https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202403.645-655
УДК 658.58:519.216

Оригинальная статья

Применение методов стохастического моделирования для оптимизации процессов ТОИР: системный подход

А. В. Леонов, В. И. Мунерман*
ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет», г. Смоленск, Российская Федерация
Адрес: 214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4
* vimoon@gmail.com

Аннотация
В работе представлен системный подход к оптимизации процессов технического обслуживания и ремонта сложных технических систем на основе методов стохастического моделирования. Разработана расширенная стохастическая модель деградации оборудования, учитывающая многофакторность воздействий и нелинейный характер износа. Модель основана на стохастических дифференциальных уравнениях с пуассоновской составляющей, описывающих непрерывные и скачкообразные изменения состояния системы. Сформулирована многокритериальная задача оптимизации технического обслуживания и предложен адаптивный метод её решения на основе стохастического динамического программирования. Разработан алгоритм расчета остаточной погрешности прогнозирования с использованием методов статистического анализа. Представлен многомасштабный подход к моделированию процессов деградации, учитывающий различные временные и пространственные масштабы. Предложена стратегия оптимального управления с обратной связью на основе уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и методов стохастической фильтрации для оценивания состояния системы. Рассмотрена задача оптимизации периодичности и объема обслуживания с учетом вероятностных ограничений. Предложены методы анализа чувствительности и обеспечения робастности решений. Предложенный подход обеспечивает повышение эффективности управления жизненным циклом оборудования в условиях стохастичности воздействий.

Ключевые слова: техническое обслуживание и ремонт, стохастическое моделирование, многокритериальная оптимизация, стохастическое динамическое программирование, стохастические дифференциальные уравнения, анализ чувствительности, робастное управление, многомасштабное моделирование, стохастическая фильтрация, оптимальное управление с обратной связью

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Леонов А. В., Мунерман В. И. Применение методов стохастического моделирования для оптимизации процессов ТОИР: системный подход // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2024. Т. 20, № 3. С. 645-655. https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202403.645-655

© Леонов А. В., Мунерман В. И., 2024

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

Original article

Application of Stochastic Modeling Methods for Optimization of Maintenance and Repair Processes: a Systematic Approach

A. V. Leonov, V. I. Munerman*
Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
Address: 4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation
* vimoon@gmail.com

Abstract
The paper presents a systematic approach to optimizing maintenance and repair processes of complex technical systems based on stochastic modeling methods. An extended stochastic model of equipment degradation has been developed, considering multiple factors and nonlinear wear patterns. The model is based on stochastic differential equations with a Poisson component, describing continuous and discontinuous changes in system state. A multi-criteria maintenance optimization problem is formulated, and an adaptive solution method based on stochastic dynamic programming is proposed. An algorithm for calculating residual prediction error using statistical analysis methods is developed. A multi-scale approach to modeling degradation processes is presented, considering various temporal and spatial scales. A feedback optimal control strategy based on the Hamilton-Jacobi-Bellman equation and stochastic filtering methods for system state estimation is proposed. The problem of optimizing maintenance frequency and scope considering probabilistic constraints is examined. Methods for sensitivity analysis and solution robustness are proposed. The proposed approach provides increased efficiency in equipment lifecycle management under stochastic impacts.

Keywords: maintenance and repair, stochastic modeling, multi-criteria optimization, stochastic dynamic programming, stochastic differential equations, sensitivity analysis, robust control, multi-scale modeling, stochastic filtering, optimal feedback control

Conflict of interests: The authors declares no conflict of interest.

For citation: Leonov A.V., Munerman V.I. Application of Stochastic Modeling Methods for Optimization of Maintenance and Repair Processes: a Systematic Approach. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2024;20(3):645-655. https://doi.org/10.25559/SITITO.020.202403.645-655

Введение

Оптимизация процессов технического обслуживания и ремонта (ТОИР) комплекса технологического оборудования в условиях стохастической природы деградации, многофакторности воздействий и нелинейного характера износа представляет собой фундаментальную проблему современной теории управления [1].

Данная задача имеет первостепенное значение для повышения эффективности эксплуатации сложных технических систем в различных отраслях промышленности. Актуальность проблемы обусловлена необходимостью минимизации затрат на обслуживание и ремонт при одновременном обеспечении высокой надежности и производительности оборудования. Решение поставленной задачи требует разработки новых математических моделей и методов, способных адекватно описать сложные процессы деградации оборудования с учетом их стохастической природы и нелинейного характера [2]. Разработка таких моделей и методов открывает новые возможности для оптимизации стратегий ТОИР и повышения эффективности управления жизненным циклом оборудования. Традиционные детерминированные подходы, основанные на линейных моделях износа и упрощенных предположениях о характере отказов, не обеспечивают адекватного учета неопределенности и вариабельности процессов деградации, что приводит к субоптимальным решениям [3].

Ограниченность детерминированных подходов проявляется в нескольких аспектах. Во-первых, отсутствует возможность учета случайных флуктуаций параметров системы, которые могут существенно влиять на процесс деградации. Во-вторых, линейные модели износа не отражают сложный характер взаимодействия между различными факторами, влияющими на состояние оборудования. Упрощенные предположения о характере отказов, часто используемые в детерминированных моделях, не позволяют адекватно описать реальные процессы деградации, которые могут иметь более сложную природу [4]. Следствием является неточность прогнозов остаточного ресурса оборудования и, как результат, формирование неоптимальных стратегий ТОИР [5].

Стохастическая природа процессов деградации обусловлена множеством факторов, включая случайные флуктуации параметров системы, неопределенность внешних воздействий и сложные нелинейные взаимодействия между компонентами оборудования. Случайные флуктуации параметров системы возникают вследствие микроскопических процессов, происходящих в материалах, из которых изготовлено оборудование. Процессы усталостного разрушения, коррозии или изнашивания имеют стохастический характер на микроуровне, что приводит к случайным изменениям макроскопических характеристик системы [6]. Неопределенность внешних воздействий связана с изменчивостью условий эксплуатации оборудования. Факторы, такие как температура, влажность, вибрации, нагрузки, имеют случайный характер и оказывают существенное влияние на процесс деградации. Учет данной неопределенности требует использования вероятностных моделей и методов стохастического анализа [7]. Сложные нелинейные взаимодействия между компонентами оборудования приводят к эффектам, которые затруднительно предсказать на основе детерминированных моделей. Взаимное влияние различных механизмов деградации, такие как синергетический эффект между усталостным разрушением и коррозией, требует использования нелинейных стохастических моделей для адекватного описания [8].

Рассматриваемые процессы могут быть выражены через введение случайных процессов в модели деградации, например, в виде:

$$dX(t) = f(X(t),t)dt + g(X(t),t)dW(t),$$

где $X(t)$ – вектор состояния системы, $f(X(t),t)$ – детерминированная составляющая, $g(X(t),t)$ – функция диффузии, а $W(t)$ – винеровский процесс.

Данное стохастическое дифференциальное уравнение представляет собой обобщение детерминированных моделей деградации [9]. Детерминированная составляющая $f(X(t),t)$ описывает средний тренд изменения состояния системы и может включать как линейные, так и нелинейные члены, отражающие сложные зависимости между различными параметрами. Функция диффузии $g(X(t),t)$ характеризует интенсивность случайных флуктуаций и может зависеть от текущего состояния системы и времени. Данный подход позволяет учесть изменение характера случайных воздействий в процессе деградации оборудования. Интенсивность флуктуаций может увеличиваться по мере износа оборудования. Винеровский процесс $W(t)$ представляет собой математическую модель броуновского движения и является фундаментальным строительным блоком для описания непрерывных случайных процессов. Его использование позволяет учесть накопление случайных воздействий во времени и моделировать диффузионный характер процессов деградации.

Многофакторность воздействий проявляется в зависимости скорости деградации от множества параметров, как внутренних (режимы работы, нагрузки), так и внешних (температура, влажность, вибрации).

Внутренние факторы, такие как режимы работы и нагрузки, определяются условиями эксплуатации оборудования и могут существенно влиять на скорость деградации. Работа оборудования в режиме перегрузки может ускорить процессы износа и усталостного разрушения. Учет данных факторов требует детального анализа рабочих циклов оборудования и построения моделей, связывающих режимы работы с процессами деградации.

Внешние факторы, такие как температура, влажность и вибрации, отражают влияние окружающей среды на процессы деградации. Их воздействие может быть как прямым (ускорение коррозионных процессов при повышенной влажности), так и косвенным (изменение механических свойств материалов при изменении температуры). Учет данных факторов требует построения комплексных моделей, описывающих взаимодействие оборудования с окружающей средой.

Взаимодействие между различными факторами имеет сложный, нелинейный характер. Совместное воздействие повышенной температуры и механических нагрузок может приводить к ускоренной деградации, которая не может быть предсказана на основе простой суперпозиции отдельных эффектов. Разработка многофакторных моделей, учитывающих синергетические эффекты и взаимное влияние различных механизмов деградации, является необходимым условием адекватного описания процессов износа.

Рассмотрение многомерных стохастических процессов и учет корреляций между различными факторами представляет собой неотъемлемый аспект анализа сложных технических систем.

Использование многомерных стохастических процессов позволяет одновременно моделировать изменение нескольких параметров состояния оборудования и внешних факторов. Данный подход приобретает особую значимость при анализе сложных технических систем, где деградация может происходить по нескольким механизмам одновременно.

Учет корреляций между различными факторами необходим для адекватного описания их взаимного влияния. Корреляция между температурой и влажностью может существенно влиять на процессы коррозии. Математически данный аспект может быть выражен через использование многомерных распределений вероятностей и корреляционных матриц.

Анализ многомерных стохастических процессов требует применения специализированных математических методов, таких как теория случайных полей и многомерный стохастический анализ. Данные методы позволяют исследовать сложные пространственно-временные структуры процессов деградации и их зависимость от множества факторов.

Формальное представление рассматриваемых процессов может быть осуществлено через расширение вектора состояния системы и введение многомерных случайных процессов:

$$dX(t) = f(X(t), \theta(t), t)dt + g(X(t), \theta(t), t)dW(t),$$

где $\theta(t)$ – вектор внешних факторов, а $W(t)$ – многомерный винеровский процесс.

Расширение вектора состояния системы *X(t)* позволяет включить в модель не только параметры, непосредственно характеризующие состояние оборудования, но и дополнительные переменные, описывающие накопление повреждений, изменение свойств материалов и другие важные аспекты процесса деградации.

Вектор внешних факторов $\theta(t)$ может включать как детерминированные, так и случайные компоненты. Детерминированные компоненты описывают плановые изменения режимов работы или известные циклические воздействия. Случайные компоненты отражают неопределенность внешних условий и моделируются как стохастические процессы.

Использование многомерного винеровского процесса $W(t)$ обеспечивает учет взаимных корреляций между различными случайными воздействиями. Ковариационная структура данного процесса задается таким образом, чтобы отразить сложные взаимосвязи между различными факторами, влияющими на процесс деградации.

Расширенная стохастическая модель деградации оборудования

Рассмотрим расширенную стохастическую модель деградации оборудования, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей:

$$dX(t) = \mu\big(X(t), t, \theta(t)\big)dt + \sigma\big(X(t), t, \theta(t)\big)dW(t) + J(X(t), t)dN(t), \quad (1)$$

где $X(t) \in R^n$ – вектор состояния оборудования, $\theta(t) \in R^m$ – вектор внешних факторов, $\mu: R^n \times R \times R^m \to R^n$ – функция дрейфа, $\sigma: R^n \times R \times R^m \to R^{n \times k}$ – функция диффузии, $J: R^n \times R \to R^n$ – функция скачкообразных изменений, *W(t)* – *k*-мерный винеровский процесс, *N(t)* – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t)$.

Данная модель представляет собой обобщение классических моделей деградации и позволяет учесть сложные нелинейные взаимодействия между различными факторами, влияющими на состояние оборудования.

Введение пуассоновской составляющей позволяет моделировать внезапные изменения состояния системы, такие как частичные отказы или скачкообразные восстановления после ремонтных воздействий. Данный подход расширяет возможности модели в описании реальных процессов деградации, которые могут включать как непрерывные, так и дискретные изменения состояния.

Функция дрейфа $\mu(X(t), t, \theta(t))$ описывает детерминированную составляющую процесса деградации и может быть представлена в виде:

$$\mu\big(X(t), t, \theta(t)\big) = A(t)X(t) + B(t)\theta(t) + C(t), \quad (2)$$

где $A(t) \in R^{n \times n}, B(t) \in R^{n \times m}, C(t) \in R^n$ - матрицы и вектор, зависящие от времени.

Матрица $A(t)$ характеризует взаимное влияние компонентов системы и может отражать процессы старения, износа или деградации. Элементы этой матрицы могут быть как постоянными, так и зависящими от времени, что позволяет учесть изменение характера взаимодействий в процессе эксплуатации оборудования.

Матрица $B(t)$ описывает чувствительность системы к внешним факторам. Её элементы определяют степень влияния каждого из факторов на соответствующие компоненты вектора состояния. Временная зависимость $B(t)$ позволяет учесть изменение чувствительности системы к внешним воздействиям в процессе деградации.

Вектор $C(t)$ представляет собой свободный член, который может отражать автономную динамику системы, не зависящую от текущего состояния и внешних факторов. Его наличие позволяет моделировать постоянные или медленно меняющиеся тренды в процессе деградации.

Функция диффузии $\sigma(X(t), t, \theta(t))$ характеризует случайные флуктуации в процессе деградации и может быть задана как:

$$\sigma\big(X(t), t, \theta(t)\big) = D(t)X(t) + E(t)\theta(t) + F(t), \quad (3)$$

где $D(t) \in R^{\{n \times n \times k\}}, E(t) \in R^{\{n \times m \times k\}}, F(t) \in R^{\{n \times k\}}$ – тензоры и матрица, зависящие от времени.

Тензор $D(t)$ описывает зависимость интенсивности случайных флуктуаций от текущего состояния системы. Его структура позволяет учесть различные механизмы стохастических воздействий, которые могут усиливаться или ослабевать в зависимости от состояния оборудования.

Тензор $E(t)$ характеризует влияние внешних факторов на интенсивность случайных флуктуаций. Данный компонент модели позволяет учесть, например, увеличение разброса параметров системы при экстремальных значениях внешних воздействий.

Матрица $F(t)$ представляет аддитивную составляющую случайных флуктуаций, которая может быть связана с внутренними источниками шума в системе или неучтенными факторами внешней среды.

Функция скачкообразных изменений $J(X(t), t)$ моделирует внезапные изменения состояния оборудования, такие как частичные отказы или восстановления:

$$J(X(t), t) = G(t)X(t) + H(t), \quad (4)$$

где $G(t) \in R^{\{n \times n\}}, H(t) \in R^n$ – матрица и вектор, зависящие от времени.

Матрица $G(t)$ определяет характер скачкообразных изменений в зависимости от текущего состояния системы. Её структура позволяет моделировать различные сценарии внезапных изменений, включая частичные отказы отдельных компонентов или комплексные изменения состояния всей системы.

Вектор $H(t)$ представляет постоянную составляющую скачкообразных изменений, которая может отражать, например, эффекты плановых ремонтных воздействий или замены компонентов оборудования.

Для идентификации функций μ, σ и J предлагается использовать методы статистического анализа, включая методы максимального правдоподобия и байесовского вывода. Процедура идентификации включает следующие этапы:

1. Сбор и предварительная обработка данных о состоянии оборудования и внешних факторах.

Данный этап предполагает формирование репрезентативной выборки измерений, охватывающей различные режимы работы оборудования и условия эксплуатации. Предварительная обработка может включать фильтрацию шумов, нормализацию данных и выявление аномальных наблюдений.

2. Выбор структуры моделей для функций μ, σ и J.

На этом этапе определяется общий вид функций, исходя из физических соображений и предварительного анализа данных. Выбор может включать определение порядка полиномиальных аппроксимаций, использование специальных функций или нелинейных форм, отражающих известные закономерности процессов деградации.

3. Оценка параметров моделей с использованием методов максимального правдоподобия или байесовского вывода.

Метод максимального правдоподобия основан на максимизации функции правдоподобия:

$$J(X(t),t) = G(t)X(t) + H(t),$$

$$L(\theta;\, X) = p(X \mid \theta) = \prod_{i=1}^{N} p(X(t\_i) \mid X(t\_\{i-1\}),\theta),$$

где θ – вектор параметров модели, $X = \{X(t\_1),\dots,X(t\_N)\}$ – наблюдаемые данные, а $p(X(t\_i) \mid X(t\_\{i-1\}),\theta)$ – плотность вероятности перехода из состояния X(t_{i-1}) в состояние X(t_i).

Логарифмическая функция правдоподобия принимает вид:

$$l(\theta;\, X) = log\, L(\theta;\, X) = \sum_{i=1}^{N} log\, p(X(t\_i) \mid X(t\_\{i-1\}),\theta).$$

Оценка максимального правдоподобия θ находится путем максимизации $l(\theta;\, X)$:

$$\theta = argmax\_\theta\, l(\theta;\, X).$$

Для решения данной задачи оптимизации применяются численные методы, такие как градиентный спуск, метод Ньютона-Рафсона или алгоритмы квазиньютоновской оптимизации. Выбор конкретного метода зависит от структуры модели и свойств функции правдоподобия.

В случае использования байесовского подхода, оценка параметров основывается на вычислении апостериорного распределения:

$$p(\theta \mid X) \propto p(X \mid \theta)p(\theta),$$

где $p(\theta)$ – априорное распределение параметров, отражающее предварительные знания о системе.

Для вычисления апостериорного распределения могут применяться методы Монте-Карло по схеме марковских цепей (MCMC) или вариационные методы байесовского вывода.

4. Валидация моделей на тестовых данных и оценка их прогностической способности.

На данном этапе производится оценка качества полученных моделей путем сравнения их предсказаний с реальными данными, не использованными при обучении. Применяются различные метрики качества, такие как среднеквадратичная ошибка, коэффициент детерминации, информационные критерии (AIC, BIC).

Оценка прогностической способности модели может включать анализ распределения ошибок прогноза, исследование устойчивости прогнозов к вариациям входных данных, а также оценку доверительных интервалов прогнозов.

Многокритериальная задача оптимизации ТОИР

Формулируется многокритериальная задача оптимизации ТОИР:

$$min\, E[\int_0^T (w_1C_1(X(t),u(t),t) + w_2C_2(X(t),u(t),t))dt + \Phi(X(T))], \tag{5}$$

при ограничениях:

$$dX(t) = f(X(t),u(t),t,\theta(t))dt + g(X(t),u(t),t,\theta(t))dW(t) + J(X(t),t)dN(t), \tag{6}$$

$$h_1(X(t),u(t),t) \le 0, \tag{7}$$

$$h_2(E[X(t)],u(t),t) \le 0, \tag{8}$$

где C_1, C_2: $R\^n \times R\^p \times R \to R$ – компоненты целевой функции, $w_1, w_2 \in R^+$ – весовые коэффициенты, $u(t) \in R\^p$ – вектор управляющих воздействий, Φ: $R\^n \to R$ – терминальная функция стоимости, f, g – обобщенные функции дрейфа и диффузии, h_1, h_2 – функции ограничений.

Данная формулировка представляет собой стохастическую задачу оптимального управления с ограничениями и многокритериальной целевой функцией. Интеграл в целевой функции отражает суммарные затраты на эксплуатацию и обслуживание оборудования за период [0, T], а терминальная функция $\Phi(X(T))$ учитывает состояние системы в конечный момент времени.

Уравнение (6) описывает стохастическую динамику системы с учетом управляющих воздействий u(t). Функции f и g обобщают ранее введенные функции μ и σ, включая зависимость от управления.

Ограничения (7) и (8) отражают технологические и эксплуатационные требования к системе. Важно отметить, что ограничение (8) наложено на математическое ожидание состояния системы, что характерно для задач стохастического программирования.

Компоненты целевой функции C_1 и C_2 могут представлять различные аспекты оптимизации, например:

$$C^1(X(t),u(t),t) = a^{1T}X(t) + b^{1T}u(t), \tag{9}$$

$$C^2(X(t),u(t),t) = \left(X(t) - X_{ref(t)}\right)^T Q(t)\left(X(t) - X_{ref(t)}\right) + u(t)^T R(t)u(t), \tag{10}$$

где a_1, b_1 – векторы коэффициентов, $X\_ref(t)$ – целевое состояние оборудования, Q(t), R(t) – положительно определенные матрицы весов.

Функция C_1 может интерпретироваться как линейная аппроксимация затрат на эксплуатацию и обслуживание, зависящих от текущего состояния системы и интенсивности управляющих воздействий.

Функция C_2 имеет квадратичную форму и отражает отклонение текущего состояния от целевого, а также «энергетические» затраты на управление. Матрицы $Q(t)$ и $R(t)$ позволяют задать относительные веса различных компонентов состояния и управления.

Адаптивный метод решения задачи оптимизации

Для решения задачи (5)-(8) предлагается адаптивный метод на основе стохастического динамического программирования. Вводится обобщенная функция ценности:

$$V(x,t,\theta) = \min E[\int^{tT}(w_1C_1(X(s),u(s),s) + w_2C_2(X(s),u(s),s))ds + \Phi(X(T)) \mid X(t) = x, \theta(t) = \theta], (11)$$

удовлетворяющая уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ):

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min\left[w^1C^1(x,u,t) + w^2C^2(x,u,t) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x,u,t,\theta) + \frac{1}{2}tr\left(g(x,u,t,\theta)g(x,u,t,\theta)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\right) + \int\left(V(x + J(x,t),t,\theta) - V(x,t,\theta)\right)\lambda(t)dt\right], \quad (12)$$

с граничным условием $V(x,T,\theta) = \Phi(x)$.

Уравнение (12) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Его решение дает оптимальную функцию ценности $V(x,t,\theta)$, на основе которой может быть построено оптимальное управление $u*(x,t,\theta)$.

Член $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x,u,t,\theta)$ в уравнении (12) отражает влияние детерминированной составляющей динамики системы на функцию ценности.

Оператор $tr\left(g(x,u,t,\theta)g(x,u,t,\theta)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\right)$ учитывает вклад стохастической составляющей и связан с дифференциальным оператором второго порядка в уравнении Колмогорова-Фоккера-Планка.

Интегральный член $\int\left(V(x + J(x,t),t,\theta) - V(x,t,\theta)\right)\lambda(t)dt$ описывает влияние скачкообразных изменений состояния системы на функцию ценности. Этот член имеет нелокальный характер и усложняет численное решение уравнения.

Для численного решения уравнения (12) разрабатывается итерационный алгоритм, основанный на методе последовательных приближений:

1. Инициализация: $V^0(x,t,\theta) = \Phi(x)$
2. Итерация k $(k = 0,1,2,\dots)$:

a. Решение уравнения ГЯБ для получения $V_{k+1}(x,t,\theta)$:

$$V_{k+1}(x,t,\theta) = min\,E[\int^{tt+\delta t}(w_1C_1 + w_2C_2)ds + V_k(X(t+\delta t),t + \delta t,\theta(t+\delta t)) \mid X(t) = x, \theta(t) = \theta]$$

b. Вычисление оптимального управления:

$$u*_k{}^{+1}(x,t,\theta) = argmin\left[w^1C^1(x,u,t) + w^2C^2(x,u,t) + \left(\frac{\partial V_k{}^{+1}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x,u,t,\theta) + \frac{1}{2}tr\left(g(x,u,t,\theta)g(x,u,t,\theta)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial^2 V_k{}^{+1}}{\partial x^2}\right)\right) + \int\left(V_k{}^{+1}(x + J(x,t),t,\theta) - V_k{}^{+1}(x,t,\theta)\right)\lambda(t)dt\right]$$

c. Проверка сходимости: если $||V_{k+1} - V_k|| < \varepsilon$, то завершить; иначе $k = k + 1$ и перейти к шагу a.

3. Формирование оптимальной стратегии ТОИР на основе $u*(x,t,\theta)$.

Шаг 2a алгоритма требует решения задачи условной оптимизации на каждой итерации. Для этого могут быть использованы методы нелинейного программирования, такие как метод множителей Лагранжа или методы последовательного квадратичного программирования.

Шаг 2b связан с решением задачи минимизации функционала, зависящего от управления u. В зависимости от структуры функций C_1, C_2, f и g, эта задача может быть решена аналитически (для линейно-квадратичных задач) или численно (в общем случае).

Сходимость алгоритма зависит от свойств оператора, определяемого правой частью уравнения (12). В общем случае доказательство сходимости требует анализа свойств сжимаемости этого оператора в соответствующих функциональных пространствах.

Для ускорения вычислений предлагается использовать методы аппроксимации функции ценности, такие как разложение по базисным функциям или методы интерполяции. Пусть $\{\phi_i(x,t,\theta)\}_{i=1}{}^N$ – набор базисных функций. Тогда аппроксимация функции ценности может быть представлена в виде:

$$V(x,t,\theta) \approx \sum_{i=1}{}^N \alpha_i\,\phi_i(x,t,\theta),$$

где α_i – коэффициенты разложения. Задача сводится к определению оптимальных значений коэффициентов α_i, что существенно уменьшает размерность задачи оптимизации.

Анализ чувствительности и робастность решения

Для оценки влияния различных параметров модели на результаты оптимизации ТОИР предлагается использовать глобальный анализ чувствительности на основе метода Соболя. Индексы чувствительности первого порядка S_i и полные индексы чувствительности S_T_i вычисляются по формулам:

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}, \quad (13)$$

$$S_{T_i} = 1 - \frac{V_{\sim i}}{V(Y)}, \quad (14)$$

где $V(Y)$ – полная дисперсия выходной величины Y, V_i - вклад -го параметра в дисперсию $Y, V_{\sim i}$ – дисперсия Y при фиксированном i-м параметре.

Вычисление индексов Соболя требует многократного решения задачи оптимизации при различных значениях параметров модели. Для эффективной реализации данного подхода предлагается использовать метод квази Монте-Карло с последовательностями малого расхождения, такими как последовательности Соболя или Холтона.

Анализ чувствительности позволяет выявить наиболее значимые факторы, влияющие на оптимальные стратегии ТОИР, и сконцентрировать усилия на уточнении соответствующих компонентов модели.

Для обеспечения робастности полученного решения предлагается рассмотреть минимаксную формулировку задачи оптимизации:

$$min\_u\;max\_\theta\;E[\int_0{}^{\mathrm{T}}(w_1C_1(X(t),u(t),t) + w_2C_2(X(t),u(t),t))dt + \Phi(X(T))], \quad (15)$$

где максимизация производится по множеству возможных реализаций вектора внешних факторов $\theta(t)$.

Решение задачи (15) обеспечивает наилучшую производительность в наихудшем случае реализации неопределенностей. Для численного решения данной задачи может быть использован метод итеративной линеаризации с последовательным решением задач линейного программирования.

Численные методы

Метод конечных разностей

Для численного решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (12) применяется метод конечных разностей с явной схемой по времени и центральными разностями по пространственным переменным. Дискретизированное уравнение имеет вид:

$$\left(V_i^{\{n+1\}} - V_i^n\right)\Delta t = \min_u \Big[w^1 C^1(x_i, u, t_n) + w^2 C^2(x_i, u, t_n) + \left(V_{\{i+1\}}^n - V_{\{i-1\}}^n\right)(2\Delta x) \cdot f(x_i, u, t_n, \theta_n) + \frac{1}{2} \cdot \left(V_{\{i+1\}}^n - 2V_i^n + V_{\{i-1\}}^n\right)(\Delta x)^2 \cdot g^2(x_i, u, t_n, \theta_n) + \lambda(t_n) \cdot \left(V^{n(x_i + J(x_i, t_n), t_n, \theta_n)} - V_i^n\right)\Big], \quad (16)$$

где $V_i^n \approx V(x_i, t_n, \theta_n), \Delta t$ – шаг по времени, Δx – шаг по пространству.

Устойчивость данной схемы обеспечивается при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви: $\Delta t \le (\Delta x)^2 / (2\, max(g^2))$, где $max(g^2)$ – максимальное значение квадрата функции диффузии на рассматриваемой области.
Для повышения точности и устойчивости схемы могут быть использованы неявные или полунеявные схемы, такие как схема Кранка-Николсона или схема переменных направлений.

Метод Монте-Карло

Для оценки математического ожидания в уравнении (11) применяется метод Монте-Карло. Функция ценности аппроксимируется как:

$$V(x, t, \theta) \approx \frac{1}{M} \cdot \sum\nolimits_{\mathrm{i}}^{=1\mathrm{M}} \left[\int^{\mathrm{tT}} \left(w^1 C^1\left(X_{i(s)}, u_{i(s)}, s\right) + w^2 C^2\left(X_{i(s)}, u_{i(s)}, s\right)\right) ds + \Phi\left(X_{i(T)}\right)\right], \quad (17)$$

где M – число реализаций, $X_{i(s)}$ – i-я траектория системы.
Для генерации траекторий $X_{i(s)}$ используется схема Эйлера-Маруямы:

$$X_{i(t+\Delta t)} = X_{i(t)} + f\left(X_{i(t)}, u(t), t, \theta(t)\right)\Delta t + g\left(X_{i(t)}, u(t), t, \theta(t)\right)\sqrt{\Delta t}\xi + J\left(X_{i(t)}, t\right)\Delta N,$$

где ξ – вектор независимых стандартных нормальных случайных величин, ΔN - приращение пуассоновского процесса на интервале Δt.
Для уменьшения дисперсии оценки могут быть использованы методы понижения дисперсии, такие как метод существенной выборки или метод стратификации.

Алгоритм расчета остаточной погрешности прогнозирования

Для повышения точности прогнозирования состояния оборудования и оценки надежности полученных результатов разработан алгоритм расчета остаточной погрешности прогнозирования. Данный алгоритм включает следующие этапы:

1. Прогнозирование: $X_{\text{прог}(t)} = f\left(X(t-1), u(t), \theta(t)\right)$

На данном этапе осуществляется прогнозирование состояния оборудования на основе разработанной стохастической модели. Функция f представляет собой оператор эволюции системы, учитывающий как детерминированные, так и стохастические компоненты.

2. Коррекция:

$$X_{\text{корр}(t)} = X_{\text{прог}(t)} + \Delta W(t) + \Delta O(t) + \Delta E(t) + \Delta M(t)$$

Этап коррекции предполагает внесение поправок в прогнозируемое значение с учетом различных факторов, влияющих на точность прогноза. Поправки $\Delta W(t), \Delta O(t), \Delta E(t), \Delta M(t)$ учитывают влияние износа, режима работы, внешних условий и мероприятий по обслуживанию соответственно.

3. Расчет остаточной погрешности:

$$\Delta X_{\text{ост}(t)} = X_{\text{изм}(t)} - X_{\text{корр}(t)}$$

На заключительном этапе производится вычисление остаточной погрешности как разности между измеренным значением состояния оборудования и скорректированным прогнозом.
Поправки, используемые на этапе коррекции, рассчитываются на основе статистического анализа исторических данных:

$$\Delta W(t) = \alpha(t)(t - t_{last}) + \varepsilon_{W(t)}, \quad (18)$$

$$\Delta O(t) = \beta^1(t)L(t) + \beta^2(t)T(t) + \varepsilon_{O(t)}, \quad (19)$$

$$\Delta E(t) = \gamma^1(t)\left(T_{env(t)} - T_{nom}\right) + \gamma^2(t)\left(H_{env(t)} - H_{nom}\right) + \varepsilon_{E(t)}, \quad (20)$$

$$\Delta M(t) = \delta(t)\exp\left(-\lambda(t - t_{last})\right) + \varepsilon_{M(t)}, \quad (21)$$

где $\alpha(t), \beta^1(t), \beta^2(t), \gamma^1(t), \gamma^2(t), \delta(t), \lambda$ – коэффициенты модели, t_{last} – время последнего обслуживания, $L(t)$ – нагрузка, $T(t)$ – рабочая температура, $T_{env(t)}, H_{env(t)}$ – температура и влажность окружающей среды, T_{nom}, H_{nom} – номинальные значения, $\varepsilon_{W(t)}, \varepsilon_{O(t)}, \varepsilon_{E(t)}, \varepsilon_{M(t)}$ – случайные ошибки.
Для оценки коэффициентов модели применяется метод максимального правдоподобия или байесовский подход с использованием априорных распределений, отражающих экспертные знания о характере зависимостей [10].
Анализ статистических свойств оценки $X_{\text{корр}(t)}$ включает вычисление математического ожидания и ковариационной матрицы ошибки прогнозирования [11]:

$$E\left[\Delta X_{\text{ост}(t)}\right] = E\left[X_{\text{изм}(t)} - X_{\text{корр}(t)}\right],$$

$$Cov\left[\Delta X_{\text{ост}(t)}\right] = E\left[\left(X_{\text{изм}(t)} - X_{\text{корр}(t)}\right)\left(X_{\text{изм}(t)} - X_{\text{корр}(t)}\right)^{\mathrm{T}}\right].$$

Для исследования влияния различных факторов на точность прогнозирования применяется метод дисперсионного анализа (ANOVA) и анализ главных компонент (PCA). Это позволяет выявить наиболее значимые источники ошибок и оптимизировать процедуру прогнозирования.

Оптимизация планирования ТОИР с учетом неопределенности

На основе разработанной стохастической модели и алгоритма расчета остаточной погрешности формулируется задача оптимизации планирования ТОИР с учетом неопределенности:

$$\min_u E\left[\sum\nolimits_{\mathrm{i}}^{=1\mathrm{N}} C(X(t_{\mathrm{i}}), u(t_{\mathrm{i}}), t_{\mathrm{i}}) + P\left(X(T)\right)\right] \quad (22)$$

при ограничениях:

$$P\left(g_{j(X(t), u(t), t)} \le 0\right) \ge 1 - \alpha_j, j = 1, \ldots, m \quad (23)$$

где $C(X(t), u(t), t)$ – функция стоимости проведения ТОИР, $P\left(X(T)\right)$ – штрафная функция, отражающая состояние оборудования в конце планового периода, g_j – функции ограничений, α_j – заданные уровни надежности.
Ограничения (23) представляют собой вероятностные ограничения, обеспечивающие выполнение требований к надежности и безопасности эксплуатации оборудования с заданной вероятностью.

Для решения задачи (22)-(23) применяется метод стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Алгоритм решения включает следующие шаги:
1. Аппроксимация вероятностных ограничений детерминированными эквивалентами.
2. Формирование выборки сценариев реализации случайных факторов.
3. Решение детерминированной задачи оптимизации для каждого сценария.
4. Агрегирование полученных решений и формирование робастного плана ТОИР.
5. Анализ устойчивости и чувствительности оптимального решения
Для исследования устойчивости полученного оптимального решения задачи ТОИР проводится анализ чувствительности к вариациям параметров модели и исходных данных. Рассматривается возмущенная задача оптимизации:

$$\min_u E[\sum_i{}^{=1N} C(X(t_i),u(t_i),t_i,\varepsilon) + P(X(T),\varepsilon)] \quad (24)$$

при ограничениях:

$$P\left(g_{j(X(t),u(t),t,\varepsilon)} \leq 0\right) \geq 1 - \alpha_j, j = 1,\ldots,m \quad (25)$$

где ε – вектор возмущений параметров модели.
Анализ чувствительности проводится на основе теории возмущений для задач стохастического программирования. Рассматривается разложение оптимального решения $u*(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности номинального значения параметров:

$$u*(\varepsilon) = u*(0) + (\partial u * \partial\varepsilon)\varepsilon + O\left(\left|\left|\varepsilon\right|\right|^2\right) \quad (26)$$

Для вычисления производных $\partial u * \partial\varepsilon$ применяется метод сопряженных переменных. Вводится функция Лагранжа:

$$L(u,\lambda,\varepsilon) = E[\sum_i{}^{=1N} C(X(t_i),u(t_i),t_i,\varepsilon) + P(X(T),\varepsilon)] + \sum_j{}^{=1m} \lambda_j\left(P\left(g_{j(X(t),u(t),t,\varepsilon)} \leq 0\right) - \left(1 - \alpha_j\right)\right) \quad (27)$$

где λ_j – множители Лагранжа.
Производные оптимального решения по параметрам определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \cdot \partial u * \partial\varepsilon + \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial\varepsilon} = 0 \quad (28)$$

Анализ полученных зависимостей позволяет оценить робастность оптимального решения и выявить критические параметры модели, требующие наиболее точного определения.

Многомасштабный подход к моделированию процессов деградации

Для учета различных временных масштабов процессов деградации предлагается многомасштабный подход к моделированию. Рассматриваются три уровня:
1. Микроуровень: описание локальных процессов деградации (например, рост микротрещин)
2. Мезоуровень: эволюция характеристик отдельных компонентов оборудования
3. Макроуровень: изменение общего состояния системы
На микроуровне процессы деградации описываются стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$da(t) = \mu_{a(a(t),\sigma(t))dt} + \sigma_{a(a(t),\sigma(t))dW_{a(t)}} \quad (29)$$

где $a(t)$ – вектор микроструктурных параметров, $\sigma(t)$ – тензор напряжений, $W_{a(t)}$ – винеровский процесс.
На мезоуровне эволюция характеристик компонентов моделируется уравнениями:

$$dX_{i(t)} = f_{i\left(X_{i(t)},a(t)\right)dt} + g_{i\left(X_{i(t)},a(t)\right)dW_{i(t)}} \quad (30)$$

где $X_{i(t)}$ – вектор состояния -го компонента.
Макроуровень описывается системой уравнений:

$$dX(t) = F\left(X(t),\{X_{i(t)}\}\right)dt + G\left(X(t),\{X_{i(t)}\}\right)dW(t) \quad (31)$$

Связь между уровнями осуществляется через операторы осреднения и проекции. Для численного решения многомасштабной модели применяется метод гетерогенного мультимасштабного моделирования (HMM) [12].

Оптимальное управление с обратной связью

Для реализации адаптивного управления процессами ТОИР разрабатывается стратегия оптимального управления с обратной связью. Рассматривается задача:

$$\min_u E[\int_0{}^{T} L(X(t),u(t),t)dt + \Phi(X(T))] \quad (32)$$

при ограничениях:

$$dX(t) = f(X(t),u(t),t)dt + g(X(t),u(t),t)dW(t) \quad (33)$$

$$X(t) \in \Omega(t), u(t) \in U(t) \quad (34)$$

где L – функция текущих затрат, Φ – терминальная функция стоимости, $\Omega(t)$ и $U(t)$ – допустимые множества состояний и управлений.
Оптимальное управление с обратной связью определяется из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана [13]:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_u\left[L(x,u,t) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x,u,t) + \frac{1}{2} tr\left(g(x,u,t)g(x,u,t)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\right)\right] \quad (35)$$

с граничным условием $V(x,T) = \Phi(x)$.
Для численного решения уравнения (35) применяется метод последовательных приближений в пространстве функций *(policy iteration)*:
1. Инициализация: выбор начального приближения $V_0(x,t)$
2. Улучшение стратегии:

$$u_{k(x,t)} = argmin_u\left[L(x,u,t) + \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x,u,t) + ½\, tr\left(g(x,u,t)g(x,u,t)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}\right)\right)\right]$$

3. Оценка функции ценности: решение уравнения

$$-\frac{\partial V_{\{k+1\}}}{\partial t} = L(x,u_{k(x,t)},t) + \left(\frac{\partial V_{\{k+1\}}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f\left(x,u_{k(x,t)},t\right) + \frac{1}{2} tr\left(g\left(x,u_{k(x,t)},t\right)g\left(x,u_{k(x,t)},t\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial^2 V_{\{k+1\}}}{\partial x^2}\right)\right)$$

4. Проверка сходимости: если $\left|\left|V_{\{k+1\}} - V_k\right|\right| < \varepsilon$, то завершение; иначе переход к шагу 2.

Для практической реализации данного алгоритма применяется аппроксимация функции ценности $V(x,t)$ с использованием разложения по базисным функциям [14, 15]:

$$V(x,t) \approx \sum_{i=1}{}^{N} \alpha_i(t)\phi_i(x) \quad (36)$$

где $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$ – набор базисных функций (например, полиномы Чебышева или радиальные базисные функции), а $\alpha_i(t)$ – коэффициенты разложения, зависящие от времени.

Подстановка (36) в уравнение (35) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_i(t)$:

$$-\frac{d\alpha}{dt} = A(t)\alpha + b(t), \quad (37)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha^N)^T$, а матрица $A(t)$ и вектор $b(t)$ определяются из условий минимизации невязки уравнения (35).

Стохастическая фильтрация и оценивание состояния

Для эффективной реализации стратегии управления с обратной связью необходимо решить задачу оценивания текущего состояния системы на основе зашумленных измерений[1]. Рассматривается модель наблюдений:

$$dY(t) = h(X(t), t)dt + R(t)dV(t), \quad (38)$$

где $Y(t)$ – вектор наблюдаемых переменных, $h(X(t), t)$ – функция измерений, $R(t)$ – матрица интенсивности шумов измерений, $V(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$.

Для оценивания состояния применяется расширенный фильтр Калмана, основанный на линеаризации нелинейных функций f, g и h в окрестности текущей оценки состояния[2]. Уравнения фильтра имеют вид:

$$d\hat{X}(t) = f\left(\hat{X}(t), u(t), t\right)dt + K(t)\left(dY(t) - h\left(\hat{X}(t), t\right)dt\right) \quad (39)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G(t)^T - K(t)R(t)K(t)^T \quad (40)$$

$$K(t) = P(t)H(t)^T R(t)^{-1} \quad (41)$$

где $\hat{X}(t)$ – оценка состояния, $P(t)$ – ковариационная матрица ошибки оценивания, $F(t) = \partial f/\partial x|\_\{x = \hat{X}(t)\}, G(t) = g(\hat{X}(t), u(t), t), H(t) = \partial h/\partial x|\_\{x = \hat{X}(t)\}, Q(t)$ – ковариационная матрица шумов состояния.

Для улучшения точности оценивания в случае существенных нелинейностей может быть использован ансцентный фильтр Калмана или частичный фильтр [16, 17].

Оптимизация периодичности и объема технического обслуживания

Рассматривается задача оптимизации периодичности и объема технического обслуживания с учетом стохастической природы процессов деградации [18]. Вводится функция стоимости [19]:

$$J(\tau, v) = E\left[\sum_i{}^{=1N}\left(C_{m(v_i)} + C_{d(X(\tau_i))}\right) + C_{f(X(T))}\right] \quad (42)$$

где $\tau = (\tau^1, \ldots, \tau^N)$ – вектор моментов времени проведения технического обслуживания, $v = (v^1, \ldots, v^N)$ – вектор объемов технического обслуживания, $C_{m(v)}$ – стоимость проведения технического обслуживания объема $v, C_{d(X)}$ – функция потерь, связанная с текущим состоянием системы, $C_{f(X)}$ – терминальная функция стоимости.

Задача оптимизации формулируется как [20]:

$$min\_\{\tau, v\}\, J(\tau, v) \quad (43)$$

при ограничениях:

$$0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau^N \le T \quad (44)$$

$$v_{min} \le v\_i \le v_{max}, i = 1, \ldots, N \quad (45)$$

$$P\left(g_{j(X(t))} \le 0\right) \ge 1 - \alpha_j, j = 1, \ldots, m \quad (46)$$

где (44) задает ограничения на порядок моментов технического обслуживания, (45) определяет допустимый диапазон объемов технического обслуживания, а (46) представляет вероятностные ограничения на состояние системы.

Для решения задачи (43)-(46) применяется метод стохастического градиентного спуска с проекцией на множество допустимых решений [21]. Градиент целевой функции $\nabla J(\tau, v)$ оценивается методом конечных разностей с использованием выборки траекторий процесса деградации [22].

Обсуждение и заключение

Разработанный системный подход к применению методов стохастического моделирования для оптимизации процессов ТОИР представляет собой комплексное решение, учитывающее стохастическую природу процессов деградации, многофакторность воздействий и нелинейный характер износа оборудования.

Ключевые элементы предложенного подхода включают [23]:

1. Расширенную стохастическую модель деградации оборудования
2. Многокритериальную задачу оптимизации ТОИР
3. Адаптивный метод решения задачи оптимизации на основе стохастического динамического программирования
4. Алгоритм расчета остаточной погрешности прогнозирования
5. Методы анализа чувствительности и обеспечения робастности решений
6. Многомасштабный подход к моделированию процессов деградации
7. Стратегию оптимального управления с обратной связью
8. Методы стохастической фильтрации для оценивания состояния системы
9. Оптимизацию периодичности и объема технического обслуживания

Предложенные методы и алгоритмы позволяют эффективно решать задачи оптимизации ТОИР в условиях неопределенности и многофакторности воздействий, обеспечивая повышение надежности и экономической эффективности эксплуатации сложных технических систем [24].

Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку методов учета взаимозависимости между различными единицами оборудования в сложных производственных системах, что потребует расширения модели на случай многомерных стохастических процессов с зависимыми компонентами [25].

[1] Bertsekas D. P. Reinforcement Learning and Optimal Control. Athena Scientific, 2019. 388 p.

[2] Goebel K., Daigle M. J., Saxena A., Sankararaman S., Roychoudhury I., Celaya J. R. Prognostics: The science of making predictions. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017. 396 p.

References

[1] Wang H. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research.* 2022;139(3):469-489. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00197-7
[2] Jardine A.K., Lin D., Banjevic D. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2006;20(7):1483-1510. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.09.012
[3] Zio E. Reliability engineering: Old problems and new challenges. *Reliability Engineering & System Safety*. 2009;94(2):125-141. https://doi.org/10.1016/j.ress.2008.06.002
[4] Doyen L., Gaudoin O. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering & System Safety*. 2004;84(1):45-56. https://doi.org/10.1016/S0951-8320(03)00173-X
[5] Si X.S., Wang W., Hu C.H., Zhou D.H. Remaining useful life estimation – A review on the statistical data driven approaches. *European Journal of Operational Research*. 2011;213(1):1-14. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.11.018
[6] Heng A., Zhang S., Tan A.C., Mathew J. Rotating machinery prognostics: State of the art, challenges and opportunities. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2009;23(3):724-739. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.06.009
[7] Kallen M.J., van Noortwijk J.M. Optimal maintenance decisions under imperfect inspection. *Reliability Engineering & System Safety*. 2005;90(2-3):177-185. https://doi.org/10.1016/j.ress.2004.10.004
[8] Van Horenbeek A., Pintelon L. A dynamic predictive maintenance policy for complex multi-component systems. *Reliability Engineering & System Safety*. 2013;120:39-50. https://doi.org/10.1016/j.ress.2013.02.029
[9] Nicolai R.P., Dekker R. Optimal Maintenance of Multi-component Systems: A Review. In: Complex System Maintenance Handbook. *Springer Series in Reliability Engineering*. London: Springer; 2008. p. 263-286. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-011-7_11
[10] Saltelli A., et al. Global Sensitivity Analysis. The Primer. John Wiley & Sons; 2008. https://doi.org/10.1002/9780470725184
[11] Julier S.J., Uhlmann J.K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*. 2004;92(3):401-422. https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.823141
[12] Doucet A., Johansen A.M. A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years later. In: Crisan D., Rozovskii B. (eds.) The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering. New York: Oxford University Press; 2009. p. 656-704. Available at: https://www.stats.ox.ac.uk/~doucet/doucet_johansen_tutorialPF2011.pdf (accessed 28.06.2024).
[13] Powell W.B. Approximate Dynamic Programming: Solving the curses of dimensionality. Vol. 703. John Wiley & Sons; 2007. 480 p. https://doi.org/10.1002/9780470182963
[14] Weinan E., Engquist B., Li X., Ren W., Vanden-Eijnden E. Heterogeneous multiscale methods: a review. *Communications in Computational Physics.* 2007;2(3):367-450.
[15] Abdulle A., Weinan E., Engquist B., Vanden-Eijnden E. The heterogeneous multiscale method. *Acta Numerica.* 2012;21:1-87. https://doi.org/10.1017/S0962492912000025
[16] Zagorowska M., et al. A survey of models of degradation for control applications. *Annual Reviews in Control.* 2020;50:150-173. https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.08.002
[17] Zio E. Some challenges and opportunities in reliability engineering. *IEEE Transactions on Reliability*. 2016;65(4):1769-1782. https://doi.org/10.1109/TR.2016.2591504
[18] Meeker W.Q., Hong Y. Reliability meets big data: opportunities and challenges. *Quality Engineering*. 2014;26(1):102-116. https://doi.org/10.1080/08982112.2014.846119
[19] Liao H., Sun J. Nonparametric and semi-parametric sensor recovery in multichannel condition monitoring systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2011;8(4):744-753. https://doi.org/10.1109/TASE.2011.2159265
[20] Alaswad S., Xiang Y. A review on condition-based maintenance optimization models for stochastically deteriorating system. *Reliability Engineering & System Safety*. 2017;157:54-63. https://doi.org/10.1016/j.ress.2016.08.009
[21] Do P., Voisin A., Levrat E., Iung B. A proactive condition-based maintenance strategy with both perfect and imperfect maintenance actions. *Reliability Engineering & System Safety*. 2015;133:22-32. https://doi.org/10.1016/j.ress.2014.08.011
[22] Liu B., Xu Z., Xie M., Kuo W. A value-based preventive maintenance policy for multi-component system with continuously degrading components. *Reliability Engineering & System Safety*. 2014;132:83-89. https://doi.org/10.1016/j.ress.2014.06.012
[23] Ye Z.S., Xie M. Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products. *Applied Stochastic Models in Business and Industry.* 2015;31(1):16-32. https://doi.org/10.1002/asmb.2063
[24] Marseguerra M., Zio E., Podofillini L. Condition-based maintenance optimization by means of genetic algorithms and Monte Carlo simulation. *Reliability Engineering & System Safety*. 2002;77(2):151-165. https://doi.org/10.1016/S0951-8320(02)00043-1
[25] Baraldi P., Compare M., Zio E. Maintenance policy performance assessment in presence of imprecision based on Dempster-Shafer Theory of Evidence. *Information Sciences*. 2013;245:112-131. https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.11.003

Поступила 28.06.2024; одобрена после рецензирования 20.08.2024; принята к публикации 16.09.2024.
Submitted 28.06.2024; approved after reviewing 20.08.2024; accepted for publication 16.09.2024.

Об авторах:

Леонов Александр Владимирович, аспирант физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), **ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7515-1916,** alexsandr.leo@yandex.ru

Мунерман Виктор Иосифович, доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), кандидат технических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9628-4049,** vimoon@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Alexsandr V. **Leonov,** Postgraduate Student of the Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7515-1916,** alexsandr.leo@yandex.ru

Victor I. Munerman, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Informatics, Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9628-4049,** vimoon@gmail.com

All authors have read and approved the final manuscript.