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PAKBEA
- [24] Smirnova Ye.S. The use of case technologies at the lessons of mathematics and informatics with the purpose of formation of metasubject educational results of pupils. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2019;(2):152-157. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.34216/2073-1426-2019-25-2-152-157>
- [25] Smirnova Ye.S. Methodical features of introducing the concept of «Fractal». *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2016;(4):243-246. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: YFMLHP

Submitted 11.03.2024; approved after reviewing 18.05.2024; accepted for publication 13.06.2024.

About the authors:

Valeriy S. Sekovanov, Professor of the Chair of Applied Mathematics and Information Technology, Higher IT School, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Dr. Sci. (Ped.), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8604-8931>**, sekovanovvs@yandex.ru

Vladimir A. Ivkov, Head of the Chair of Applied Mathematics and Information Technology, Higher IT School, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Cand. Sci. (Econ.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1014-9381>**, ivkov_wa@mail.ru

Elena S. Smirnova, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Information Technology, Higher IT School, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Cand. Sci. (Ped.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5834-6061>**, stakinaes@yandex.ru

Larisa B. Rybina, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Kostroma State Agricultural Academy (34 educational campus, Karavaevo, Kostroma region 156530, Russian Federation), Cand. Sci. (Philos.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7891-9373>**, larisa.rybina.2014@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

