

О распространении результатов по оптимальному восстановлению информации о состоянии системы по неполным и неточным данным в пространствах Киприянова

А. В. Скрыпников¹, М. В. Половинкина¹, И. П. Половинкин^{2,3*}

¹ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», г. Воронеж, Российская Федерация

Адрес: 394036, Российская Федерация, г. Воронеж, пр-т. Революции, д. 19

² ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Российская Федерация

Адрес: 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, д. 1

³ ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», г. Белгород, Российская Федерация

Адрес: 308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, д. 85

* polovinkin@yandex.ru

Аннотация

Представлены результаты, связанные с восстановлением функций в весовых пространствах по неполным спектральным данным. В связи с этим рассматривается задача восстановления сингулярного эллиптического оператора Лапласа – Бесселя и его степеней функции из преобразования Фурье – Бесселя, заданного только на некотором выпуклом множестве в пространстве двойственных изображений. Результаты работы представляют собой перенос части результатов для функций из пространств Соболева и для оператора Лапласа, которые были ранее получены Г.Г. Магарил-Ильяевым, К.Ю. Осипенко и Е.О. Сивковой к случаю сингулярного дифференциального В-эллиптического оператора Лапласа-Бесселя (термин И.А. Киприянова). Рассмотрена также задача оптимального восстановления решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности с оператором Бесселя. Приведены явные выражения для оптимального метода восстановления и его ошибок.

Ключевые слова: дробные степени оператора, оператор Лапласа-Бесселя, преобразование Фурье-Бесселя, пространство Киприянова, оптимальное восстановление, погрешность оптимального восстановления, оптимальный метод восстановления, функции Бесселя

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Скрыпников А. В., Половинкина М. В., Половинкин И. П. О распространении результатов по оптимальному восстановлению информации о состоянии системы по неполным и неточным данным в пространствах Киприянова // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2024. Т. 20, № 3. С. 545-553. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202403.545-553>

© Скрыпников А. В., Половинкина М. В., Половинкин И. П., 2024



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



On the Dissemination of Results on the Optimal Recovery of Information about the State of the System from Incomplete and Inaccurate data in the Kiprianov Spaces

A. V. Skrypnikov^a, M. V. Polovinkina^a, I. P. Polovinkin^{b,c*}

^a Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation
Address: 19 Revolution Ave., Voronezh 394036, Russian Federation

^b Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Address: 1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

^c Belgorod State National Research University, Belgorod, Russian Federation
Address: 85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation

* polovinkin@yandex.ru

Abstract

The results related to the restoration of functions in weight spaces from incomplete spectral data are presented. In this regard, the problem of reconstructing the singular elliptic Laplace – Bessel operator and its degrees of the function from the Fourier – Bessel transformation, given only on some convex set in the dual image space, is considered. The results of the paper are transferring parts of the results for functions from Sobolev spaces and for the Laplace operator that were previously obtained by G.G. Magaril-Ilyayev, K.Yu. Osipenko and E.O. Sivkova to the case of a singular differential B-elliptic Laplace-Bessel operator (I.A. Kipriyanov's term). The problem of optimal reconstruction of the solution of the Cauchy problem for the singular heat equation with the Bessel operator is also considered. Explicit expressions for the optimal recovery method and its errors are given.

Keywords: fractional powers of the operator, Laplace-Bessel operator, Fourier-Bessel transform, Kipriyanov space, optimal recovery, error of optimal recovery, optimal recovery method, Bessel functions

Conflict of interests: The authors declares no conflict of interest.

For citation: Skrypnikov A.V., Polovinkina M.V., Polovinkin I.P. On the Dissemination of Results on the Optimal Recovery of Information about the State of the System from Incomplete and Inaccurate data in the Kiprianov Spaces. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2024;20(3):545-553. <https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202403.545-553>



Введение

Теория оптимального восстановления является сравнительно молодой. В работе [1] указано, что впервые задача оптимального восстановления была поставлена С.А. Смоляком¹. Впоследствии эта проблематика интенсивно развивалась в разных направлениях² (см. [2, 3]). Основы теории оптимального восстановления и демонстрация ряда задач, которые могут быть решены с помощью этой теории, приводятся в монографии К.Ю. Осипенко³. В этой книге автор описывает использование теории в задачах восстановления значений дифференциальных операторов, интерполяции, восстановления сигналов и решений уравнений математической физики.

Методология решения задач оптимального восстановления, основанная на общих принципах теории экстремума, развивалась в работах⁴ [4, 5]. Этот подход был неоднократно использован в работах Г.Г. Магарил-Ильяева, К.Ю. Осипенко и их учеников. Работа [6] посвящена восстановлению функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Следует отметить, что задача суммирования тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье рассматривалась в учебнике В.А. Ильина и Э.Г. Позняка (издание 1967 года)⁵. В работах [1], [4], [6, 7] рассматривалась проблема восстановления функции по неточному заданному спектру. Работы [8, 9] посвящены восстановлению функций и степеней оператора Лапласа от них по значениям их преобразования Фурье, заданным на компакте с погрешностью, оцененной в L_2 метрике. Восстановлению значений оператора Лапласа в L_∞ метрике посвящена работа [10]. В работе [11] рассматривалось оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Восстановление температурных профилей по данным измерений рассматривалось в [12-14]. Более общие результаты, связанные с восстановлением однопараметрического семейства линейных непрерывных операторов, были получены в [15] (по неточным измерениям на компакте), [16] (по неточным измерениям при двух различных значениях параметра).

В перечисленных работах, как и в не вошедших в этот перечень, тесно связанных с ними публикациях, спектр понимается в смысле преобразования Фурье или разложения в ряд Фурье функций из пространств L_p . Известно, что многие факты, связанные с преобразованием Фурье, с разложением в ряд Фурье, имеют аналоги, относящиеся к преобразованию Фурье-Бесселя (Ганкеля) (см. определение в [17], [18]). Преобразование Фурье-Бесселя является удобным инструментом изучения весовых функциональных пространств, а также сингулярных дифференциальных уравнений. Огромный вклад в исследо-

вание весовых функциональных пространств и сингулярных дифференциальных уравнений внесли труды Ивана Александровича Киприянова⁶ [19] и его учеников и последователей, среди которых В.В. Катрахов, Л.Н. Ляхов, А.Б. Муравник, С.М. Ситник, В.П. Шацкий, Э.Л. Шишкина В.А. Зайцев, Ю.В. Засорин, А.А. Катрахова, А.А. Куликов⁷, [20-32] (см. также обширные обзоры литературы в этих работах) и многие другие. В процитированных публикациях отчетливо прослеживается, насколько многогранны исследования в рассматриваемой отрасли математики со времени появления классических работ Я. И. Житомирского [18] и Б.М. Левитана [17]. Столь развитый аппарат исследований, накопленный в каждом из упомянутых выше направлений – в теории оптимального восстановления и в теории сингулярных дифференциальных уравнений – вполне естественно предполагает перенесение результатов теории оптимального восстановления на объекты теории сингулярных уравнений и весовых пространств.

Целью настоящей работы является изложение результатов, полученных с помощью методов, развитых в перечисленных работах, для сингулярного дифференциального В-эллиптического (обозначение и термин И.А. Киприянова) оператора Лапласа – Бесселя. Эти результаты потребовали использования аппарата весовых пространств Киприянова, преобразования Фурье – Бесселя (см. [19-32]).

1. Необходимые предварительные сведения

Положим

$$R_+^N = \{(x', x''), x' = (x_1, \dots, x_n), x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N)\},$$

где $x_j > 0, j = 1, \dots, n$. Пусть Ω^+ – ограниченная область, прилегающая к гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+ расположенной в части пространства R_+^N и Γ_0 , принадлежащей гиперплоскостям.

Четными функциями мы будем называть функции, определенные в R_+^N , которые при четном продолжении по переменным x' не теряют гладкости. Обозначим через $S_{ev,0}^\infty$ линейное пространство четных бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в ноль вне некоторого компактного множества, суженных на пространство R_+^N . Через $S_{ev}(R_+^N)$ обозначим основной класс функций, состоящий из четных по каждой из переменных x' функций шварцевского пространства $S(R_+^N)$. Соответствующий класс распределений будем обозначать S'_{ev} .

Обозначим через L_p^Y линейное пространство функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^Y} = \left[\int_{R_+^N} |f(x)|^p (x')^Y dx \right]^{1/p}.$$

¹ Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. : МГУ, 1965.

² Traub J. F., Woźniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms. ACM Monograph Series. New York etc. : Academic Press, 1980. 341 p.

³ Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления : учебное пособие для вузов. 2-е изд., стер. Санкт-Петербург : Лань, 2024. 388 с.

⁴ Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва : Либроком, 2011. 176 с. EDN: TZOYZH

⁵ Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. 4-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1967. 446 с. (Курс высшей математики и математической физики).

⁶ Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М. : Наука, 1997. 199 с.

⁷ Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. Липецк : ЛГПУ, 2007. 232 с. EDN: QJTBVN; Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Москва : ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2019. 221 с. EDN: YGUEZW



Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$f \rightarrow (T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''),$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен по формуле

$$T_{x_i}^{y_i} : f \rightarrow (T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(p+1/2)} \times \\ \times \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}, x_{i+1}, \dots, x_N) (\sin \alpha)^{2p} d\alpha.$$

Обобщенную свертку определим формулой

$$(f * g)_\gamma(x) = \int_{R_+^N} (y')^\gamma f(y) T_x^y g(x) dy.$$

Прямое и обратное (смешанные) преобразования Фурье — Бесселя определяются, соответственно, формулами

$$F_B[\varphi](\xi) = \int_{R_+^N} \varphi(x) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{ix'' \cdot \xi''} (x')^\gamma dx,$$

$$F_B^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^n \Gamma^2(\nu_k + 1)} \times$$

$$\times \int_{R_+^N} \psi(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix'' \cdot \xi''} (\xi')^\gamma d\xi,$$

где

$$j_{\nu_k}(z_k) = \frac{2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1)}{z_k^{\nu_k}} J_{\nu_k}(z_k) = \Gamma(\nu_k + 1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z_k^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \nu_k + 1)}$$

– нормированная функция Бесселя первого рода порядка ν_k , $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν , $\nu_k = (\nu_k - 1)/2$.

В-эллиптический оператор Лапласа — Бесселя Δ_B определяется равенством

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=n+1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Мы используем подход к дробным степеням оператора Δ_B ассоциированный с применением преобразования Фурье-Бесселя. Для любого $\alpha > 0$ равенство

$$(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(x) = F_B^{-1}(|\xi|^\alpha F_B f(\xi))(x)$$

определяет степень оператора Δ_B .

Рассмотрим следующие разновидности функциональных пространств Киприянова:

$$\tilde{W}_2^\alpha(R_+^N) = \{f(\cdot) \in L_2^\gamma(R_+^N) : (-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_2^\gamma(R_+^N)\},$$

$$\tilde{W}_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N) = \{f(\cdot) \in S_{ev}(R_+^N) : (-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_2^\gamma(R_+^N), F_B[f(\cdot)] \in L_\infty^\gamma(R_+^N)\}.$$

Пусть

$$W_2^\alpha(R_+^N) = \left\{ f(\cdot) \in \tilde{W}_2^\alpha(R_+^N) : \|(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2^\gamma(R_+^N)} \leq 1 \right\},$$

$$W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N) = \left\{ f(\cdot) \in \tilde{W}_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N) : \|(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2^\gamma(R_+^N)} \leq 1 \right\}.$$

Пусть $\Omega \subset R^N$ – объединение множеств Γ_0 , Ω^+ и Ω^- , полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства

$x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Будем также предполагать далее, что область Ω выпукла. Пусть $B(\xi, r)$ – замкнутый шар с центром в точке ξ и радиусом r . Введем следующие обозначения:

$$B(\xi, r)_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \in B(\xi, r) : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}, \\ r_\Omega = \sup\{r > 0 : B(0, r) \in \Omega\}, \quad \hat{r} = \hat{r}(\alpha, \beta, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))},$$

$$\Pi = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^n \Gamma^2(\nu_k + 1).$$

2. Задача о восстановлении степени оператора Лапласа – Бесселя с первичной оценкой в L_2^γ

2.1 Постановка задачи

Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \neq 0$. Требуется восстановить $\beta/2$ -ю степень оператора Δ_B функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N)$ по следующим входным данным: известна (по результатам наблюдений) некоторая функция $g(\cdot) \in L_2^\gamma(A)$, где $A \subset R_+^N$, для которой $\|F_B f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(A)} \leq \delta$.

Положим:

$$U(\alpha, A, \delta) = \{f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N), g(\cdot) \in L_2^\gamma(A) : \|F_B f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(A)} \leq \delta\}.$$

Задача OR. Под задачей оптимального восстановления β -й степени оператора Δ_B функции $f(\cdot)$ по вышеописанной информации понимается нахождение величины

$$E((-\Delta_B)^{\alpha/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A, \delta) = \\ = \inf_m \sup_{U(\alpha, A, \delta)} \|(-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))\|_{L_2^\gamma(R_+^N)},$$

где точная нижняя грань берется по всем отображениям

$$m : L_2^\gamma(A) \rightarrow L_2^\gamma(R_+^N),$$

которые мы будем называть методами, а также и тех методов m , на которых инфимум достигается. Величину $E((-\Delta_B)^{\alpha/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A, \delta)$ будем называть погрешностью оптимального восстановления, а отображения m , на которых нижняя грань достигается – оптимальными методами восстановления.

2.2 Основные результаты

Теорема 1 [33, 34]. Пусть $A \in R_+^N$ – выпуклое множество. Если $0 \notin A$, то

$$E((-\Delta_B)^{\alpha/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A, \delta) = +\infty.$$

Теорема 2 [33, 34]. Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \subset R^N$ – выпуклая область. Пусть $0 \in \Omega$, $\delta = 0$. Тогда

$$E((-\Delta_B)^{\alpha/2}, W_2^\alpha(R_+^N), \Omega^+, 0) = r_\Omega^{\beta-\alpha}.$$

При этом метод

$$\hat{m}(F_B f(\cdot)|_{\Omega^+})(t) = \Pi^{-1} \int_{|\xi| \leq r_\Omega} \xi^\alpha |\xi|^\beta F_B f(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(t_k \xi_k) \times \\ \times \prod_{k=n+1}^N j_{\nu_k}(t_k \xi_k) e^{it_k \xi_k} dx.$$

является оптимальным.

Теорема 3 [33, 34]. Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \subset R^N$ – выпуклая область. Пусть $0 \in \Omega$, $\delta > 0$. Тогда



$$E((-\Delta_B)^{\alpha/2}, W_2^\alpha(R_+^N), \Omega^+, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\beta-\alpha)} \delta^2 \Pi^{-1} r_\Omega^{2\beta} + \left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^{(2\alpha-2\beta)}} & , \quad r_\Omega < \hat{r}, \\ (\delta^2 \Pi^{-1})^{(\alpha-\beta)/(2\alpha)} & , \quad r_\Omega \geq \hat{r}. \end{cases}$$

При этом для каждого

$$r \in \left[0; \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\beta)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\alpha-2\beta)}\right],$$

метод

$$\begin{aligned} \hat{m}(g(\cdot)|_{\Omega^+})(t) = & \Pi^{-1} \int_{|\xi| \leq r} g(\xi) |\xi|^\beta \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix'' \cdot \xi''} (\xi')^\gamma d\xi + \\ & + \Pi^{-1} \int_{r \leq |\xi| \leq r_0} g(\xi) |\xi|^\beta \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix'' \cdot \xi''} (\xi')^\gamma \times \\ & \times \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1} d\xi, \end{aligned}$$

где $r_0 = \min\{r_\Omega, \hat{r}\}$, является оптимальным.

3. Задача о восстановлении степени оператора Лапласа – Бесселя с первичной оценкой в L_∞

3.1 Постановка задачи

Снова пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \neq 0$. Мы хотим восстановить $\beta/2$ -ю степень оператора Δ_B функции $f(\cdot) \in W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N)$ по следующей информации: известна (наблюдается) некоторая функция $g(\cdot) \in L_\infty(\Omega^+)$, удовлетворяющая условию $\|F_B f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(\Omega^+)} \leq \delta$.

Пусть:

$$U(\alpha, \Omega^+, \delta) = \{f(\cdot) \in W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), g(\cdot) \in L_\infty(\Omega^+) : \|F_B f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(\Omega^+)} \leq \delta\}.$$

Задача OR_∞. Под задачей оптимального восстановления $\beta/2$ -й степени оператора Δ_B функции $f(\cdot)$ по вышеописанной информации понимается нахождение величины

$$E((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta) = \inf_m \sup_{U(\alpha, \Omega^+, \delta)} \|(-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))\|_{L_2^r(R_+^N)},$$

где точная нижняя грань берется по всем отображениям

$$m : L_\infty(\Omega^+) \rightarrow L_2^r(R_+^N),$$

которые мы будем называть методами, а также и тех методов m , на которых инфимум достигается. Величину $E((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta)$ будем называть погрешностью оптимального восстановления, а отображения m , на которых нижняя грань достигается – оптимальными методами восстановления.

3.2 Основные результаты

Пусть $\Omega \subset R^N$ – объединение множеств Γ_0 , Ω^+ и Ω^- , по-

лученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Будем также предполагать далее, что область Ω выпуклая.

Теорема 4 [35]. Пусть $\Omega^+ \subset R_+^N$ – выпуклое множество. Если $0 \notin A$, то $E((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta) = +\infty$.

Теорема 5 [35]. Пусть $0 \in \Omega$, $\delta = 0$. Тогда

$$E((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta) = r_\Omega^{\beta-\alpha}.$$

Теорема 6 [35]. Пусть $0 \in \Omega$, $\delta > 0$. Тогда верны следующие утверждения.

1. Если $r_\Omega < \hat{r}$, то

$$E((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta) =$$

$$= \left(\frac{2^{2-N-2|\gamma|} \delta^2 (\alpha - \beta) r_\Omega^{|\gamma|+N+2\beta}}{(|\gamma|+N+2\beta)(|\gamma|+N+2\alpha)\Gamma((|\gamma|+N)/2) \prod_{j=1}^n \Gamma((\gamma_j+1)/2) \pi^{(N-n)/2}} + \frac{1}{r_\Omega^{2(\alpha-\beta)}} \right)^{1/2}.$$

2. Если $r_\Omega \geq \hat{r}$, то

$$E((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta) =$$

$$\sqrt{|\gamma|+N+2\alpha} \left(\frac{\delta^2}{2^{|\gamma|+N-n-1} \Gamma((|\gamma|+N)/2) \prod_{j=1}^n \Gamma((\gamma_j+1)/2) \pi^{(N-n)/2}} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{|\gamma|+N+2\alpha}}.$$

3. Метод

$$m(g) = \Pi^{-1} \int_{B(0, r_0)} |\xi|^\beta \left(1 - \left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}\right) g(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{ix'' \cdot \xi''} (\xi')^\gamma d\xi$$

является оптимальным.

4. Восстановление решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности по данным измерений

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где $x \in R_+$, $t > 0$, $u_0(\cdot) \in L_2^r(R_+)$, B – оператор Бесселя в R_+ , определяемый формулой

$$Bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^r(R_+)$ известны в моменты времени $0 \leq t_1 < \dots < t_p$ и $\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^r(R_+)} \leq \delta_j$, $j = 1, \dots, p$,

где $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, p$. Требуется каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^r(R_+)$, которая бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры в R_+ в фиксированный момент времени t . В связи с этим, следуя [12–16], любое отображение $m : (L_2^r(R_+))^p \rightarrow L_2^r(R_+)$ мы называем методом восстановления (температуры в R_+ в момент t согласно этой информации).



Значение

$$e(\tau, \bar{\delta}, m) = \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(y_j(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^+(R_+)}$$

где $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot))$, $\bar{\delta}(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \dots, \delta_p(\cdot))$,

$$U = \left\{ (u_0(\cdot), \bar{y}(\cdot)) \in (L_2^+(R_+))^{p+1} : \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^+(R_+)} \leq \delta_j, j = 1, \dots, p \right\},$$

называется ошибкой этого метода. Значение

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \inf_{m: (L_2^+(R_+))^p \rightarrow L_2^+(R_+)} e(\tau, \bar{\delta}, m)$$

называется ошибкой оптимального восстановления. Метод $m: (L_2^+(R_+))^p \rightarrow L_2^+(R_+)$, для которого $E(\tau, \bar{\delta}) = e(\tau, \bar{\delta}, m)$, называется оптимальным методом восстановления.

Пусть $P_t: L_2^+(R_+) \rightarrow L_2^+(R_+)$ — оператор, определенный формулой

$$P_t u_0(\cdot)(x, t) = \frac{1}{2t x^\nu} \int_{R_+} \eta^{\nu+1} u_0(\eta) I_\nu \left(\frac{\eta x}{2t} \right) \exp \left(-\frac{\eta^2 + x^2}{4t} \right) d\eta,$$

где

$$I_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}$$

— модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν , $t > 0$ — фиксированное значение, P_0 — тождественный оператор. Рассмотрим на плоскости (t, y) множество

$$M = \text{co} \left\{ \left(t_j, \ln \left(\frac{1}{\delta_j} \right) \right), j = 1, \dots, p \right\} + \{(t, 0) : t \geq 0\},$$

где $\text{co } A$ означает выпуклую оболочку множества A . Введем функцию $\theta(t) = \max \{y : (t, y) \in M\}$, определенную на луче $[0, +\infty)$. Если $(t, y) \notin M$, положим $\theta(t) = -\infty$. На луче $[t_1, +\infty)$ функция $\theta(t)$ кусочно-линейна, непрерывна и выпукла вверх. Пусть $t_1 = t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_p}$ — точки излома ее графика, представляющего собой ломаную. Нетрудно видеть, что $t_1 = \{t_{s_1}, t_{s_2}, \dots, t_{s_p}\} \subseteq \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$.

Список использованных источников

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. 2003. Т. 37, вып. 3. С. 51-64. <https://doi.org/10.4213/faa157>
- [2] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A Survey of Optimal Recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory. The IBM Research Symposia Series; ed. by C. A. Micchelli, T. J. Rivlin. Boston, MA: Springer, 1977. P. 1-54. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2388-4_1
- [3] Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery // Numerical Analysis Lancaster 1984. Lecture Notes in Mathematics; ed. by P. R. Turner. Vol. 1129. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985. P. 21-93. <https://doi.org/10.1007/BFb0075157>
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. Оптимальное восстановление и теория экстремума // Доклады Академии наук. 2001. Т. 379, № 2. С. 161-164. EDN: JMNNOE
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Математический сборник. 1997. Т. 188, № 12. С. 73-106.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 3. С. 79-100. <https://doi.org/10.4213/sm637>
- [7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 59-67. <https://doi.org/10.4213/mzm9042>
- [8] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Математический сборник. 2012. Т. 203, № 4. С. 119-130. <https://doi.org/10.4213/sm7903>
- [9] Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавказский математический журнал. 2012. Т. 14, № 4. С. 63-72. EDN: PKWZDJ

Теорема 7 [36]. Для любого $\tau > 0$ равенство $E(\tau, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$ имеет место.

1. Если $0 \leq \tau < t_1$, то $\theta(\tau) = -\infty$.

2. Если $\tau < t_{s_j}$, $j = 1, \dots, p$, то метод $\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$ является оптимальным.

3. Если $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $p \geq 2$, то метод $\hat{m}$, определенный формулой

$$\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_\tau(\cdot) + (\Phi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_\tau(\cdot),$$

где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_j}(\cdot)$ — функции, образы Фурье-Бесселя которых имеют вид

$$F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 e^{-\xi^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-2\xi^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

$$\Phi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-\xi^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \delta_{s_j}^2 e^{-2\xi^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

является оптимальным.

Если $\tau > t_{s_p}$, то метод $\hat{m}$, определенный формулой

$$\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_p}} y_{s_p}(\cdot),$$

является оптимальным.

Заключение

Рассмотрены оценки в пространствах Киприянова погрешности оптимальных методов восстановления степеней оператора Лапласа – Бесселя по известному лишь на ограниченном выпуклом множестве образу Фурье – Бесселя при двух способах первичной оценки. Если начало координат не принадлежит этому множеству, задача оказывается неразрешимой. При оптимальном восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности по данным измерений в запрашиваемый момент времени существенными оказываются только два измерения в соседние моменты.



- [10] Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2013. Т. 18, № 5. С. 175-185. EDN: TWSRMB
- [11] Быск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // *Математические заметки*. 2007. Т. 81, № 6. С. 803-815. <https://doi.org/10.4213/mzm3743>
- [12] Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V. Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data // *Journal of Complexity*. 2007. Vol. 23, No. 4-6. P. 653-661. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2007.03.003>
- [13] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // *Математический сборник*. 2009. Т. 200, № 5. С. 37-54. <https://doi.org/10.4213/sm7301>
- [14] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям // *Труды МИАН*, 2021. Т. 312. С. 216-223. <https://doi.org/10.4213/tm4139>
- [15] Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте // *Владикавказский математический журнал*. 2023. Т. 25, № 2. С. 124-135. <https://doi.org/10.46698/b9762-8415-3252-n>
- [16] Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E. O. Optimal recovery of semi-group operators from inaccurate data // *Eurasian Mathematical Journal*. 2019. Vol. 10, No. 4. P. 75-84. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84>
- [17] Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // *Успехи математических наук*. 1951. Т. 6, № 2. С. 102-143. URL: <http://mi.mathnet.ru/rm6834> (дата обращения: 21.07.2024).
- [18] Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // *Математический сборник*. 1955. Т. 36(78), № 2. С. 299-310. URL: <http://mi.mathnet.ru/sm5194> (дата обращения: 21.07.2024).
- [19] Киприянов И. А. Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // *Труды МИАН СССР*. 1967. Т. 89. С. 130-213. URL: <http://mi.mathnet.ru/tm2791> (дата обращения: 21.07.2024).
- [20] Катрахова А. А. Об аппроксимации решений некоторых сингулярных эллиптических краевых задач // *Доклады Академии Наук СССР*. 1979. Т. 249, № 1. С. 34-37. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan43108> (дата обращения: 21.07.2024).
- [21] Катрахова А. А. Об одном численном методе для некоторых сингулярных краевых задач // *Дифференциальные уравнения*. 1981. Т. 17, № 5. С. 805-819. URL: <http://mi.mathnet.ru/de4249> (дата обращения: 21.07.2024).
- [22] Катрахов В. В., Катрахова А. А. Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач // *Доклады Академии Наук СССР*. 1984. Т. 279, № 4. С. 799-802.
- [23] Lyakhov L. N., Bulatov Y. N. Composition and Commutator of Singular J-Pseudodifferential Kipriyanov Operators in R_N // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 44, issue 5. P. 3438-3454. <https://doi.org/10.1134/S199508022308036X>
- [24] Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // *Математические заметки*. 2023. Т. 113, № 4. С. 517-528. <https://doi.org/10.4213/mzm13645>
- [25] Muravnik A. B. Fourier-Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations // *Functional Differential Equations*. 2001. Vol. 8, No. 3-4. P. 353-363.
- [26] Muravnik A. B. Functional Differential Parabolic Equations: Integral Transformations and Qualitative Properties of Solutions of the Cauchy Problem // *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 216. P. 345-496. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2904-0>
- [27] Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2018. Т. 64, № 2. С. 211-426. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426>
- [28] Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Series: Mathematics in Science and Engineering. 1st ed. Elsevier, Academic Press, 2020. 592 p. <https://doi.org/10.1016/C2019-0-00708-X>
- [29] Зайцев В. А. О принципе Гюйгенса для некоторых уравнений с особенностями // *Доклады Академии Наук СССР*. 1978. Т. 242, № 1. С. 28-31. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan41948> (дата обращения: 21.07.2024).
- [30] Киприянов И. А., Засорин Ю. В. О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями // *Дифференциальные уравнения*. 1992. Т. 28, № 3. С. 452-462. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de7747> (дата обращения: 21.07.2024).
- [31] Киприянов И. А., Куликов А. А. Теорема Пэли-Винера-Шварца для преобразования Фурье-Бесселя // *Доклады Академии наук СССР*. 1988. Т. 298, № 1. С. 13-17. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan7835> (дата обращения: 21.07.2024).
- [32] Шацкий В. П. О некоторых вырождающихся системах первого порядка в областях с характеристической частью границы // *Доклады Академии Наук СССР*. 1982. Т. 262, № 6. С. 1332-1335. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan45099> (дата обращения: 21.07.2024).
- [33] Половинкина М. В. О восстановлении степеней оператора по образу Фурье – Бесселя, заданному не полностью // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2019. № 4. С. 87-93. EDN: DPMUSR
- [34] Polovinkina M. V. Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier Bessel image // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41, issue 5. P. 839-852. <https://doi.org/10.1134/S1995080220050108>
- [35] Sitnik S. M., Fedorov V. E., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. On Recovery of the Singular Differential Laplace – Bessel Operator from the Fourier – Bessel Transform // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, issue 5. Article number: 1103. <https://doi.org/10.3390/math11051103>



- [36] Polovinkina M. V. Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 2023. Vol. 29, issue 2. Article number: 41. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00513-3>

Поступила 21.07.2024; одобрена после рецензирования 05.09.2024; принята к публикации 20.10.2024.

Об авторах:

Скрыпников Алексей Васильевич, заведующий кафедрой информационной безопасности, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (394036, Российская Федерация, г. Воронеж, пр-т. Революции, д. 19), доктор технических наук, доцент, профессор, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1073-9151>**

Половинкина Марина Васильевна, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» (394036, Российская Федерация, г. Воронеж, пр-т. Революции, д. 19), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7722-6927>**

Половинкин Игорь Петрович, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, д. 1); ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, д. 85), доктор физико-математических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4308-8909>**, polovinkin@yandex.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives. *Functional Analysis and Its Applications*. 2003;37(3):203-214. <https://doi.org/10.1023/A:1026084617039>
- [2] Micchelli C.A., Rivlin T.J. A Survey of Optimal Recovery. In: Micchelli C.A., Rivlin T.J. (eds.) Optimal Estimation in Approximation Theory. *The IBM Research Symposia Series*. Boston, MA: Springer; 1977. p. 1-54. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2388-4_1
- [3] Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures on optimal recovery. In: Turner P.R. (eds.) Numerical Analysis Lancaster 1984. *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1129. Berlin, Heidelberg: Springer; 1985. p. 21-93. <https://doi.org/10.1007/BFb0075157>
- [4] Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M. Optimal reconstruction and the theory of extremum. *Doklady Mathematics*. 2001;64(1):32-35. EDN: LGWXTD
- [5] Magaril-Il'yaev G. G., Tikhomirov V.M. Kolmogorov-type inequalities for derivatives. *Sbornik: Mathematics*. 1997;188(11-12):1799-1832. <https://doi.org/10.1070/sm1997v188n12abeh000274>
- [6] Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error. *Sbornik: Mathematics*. 2002;193(3):387-407. <https://doi.org/10.1070/SM2002v193n03ABEH000637>
- [7] Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. How Best to Recover a Function from Its Inaccurately Given Spectrum? *Mathematical Notes*. 2012;92(1):51-58. <https://doi.org/10.4213/mzm9042>
- [8] Magaril-Il'yaev G.G., Sivkova E.O. Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data. *Sbornik: Mathematics*. 2012;203(4):569-580. <https://doi.org/10.4213/sm7903>
- [9] Sivkova E.O. On the optimal recovery of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2012;14(4):63-72. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PKWZDJ
- [10] Sivkova E.O. Best recovery of the Laplace operator of a function and sharp inequalities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015;209(1):130-137. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2490-6>
- [11] Vysk N.D., Osipenko K.Yu. Optimal Reconstruction of the Solution of the Wave Equation from Inaccurate Initial Data. *Mathematical Notes*. 2007;81(6):723-733. <https://doi.org/10.1134/S0001434607050203>
- [12] Osipenko K.Yu., Wedenskaya E.V. Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data. *Journal of Complexity*. 2007;23(4-6):653-661. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2007.03.003>
- [13] Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data. *Sbornik: Mathematics*. 2009;200(5):665-682. <https://doi.org/10.4213/sm7301>
- [14] Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Sivkova E. O. Optimal Recovery of Pipe Temperature from Inaccurate Measurements. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2021;312:207-214. <https://doi.org/10.4213/tm4139>
- [15] Sivkova E.O. Optimal Recovery of a Family of Operators from Inaccurate Measurements on a Compact. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2023;25(2):124-135. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.46698/b9762-8415-3252-n>
- [16] Magaril-Il'yaev G.G., Sivkova E.O. Optimal recovery of semi-group operators from inaccurate data. *Eurasian Mathematical Journal*. 2019;10(4):75-84. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84>
- [17] Levitan B.M. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 1951;6(2):102-143. Available at: <http://mi.mathnet.ru/rm6834> (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)



- [18] Zhitomirskiy Ya.I. A Cauchy problem for systems of partial differential equations with Bessel-type differential operators. *Sbornik: Mathematics*. 1955;36(2):299-310. Available at: <http://mi.mathnet.ru/sm5194> (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [19] Kipriyanov I.A. Fourier-Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*. 1967;89:130-213. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tm2791> (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [20] Katrahova A.A. On approximation of solutions of some singular elliptic boundary value problems. *Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences*. 1979;249(1):34-37. Available at: <http://mi.mathnet.ru/dan43108> (accessed 21.07.2024). (In Russ.)
- [21] Katrahova A.A. A numerical method for some singular boundary value problems. *Differentsial'nye Uravneniya*. 1981;17(5):805-819. Available at: <http://mi.mathnet.ru/de4249> (accessed 21.07.2024). (In Russ.)
- [22] Katrakhov V.V., Katrahova A.A. The finite element method for some degenerate elliptic boundary value problems. *Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences*. 1984;279(4):799-802. (In Russ.)
- [23] Lyakhov L.N., Bulatov Y.N. Composition and Commutator of Singular J -Pseudodifferential Kipriyanov Operators in R_N . *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(5):3438-3454. <https://doi.org/10.1134/S199508022308036X>
- [24] Lyakhov L.N., Sanina E.L. Differential and Integral Operations in Hidden Spherical Symmetry and the Dimension of the Koch Curve. *Mathematical Notes*. 2023;113:502-511. <https://doi.org/10.1134/S0001434623030227>
- [25] Muravnik A.B. Fourier-Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations. *Functional Differential Equations*. 2001;8(3-4):353-363.
- [26] Muravnik A.B. Functional Differential Parabolic Equations: Integral Transformations and Qualitative Properties of Solutions of the Cauchy Problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016;216:345-496. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2904-0>
- [27] Katrakhov V.V., Sitnik S.M. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 2018;64(2):211-426. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426>
- [28] Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Series: Mathematics in Science and Engineering. 1st ed. Elsevier, Academic Press; 2020. 592 p.
- [29] Zaitsev V.A. On Huygens principle for some equations with singularities. *Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences*. 1978;242(1):28-31. Available at: <http://mi.mathnet.ru/dan41948> sm5194 (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [30] Kipriyanov I.A., Zasorin Yu. V. Fundamental solution of the wave equation with several singularities and the Huygens principle. *Differentsial'nye Uravneniya*. 1992; 28(3): 452-462. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de7747> (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [31] Kulikov A.A., Kipriyanov I.A. The Fourier-Bessel transformation in the theory of singular differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*. 1999;35(3):340-350. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan7835> (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [32] Shatskii V.P. On some first order degenerate systems in domains with characteristic part of the boundary. *Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences*. 1982;262(6):1332-1335. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan45099> (accessed 21.07.2024). (In Russ., abstract in Eng.)
- [33] Polovinkina M.V. On recovery of powers of the operator from its incomplete Fourier-Bessel image. *Proceeding of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2019;4:87-93. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: DPMUSR
- [34] Polovinkina M.V. Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier Bessel image. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41(5):839-852. <https://doi.org/10.1134/S1995080220050108>
- [35] Sitnik S.M., Fedorov V.E., Polovinkina M.V., Polovinkin I.P. On Recovery of the Singular Differential Laplace – Bessel Operator from the Fourier – Bessel Transform. *Mathematics*. 2023;11(5):1103. <https://doi.org/10.3390/math11051103>
- [36] Polovinkina M.V. Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 2023;29(2):41. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00513-3>

Submitted 21.07.2024; approved after reviewing 05.09.2024; accepted for publication 20.10.2024.

About the authors:

Alexey V. Skrypnikov, Head of the Chair of Information Security, Voronezh State University of Engineering Technologies (19 Revolution Ave., Voronezh 394036, Russian Federation), Dr. Sci. (Tech.), Associate Professor, Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1073-9151>**

Marina V. Polovinkina, Head of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies (19 Revolution Ave., Voronezh 394036, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7722-6927>**

Igor P. Polovinkin, Professor of the Chair of Mathematical and Applied Analysis, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University (1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation); Belgorod State National Research University (85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4308-8909>**, polovinkin@yandex.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

