



ИТ-образование: методология, методическое обеспечение

<https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202502.306-316>
УДК 303.732.4

Методика применения онтологии олимпиадных математических задач с нестандартными элементами

М. Г. Нуякшин^{*}, Е. Н. Черемисина

Оригинальная статья

ГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна»,
г. Дубна, Российская Федерация

Адрес: 141982, Российская Федерация, Московская
область, г. Дубна, ул. Университетская, д. 19

^{*} mihail.nuyakshin@mail.ru

Аннотация

В статье представлена методика генерации олимпиадных математических задач с нестандартными элементами (эвристическими приёмами, междисциплинарными и игровыми компонентами, элементами неопределённости, и др.). Актуальность работы связана с необходимостью развивать у учащихся творческие и аналитические навыки, а также повышать эффективность подготовки к конкурсам и олимпиадам. Проанализированы современные подходы к генерации задач, включая методы шаблонов и нейросетевые решения, выявлены их ограничения, связанные с недостаточным учётом структуры знаний и систематической интеграции «нестандартности». Для преодоления этих ограничений предложена онтологическая модель, описывающая не только тему, уровень сложности и метод решения, но и разновидности нестандартных элементов условия. На её основе разработан алгоритм генерации, использующий систему правил. Система формирует задачи с учётом профиля обучающегося, корректности формулировки и требуемого уровня сложности. В методике предусмотрено взаимодействие эксперта, задающего параметры (ключевые навыки, желаемые элементы, уровень), и ИИ-модуля, который комбинирует концепты онтологии и проверяет задачу на логическую непротиворечивость. Отмечены перспективы расширения модели за счёт включения новых разделов математики и генерации не только условий, но и решений. Подчёркивается, что сочетание онтологического описания и ИИ позволяет выйти за рамки стандартных заданий, стимулировать креативное мышление и повысить качество подготовки к олимпиадам.

Ключевые слова: генерация математических задач, нестандартные элементы, онтология, искусственный интеллект, олимпиадный уровень

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Нуякшин М. Г., Черемисина Е. Н. Методика применения онтологии олимпиадных математических задач с нестандартными элементами // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 2. С. 306-316. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202502.306-316>

© Нуякшин М. Г., Черемисина Е. Н., 2025



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



IT-Education: Methodology, Methodological Support

Methodology for Generating Mathematical Problems with Non-Standard Elements

M. G. Nuyakshin^{*}, E. N. Cheremisina

Original article

Dubna State University, Dubna, Russian Federation

Address: 19 Universitetskaya St., Dubna 141980,
Moscow Region, Russian Federation

* mihail.nuyakshin@mail.ru

Abstract

This paper presents a methodology for generating mathematical problems at the olympiads level that include non-standard elements (heuristic techniques, interdisciplinary and game-based components, elements of uncertainty, etc.). The relevance of this work lies in the need to foster students' creative and analytical skills and to increase the effectiveness of training for competitions and olympiads. The authors review current approaches to problem generation, including template-based methods and neural network solutions, and highlight their limitations, particularly the insufficient consideration of knowledge structures and the systematic integration of "non-standardness". To address these challenges, an ontological model is proposed that describes not only the topic, difficulty level, and solution method but also the types of non-standard elements in a problem statement. Based on this model, a rule-driven generation algorithm has been developed. The system creates tasks considering the learner's profile, the correctness of the problem statement, and the required level of difficulty. The methodology involves collaboration between an expert, who defines parameters (key skills, desired elements, difficulty level), and an AI module, which combines ontological concepts and verifies logical consistency. The prospects for expanding the model include covering additional areas of mathematics and generating not only problem statements but also step-by-step solutions. The authors emphasize that the integration of ontological representation and AI makes it possible to go beyond standard exercises, stimulate creative thinking, and significantly improve personalized olympiads preparation.

Keywords: mathematical problem generation, non-standard elements, ontology, artificial intelligence, olympiad-level tasks

Conflict of interests: The authors declares no conflict of interest.

For citation: Nuyakshin M.G., Cheremisina E. N. Methodology for Generating Mathematical Problems with Non-Standard Elements. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2025;21(2):306-316. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202502.306-316>



Введение

Современное образование испытывает растущую потребность в инструментах, развивающих креативное мышление и навыки решения нестандартных задач. В математическом образовании особое значение имеют олимпиадные задания, требующие оригинальных подходов и творческого применения знаний [1]. Однако процесс их отбора и составления трудоёмок и во многом зависит от опыта отдельных экспертов.

Одновременно активно развиваются технологии искусственного интеллекта (ИИ). По данным отраслевых исследований, мировой рынок ИИ для образования растёт примерно на 40% ежегодно – с \$3,99 млрд в 2023 году до ожидаемых \$21,13 млрд к 2028 году¹. Наиболее заметные направления включают персонализированные обучающие платформы, интеллектуальных репетиторов и системы автоматизированного оценивания [2]. Интеграция ИИ позволяет создавать адаптивные системы, которые подстраиваются под индивидуальные потребности учащихся и обеспечивают мгновенную обратную связь, что повышает успеваемость и вовлечённость.

Уже предложены модели COMET [5] и MathGenie [6], ориентированные на формирование больших корпусов задач и их решений с проверкой корректности. Однако большинство таких систем создают типовые задания, редко включающие нестандартные элементы, выходящие за рамки стандартных упражнений. Под нестандартным элементом понимается компонент условия, требующий эвристик, междисциплинарных связей или оригинальных методов (например, неопределённость условий, игровые сценарии) [7].

Возникает проблема формализации и автоматизации процесса составления нестандартных задач: без систематизации генерация либо даёт тривиальные примеры, либо некорректные условия. Поэтому целью настоящего исследования является разработка методики генерации математических задач с нестандартными элементами на основе интеграции экспертных знаний, онтологии и алгоритмов ИИ. Для достижения цели решаются задачи: анализ существующих подходов, построение онтологической модели с учётом нестандартных элементов, разработка алгоритма генерации и адаптации сложности, а также экспериментальная апробация методики. Новизна подхода состоит в сочетании онтологической модели знаний и механизмов целенаправленного введения нестандартных элементов, что позволяет создавать задачи олимпиадного уровня, персонализированные под профиль учащегося.

1. Обзор литературы

Существующие методы генерации математических задач можно разделить на два направления:

Шаблонные методы – основаны на параметрических схемах и подстановке чисел [8], позволяют быстро создавать типовые упражнения, но почти не

затрагивают нестандартные элементы.

Нейросетевые методы – используют предобученные языковые модели и механизмы контроля. Так, в [9] реализован генератор текстовых задач с проверкой математической консистентности; в [10] предложен AI-assisted framework, совмещающий LLM и эксперта для итеративного улучшения задач; в [11] разработана модель генерации условия по заданному уравнению; в [12] – мультиязычная генерация с применением LSTM. Однако такие подходы нередко сталкиваются с проблемой семантической корректности [9], что побуждает исследователей интегрировать онтологии и базы знаний [13].

Адаптивные образовательные системы. Классические интеллектуальные обучающие системы (ITS) показывают, что адаптация контента под уровень знаний ученика повышает эффективность обучения [2]. Современные платформы (Khan Academy, Duolingo, ALEKS) используют алгоритмы отслеживания прогресса и динамической настройки сложности. В недавних обзорах [2] отмечено, что более половины исследований фиксируют рост академических результатов благодаря адаптивным технологиям. Однако большинство систем работает с простыми заданиями, а применение адаптивности к олимпиадным и нестандартным задачам остаётся малоизученным.

Онтологии и модели знаний. Использование онтологий позволяет формализовать предметные знания, обеспечивая семантический контроль и автоматическую проверку. Применение онтологий в образовательных системах позволяет создать структурированное представление учебного материала, методов обучения и оценки знаний, что способствует эффективному обмену информацией между различными компонентами образовательной среды, улучшает навигацию в условиях повышенного объема информации [14, 15]. В математическом образовании известна онтология OntoMathEdu, применявшаяся для адаптивных рекомендаций и генерации тестовых заданий² [16]. В [17] предложено использовать онтологии совместно с когнитивными операциями для синтеза знаний, а в [18] показаны преимущества онтологического подхода для автоматической генерации тестов. Система в [19] автоматизирует проверку ответов на задания открытой формы на основе онтологической модели. Зарубежные исследования [20, 21] демонстрируют, что интеграция онтологии с нейросетевыми моделями (например, LSTM) повышает согласованность и точность при генерации текстовых задач, особенно сложных многократных сценариев передачи объектов [3, 4].

В результате обзора можно сделать выводы:

Прототипы генераторов задач существуют, но недостаточно учитывают структуру знаний и нестандартные элементы.

Адаптивные технологии доказали эффективность, но их применение для олимпиадных задач остаётся редким.

¹ AI in Education Market [Электронный ресурс] // Dimension Market Research, 2025. URL: <https://dimensionmarketresearch.com/report/ai-in-education-market/> (дата обращения: 29.03.2025).

² Образовательная математическая онтология OntoMathEdu: структура и отношения / Л. Р. Шакирова [и др.] // Научный сервис в сети Интернет: труды XXI Всероссийской научной конференции (23-28 сентября 2019 г., г. Новороссийск). М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019. С. 653-661. <https://doi.org/10.20948/abrau-2019-84>



Онтологии создают основу для систематизации и контроля качества задач, что открывает возможности для разработки интеллектуального генератора.

В этой статье представлена методика применения онтологии олимпиадных задач в роли генеративной основы, на которую накладываются правила включения нестандартных элементов и механизмы адаптации к ученику.

2. Материалы и методы

2.1 Онтологическая модель математической задачи

В основе разработанной методики лежит онтологическая модель олимпиадных задач, которая обеспечивает формализованное представление всех элементов задачи, включая стандартные атрибуты и нестандартные компоненты. В отличие от существующих предметных онтологий (например, OntoMathEdu [16]), в данной модели впервые введён концепт «нестандартный элемент задачи», что позволяет явно описывать креативные и нетривиальные особенности заданий.

Нестандартный элемент условия задачи – это компонент формулировки математической задачи, выходящий за рамки типичных требований стандартного курса и предполагающий использование оригинальных подходов, креативного мышления или дополнительных знаний для её решения

Формально онтология описывается множеством концептов (C), множеством отношений (R) между ними и множеством атрибутов (A) для характеристик концептов.

$$M = \langle C, R, A, P, D \rangle,$$

где $P = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ – множество конкретных значений атрибутов, а $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ множество типов отношений. Множество P определяет все допустимые значения для атрибутов, что позволяет описывать конкретные экземпляры концептов (понятий), а типы отношений определяют шаблоны

возможных связей между концептами.

Например, концепт "задача" имеет атрибуты "год создания", "автор", "количество баллов", "уровень сложности" и др. В статье предложено расширить атрибуты задач новым свойством "тип нестандартности", значениями которого служат категории нестандартных элементов (описаны ниже). Это позволяет каждой задаче в базе знаний явно указывать, какой нестандартный компонент она содержит – например, элемент неопределённости или междисциплинарную связь. Особое внимание уделено отношению «задача включает нестандартный элемент», которое связывает объект-задачу с тем или иным эвристическим или нетривиальным элементом из онтологии. Нестандартные элементы также оформлены как концепты, что даёт возможность задавать их классификацию и свойства. В результате онтология служит не пассивным хранилищем, а генераторным каркасом: на её основе можно создавать новые задачи, комбинируя взаимосвязанные концепты и проверяя логические ограничения. Для реализации онтологии использован язык OWL2 в редакторе Protégé; связь с реляционной базой данных задач обеспечивается через инструмент Ontop (виртуализация данных), что позволяет автоматически сопоставлять экземпляры задач в БД с онтологическими классами и свойствами [13].

2.2 Классификация нестандартных элементов задачи

На основе анализа олимпиадных задач, ряда научных статей [22-25] и экспертных интервью была разработана классификация нестандартных элементов математических задач (рис.1.).

Данная классификация систематизирует разнообразие нестандартных ходов и неожиданных препятствий, используемых в задачах. Приведём основные группы категорий с примерами:



Р и с. 1. Классификация видов нестандартных элементов математической задачи

F i g. 1. Classification of types of non-standard elements in a mathematical problem

Источник: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены авторами.

Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the authors.



Эвристические элементы – требующие применения непредсказуемых приёмов или догадок. Пример: скрытая подсказка в условии, которую нужно заметить, или требование придумать собственную вспомогательную лемму для решения.

Элементы неопределённости и неполноты – задачи с недостающими данными, параметрами с диапазоном значений или условием "найдите все решения при любых допущениях". Пример: "некоторые данные утеряны, но известно, что...". Такие задачи развивают умение работать с неполной информацией.

Междисциплинарные элементы – интеграция контекста или понятий из других областей (физики, информатики, лингвистики). Пример: задача, где для решения требуется знание принципов физики или анализ лингвистической головоломки вместе с математическими расчётами.

Графические и игровые элементы – использование рисунков, диаграмм, геометрических построений или игровых ситуаций. Пример: задача оформлена как игра с определёнными правилами либо содержит рисунок, из которого нужно извлечь данные для решения.

Структурная сложность – многоэтапность, наличие нескольких связанных подзадач, ветвление условий. Пример: задача, где после решения первого шага условия изменяются или добавляется новый подвопрос.

Парадоксы и противоречия – задачи, формулировка которых на первый взгляд противоречива или парадоксальна, что вынуждает тщательно пересмотреть исходные предположения.

Каждый нестандартный элемент как класс в онтологии имеет свои атрибуты. Например, элемент "неопределённость условий" может иметь атрибут степень неопределённости (количество неизвестных данных), элемент "игровой сценарий" – атрибут тип игры (головоломка, стратегия и т.п.). Благодаря онтологии обеспечивается возможность контролировать, что в одной задаче не сочетаются несовместимые нестандартные элементы (например, противоречие с избыточными данными) и что включение элемента соответствует уровню сложности. Классификация и формализация нестандартных элементов – одно из ключевых отличий методики от ранее предлагаемых генераторов задач, где такие элементы либо отсутствовали, либо задавались неявно.

Представленная на рис. 1 концептуальная классификация нестандартных элементов послужила основой для построения онтологической модели. В рамках реализации генератора задач были отобраны и формализованы те категории, которые допускают явное описание в виде правил и ограничений. Развёрнутая классификация нестандартных элементов представлена в Приложении А.

2.3 Методика генерации задач с нестандартными элементами

Разработана методика генерации математической задачи с нестандартными, которая основана на взаимодействии между экспертом, генератором ИИ и базой данных задач. Методика включает несколько этапов взаимодействия эксперта-человека и генератора-ИИ, что

обеспечивает комбинированный подход. Методика генерации состоит из следующих шагов (рис. 2).

1. *Подготовительный этап*: выделение ключевых навыков, которые должны быть проверены при решении задачи обучающимся, и выбор нестандартных элементов для её усложнения. Эксперт определяет параметры задачи, выбирает один или несколько нестандартных элементов и передаёт эту информацию генератору ИИ в виде запроса на генерацию задачи. Например, тема "Квадратные уравнения", тип решения "Аналитическое", уровень сложности "Высокий (3)" и т.д.

2. *Этап генерации задачи*: генератор ИИ использует онтологическую модель задач для комбинирования концептов, атрибутов и нестандартных элементов. Алгоритм работает следующим образом: из онтологии выбираются релевантные концепты по заданной теме и навыкам (например, концепты, связанные с квадратными уравнениями и требующие аналитического решения). Затем генератор комбинирует эти концепты, добавляя выбранные нестандартные элементы. Формально результатом является вектор параметров задачи $P = \{C_1, C_2, \dots, C_n, A_1, A_2, \dots, A_w, E_1, E_2, \dots, E_v\}$. Здесь C_i – концепты, описывающие основные категории задачи, такие как «тема задачи» или «тип задачи»; A_i – атрибуты, уточняющие конкретные свойства задачи, такие как «уровень сложности» или «количество баллов»; E_i – параметры, описывающие нестандартные элементы, такие как «структурная сложность», «игровой компонент» или другое. Пример вектора параметров для конкретной задачи: $P = \{C_1, C_2, A_1, A_3, E_1, E_2\}$. Здесь C_1 =алгебра, C_2 =неравенства, A_1 =3 (высокий уровень сложности), A_3 =8 (баллов), E_1 = многоуровневая, E_2 =графическая интерпретация. Генератор соблюдает ограничения онтологии: например, если выбран элемент "неопределённость", то гарантирует отсутствие противоречий и наличие достаточных скрытых подсказок для решения. Сгенерированная задача передаётся обратно эксперту на проверку. Пример сгенерированной задачи: "Найдите коэффициенты квадратного уравнения, если его корни образуют арифметическую прогрессию".

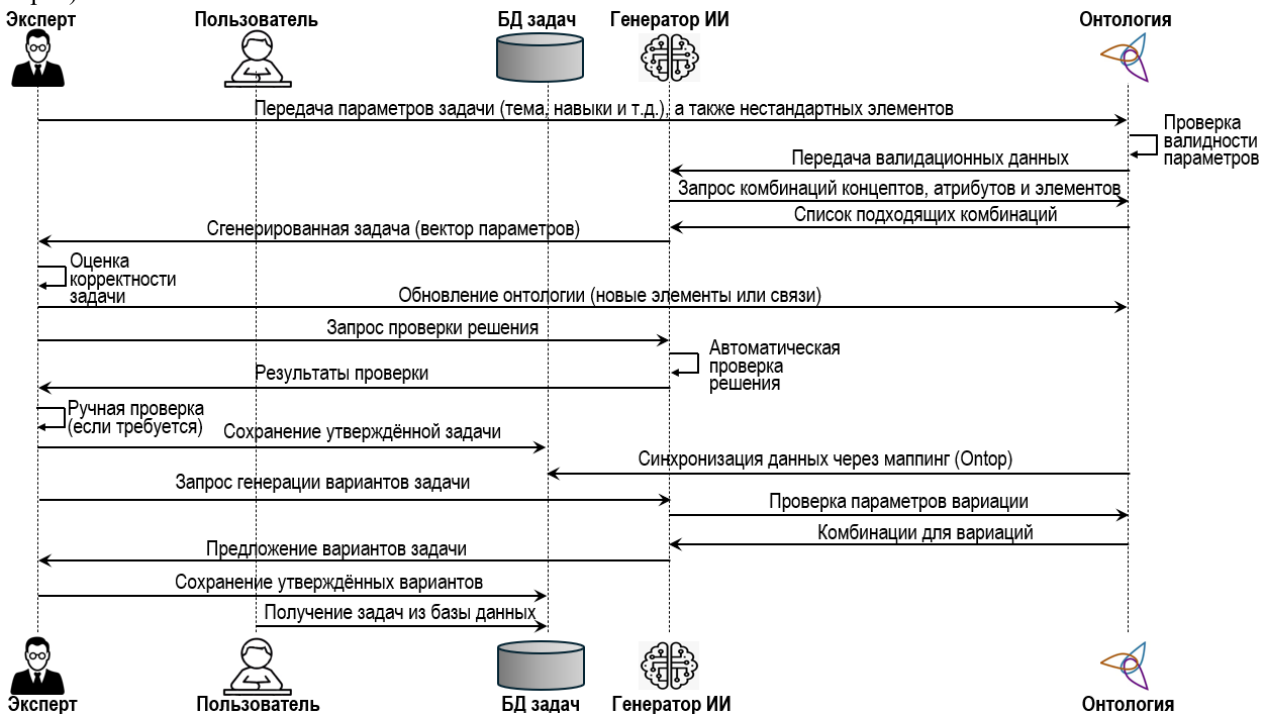
Следует отметить, что при формировании нового задания генератор не конструирует условие «с нуля», а использует метод аналогии: он выбирает из онтологии существующие концепты и атрибуты, а затем комбинирует их с выбранными нестандартными элементами. Таким образом, каждая новая задача является вариацией или комбинацией известных структурных шаблонов, но с изменёнными условиями или контекстом. Такой подход обеспечивает логическую согласованность и предотвращает появление бессмысленных формулировок, характерных для чисто нейросетевой генерации. Например, если в базе имеется задача «Найдите коэффициенты квадратного уравнения, если его корни образуют арифметическую прогрессию», то по аналогии может быть сгенерирована новая задача «Найдите коэффициенты квадратного уравнения, если его корни образуют геометрическую прогрессию».



3. *Этап экспертной оценки.* Эксперт анализирует полученную задачу по нескольким критериям:

- логическая корректность – не содержит ли условие ошибок, двусмысленностей, решается ли задача единственным образом;
- образовательная ценность – действительно ли задача заставляет применять указанные навыки, развивает ли критическое мышление;
- соответствие сложности – соответствует ли задача желательному уровню (например, заявлен "высокий уровень", а задача получилась слишком простой, или наоборот).

Если задача не удовлетворяет требованиям, эксперт может откорректировать её вручную либо запросить доработку: например, добавить ещё один нестандартный элемент для усложнения. Например, эксперт может решить, что задача пока недостаточно сложна для уровня 3. Он добавляет элемент неопределённости: уточняет, что "коэффициенты уравнения известны с погрешностью ± 1 " – теперь задача стала многовариантной и более сложной.



Р и с. 2. UML-диаграмма последовательности генерации и проверки математических задач
F i g. 2. UML sequence diagram of the generation and verification of mathematical problems

4. *Этап проверки решения.* После окончательного формирования текста задачи система автоматически проверяет её решаемость. Для этого генератор ИИ пытается решить задачу с помощью встроенных алгоритмов (например, CAS для уравнений, поиск перебором для комбинационных задач). Если решение не может быть найдено автоматически (что возможно при очень творческих элементах), задача помечается как требующая ручной проверки – эксперт сам составляет решение и убеждается в его корректности. В большинстве случаев хотя бы частичная автоматизированная проверка возможна, так как онтология содержит сведения о методах решения.

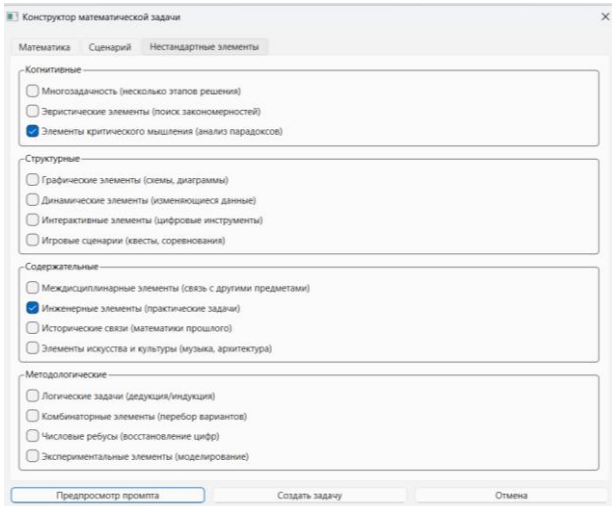
5. *Этап сохранения задачи.* Утверждённая экспертом задача сохраняется в базе данных задач с вектором параметров P (все атрибуты, включая отметки о нестандартных элементах). Это необходимо для дальнейшего использования задачи в обучении и для накопления корпуса задач. Каждая задача получает уникальный идентификатор; база связывается с онтологией, так что впоследствии можно делать семантический поиск задач (напр. найти все задачи с элементом "игровой сценарий" по теории чисел).

6. *Генерация вариантов задачи.* Дополнительно

реализована функция получения вариаций созданной задачи. На практике это означает автоматически сгенерировать несколько аналогичных задач того же типа, изменив некоторые детали: числовые данные, контекст, формулировки. Эксперт указывает, какие параметры можно варьировать (например, прогрессия в примере выше может быть геометрической вместо арифметической, или погрешность может быть иной). Генератор создает указанные варианты и предлагает их эксперту для быстрого контроля качества. После одобрения варианты также поступают в базу. Таким образом, одна разработанная задача служит прототипом для целого набора сходных по структуре задач – это повышает масштабируемость генератора. Описанная многоступенчатая процедура обеспечивает баланс между творческим вкладом человека и возможностью автоматической генерации с помощью ИИ. Такой комбинированный подход зарекомендовал себя как эффективный: согласно литературным данным, сочетание экспертных методов и алгоритмов (в частности, метод аналогий + ИИ-генерация) позволяет получать задачи высокого качества при сохранении преимуществ быстрой автоматической генерации.

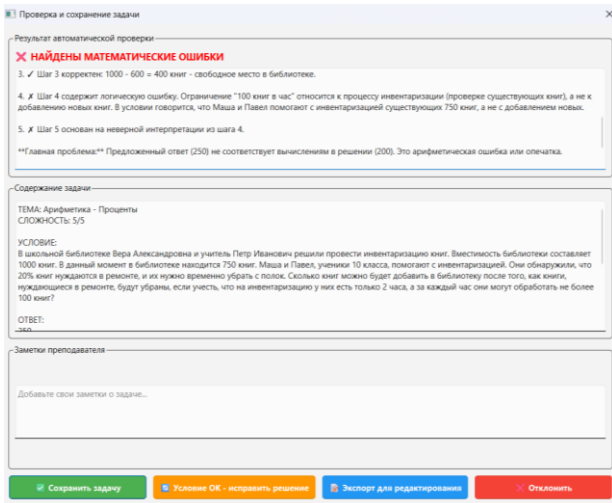


Для практической реализации методики разработан интерактивный конструктор задач, позволяющий эксперту задавать тему, уровень сложности и выбирать нестандартные элементы (рис. 3). Генератор формирует задачу и автоматически проверяет её корректность. При обнаружении ошибок система выдаёт подробный отчёт и предлагает исправления (рис. 4). Это обеспечивает баланс между автоматической генерацией и экспертным контролем.



Р и с. 3. Интерфейс конструктора задач с выбором нестандартных элементов

Fig. 3. Interface of the problem designer with selection of non-standard elements



Р и с. 4. Пример автоматической проверки задачи и выявления ошибки

Fig. 4. Example of automatic problem verification and error detection

```
def check_rules(task):
    if task["scenario"] == "Игровой":
        if not ("соревновательный" in task["elements"] or "квест" in task["elements"]):
            raise ValueError("Игровой сценарий требует элемент 'соревновательный' или 'квест'")
    elif task["scenario"] == "Формальный":
        if "юмор" in task["elements"]:
            raise ValueError("В формальном сценарии запрещён элемент 'юмор'")
```

Р и с. 5. Программная реализация правила выполнена на Python

Fig. 5. Software implementation of the rule in Python

2.4 Правила генерации задачи

Правила – это формальные ограничения, указывающие, какие элементы задачи и как именно могут сочетаться при автоматическом создании условия. Основная цель – исключить некорректные или противоречивые комбинации и гарантировать соответствие задачи выбранному уровню сложности, профилю ученика и заданным нестандартным элементам. Без таких правил генератор может выдавать логически неполные или несоразмерно сложные условия.

Онтология описывается множеством задач T , тем Θ , нестандартных элементов E и отношениями между ними. Для каждой задачи определены:

$hasEl \subseteq T \times E$ — отношение «задача включает элемент»;

$hasTopic \subseteq T \times \Theta$ — «задача относится к теме»;

$diff: T \rightarrow \{1,2,3\}$ — уровень сложности;

$scenario: T \rightarrow \Sigma$ — сценарий (формальный, игровой и др.);

$J^* \subseteq E \times E$ — множество жёстких несовместимостей (см. Приложение А).

Множество элементов задачи задаётся как $Els(t) = \{e \in E \mid (t, e) \in hasEl\}$.

Примеры правил:

Правило 1. Ограничение числа нестандартных элементов по уровню сложности:

Если $A1 = 1$ (низкий уровень), $|E| = 0$,

Если $A1 = 3$ (высокий уровень), $|E| \leq 2$.

Правило 2. Запрет противоречий:

Если $(e_1, e_2) \in J^*$, то $\{e_1, e_2\} \notin E'$.

Правило 3. Фильтрация по теме и допустимым параметрам

$E' = \{e \in E \mid (e, \theta) \in hasTopic, diff(e) = k\}$.

Правило 4. Определение сценария задачи (реализация на Python, рис. 5).

Для отбора допустимых элементов используются базовые запросы к онтологии:

- по одному элементу $Q1(e) = \{e \in E \mid (e, \theta) \in hasTopic\}$.

- с включением и исключением $Q_{inc/exc}(S, X) = \{e \in E \mid S \subseteq E', X \cap E' = \emptyset\}$.

- с фильтром по теме и сложности $Q_{\theta,k}(S, X) = \{e \in Q_{inc/exc}(S, X) \mid (e, \theta) \in hasTopic, diff(e) = k\}$.

Итоговый набор элементов формируется как

$E^* = Q_{\theta,k}(S, X) \setminus \{e \mid \exists (e, e') \in J^*\}$.

Таким образом, онтология не возвращает готовую задачу, а предоставляет корректный набор нестандартных элементов E^* .



```
SELECT ?element WHERE {
  ?element a :NonStandardElement ;
           :hasTopic :Arithmetic ;
           :difficulty 2 .
  FILTER NOT EXISTS { ?element :incompatibleWith :Paradox }
}
```

Р и с. 6. Пример запроса SPARQL на возврат всех допустимых нестандартных элементов для темы «Арифметика» уровня сложности 2, исключая элемент «Парадокс»

Fig. 6. Example of a SPARQL query returning all admissible non-standard elements for the topic "Arithmetic" at difficulty level 2, excluding the element "Paradox"

На их основе генератор ИИ формирует текст задачи, а программные проверки (как в Правиле 4) дополнительно контролируют соответствие сценарию и стилю подачи.

В системе такие запросы реализуются через SPARQL, пример запроса показан на рис. 6.

3. Результаты исследования

Разработанная методика была реализована в прототипе программной системы – генератора олимпиадных задач. Была наполнена онтология, включающая около 150 концептов математических понятий и 24 класса нестандартных элементов, а также база данных из 200 оригинальных задач, созданных экспертами для обучения системы. Ниже представлены примеры результатов работы генератора и анализ его эффективности.

Пример 1. Задача с междисциплинарным элементом и элементом неопределённости.

Запрос: тема – планиметрия, навык – пространственное мышление, уровень сложности – 2 (средний), нестандартный элемент – междисциплинарность (астрономия). Сгенерированная задача: «На звёздной карте созвездие изображено треугольником со сторонами 3, 4 и x сантиметров. При каких значениях x треугольник может представлять реальное созвездие, если известно, что углы при звёздах могут быть любыми?». Эта задача требует знания неравенства треугольника и в то же время демонстрирует неопределённость астрономического контекста. Эксперты отметили корректность и соответствие уровню сложности: задача выглядит нестандартной за счёт формулировки, но решается классическими методами.

Пример 2. Задача с игровым сценарием и эвристическим элементом. Запрос: тема – теория чисел (делимость), навык – логическое мышление, уровень – 3 (высокий), элементы – игровой сценарий, эвристика. Сгенерированная задача: «Два игрока по очереди называют по одному натуральному числу, не превышающему 20. Первый игрок выигрывает, если сумма всех названных чисел делится на 3. В противном случае выигрывает второй. Предположим, что игра закончилась победой первого игрока. Какой нестандартный ход мог обеспечить ему выигрыш независимо от действий второго игрока?». Для решения необходимо догадаться, что первый игрок может всегда дополнять сумму до ближайшего

кратного 3. Это типичная эвристическая стратегия. Эксперты признали задачу оригинальной и соответствующей высокому уровню.

Пример 3. Задача с элементом сюжетной стилизации. Запрос: тема – арифметика (делимость), навык – системное мышление, уровень – 2 (средний), элемент – сюжетная стилизация (пиратский рассказ). Сгенерированная задача: «Капитан пиратского корабля Джек Вихрь и его помощник Ларри нашли старую карту сокровищ. Чтобы открыть сундук, нужно ввести код из трёх чисел: количества золотых монет, серебряных монет и драгоценных камней. Количество золотых монет делится на 3, серебряных – на 4, камней – на 5. Если всего найдено 18 предметов, сколько золотых монет нашли пираты?». Эта задача соединяет школьный сюжет с арифметическим приёмом решения через систему ограничений. Эксперты отметили, что подобные задачи повышают мотивацию учащихся за счёт «игрового антуража».

Для проверки конкурентоспособности методики был проведён эксперимент: одинаковый запрос (алгебра, неравенства, уровень сложности 3, баллы=8, элементы: многоуровневая структура + графическая интерпретация) был задан ряду LLM (Claude, GPT-4o, Gemini, GigaChat, DeepSeek, Mistral, Perplexity).

Важно отметить, что в прототипе генератора применяются эти же модели, однако они работают не напрямую, а во взаимосвязи с онтологией математических понятий и нестандартных элементов, системой правил генерации (ограничение совместимости, контроль сложности и др.), что позволяет создавать специализированные промпты, которые структурируют запрос к LLM. Именно эта архитектура обеспечивает предсказуемость и устойчивость генерации. Результаты сравнения представлены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1. Сравнение качества задач, сгенерированных LLM и генератором с онтологическим контролем

Table 1. Comparison of the quality of problems generated by an LLM and by a generator with ontological control

Модель	Корректные задачи (%)	Ошибки в условиях (%)	Ошибки в решении (%)	Ошибки в ответе (%)	Средний балл (0–5)
Генератор	83	7	10	0	4.2
Claude	82	9	9	0	4.1
GPT-4o	78	15	7	0	3.8
Gemini	75	13	12	0	3.6
GigaChat	62	21	17	0	2.8
DeepSeek	58	26	16	0	2.5
Mistral	52	28	20	0	2.3
Perplexity	45	32	23	0	2.0

Экспертная оценка подтвердила: 83% задач генератора корректны, что соответствует лучшим результатам среди LLM (Claude – 82%) и превосходит остальные модели. При этом характер ошибок различен:

- у LLM типичны противоречия и тривиальность условий,
- у генератора ошибки связаны в основном с



двусмысленностью формулировок или перегрузкой нестандартными элементами, что устранимо уточнением правил.

Таким образом, методика доказала реализуемость: каждая категория нестандартных элементов из классификации была использована хотя бы в одном корректном примере. В отличие от шаблонных генераторов, предложенный подход обеспечивает широкий спектр форматов задач и контролируемое качество благодаря интеграции онтологии, правил и специализированных промптов.

4. Обсуждение и заключение

1. Показано, что сочетание экспертного участия и алгоритмической генерации позволяет получать качественные задачи. Метод аналогий, реализуется с помощью ИИ и способствует разнообразию и логической согласованности задач, а участие эксперта

– устранению ошибок и адаптации задач к образовательным целям.

2. Разработана онтологическая модель, включающая понятие нестандартных элементов задачи и классификацию из 24 категорий (эвристические приёмы, многозначность условий, междисциплинарные связи, игровые форматы и др.). Эта классификация легла в основу систематизации и генерации задач, обеспечивая семантический контроль – проверку совместимости элементов, соответствие сложности и логической корректности.

3. Предложена методика генерации математических задач с нестандартными элементами, основанная на взаимодействии эксперта, онтологической модели и ИИ-генератора. Она структурирует процесс создания заданий по заданным навыкам и уровням сложности, сочетает экспертные оценки с алгоритмической проверкой решений и позволяет строить семантически контролируемую базу задач.

References

1. Rostovtsev A.S. Development of creative thinking in tenth- and eleventh-graders while solving non-standard mathematical problems. *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin*. 2019;(4):30-37. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.104.4.030>
2. du Plooy E., et al. Personalized adaptive learning in higher education: A scoping review of key characteristics and impact on academic performance and engagement. *Heliyon*. 2024;10(21):e39630. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e39630>
3. Konovalov Ya.Yu., Sobolev S.K., Ermolaeva M.A. Methodological aspects of automatic generating problems on linear algebra. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2013;(5):8. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: RHAKUF
4. Kruchinin V., Kuzovkin V. Overview of Existing Methods for Automatic Generation of Tasks with Conditions in Natural Language. *Computer Tools in Education*. 2022;(1):85-96. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.32603/2071-2340-2022-1-85-96>
5. Liu S., Feng J., Yang Z., Luo Y., Wan Q., Shen X., Sun J. COMET: “cone of experience” enhanced large multimodal model for mathematical problem generation. *Science China Information Sciences*. 2024;67:220108. <https://doi.org/10.1007/s11432-024-4242-0>
6. Lu Z., et al. MathGenie: Generating Synthetic Data with Question Back-translation for Enhancing Mathematical Reasoning of LLMs. *arXiv:2402.16352*. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.16352>
7. Škultéty M., Pastor K. Problems in Solving Non-Standard Mathematical Tasks. *ICERI2020 Proceedings*. 2020. p. 1018-1022. <https://doi.org/10.21125/iceri.2020.0291>
8. Xu Y., Smeets R., Bidarra R. Procedural generation of problems for elementary math education. *International Journal of Serious Games*. 2021;8:49-66. <https://doi.org/10.17083/ijsg.v8i2.396>
9. Wang Z., Lan A., Baraniuk R. Math Word Problem Generation with Mathematical Consistency and Problem Context Constraints. *arXiv:2109.04546*. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.04546>
10. Shah V., et al. AI-Assisted Generation of Difficult Math Questions. *arXiv:2407.21009*. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.21009>
11. Zhou Q., Huang D. Towards Generating Math Word Problems from Equations and Topics. In: Proceedings of the 12th International Conference on Natural Language Generation. Tokyo, Japan: Association for Computational Linguistics; 2019. p. 494-503. <https://doi.org/10.18653/v1/W19-8661>
12. Liyanage V., Ranathunga S. Multi-lingual Mathematical Word Problem Generation using Long Short Term Memory Networks with Enhanced Input Features. In: Proceedings of the 12th Conference on Language Resources and Evaluation (LREC 2020). European Language Resources Association; 2020. p. 4709-4716. Available at: <https://mro.massey.ac.nz/items/04e912d5-80e0-4328-9225-2d6449a0c462> (accessed 29.03.2025).
13. Nuyakshin M.G. Ontological model of problems for preparation for mathematical olympiads. *Modern Science: actual problems of theory and practice*. 2024;(10-2):68-73. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.37882/2223-2966.2024.10-2.18>
14. George G., Lal A.M. Review of ontology-based recommender systems in e-learning. *Computers & Education*. 2019;142:103642. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103642>
15. Nevzorova O.A., Gizatullin B.T. A system for automatic construction of knowledge graphs of mathematical documents. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023;165(3):264-281. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.264-281>



16. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L. OntoMath: A Linguistically Grounded Educational Mathematical Ontology. In: Benz Müller C., Miller B. (eds.) *Intelligent Computer Mathematics*. CICM 2020. *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 12236. Cham: Springer; 2020. p. 157-172. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_10
17. Kostenko K.I., Lebedeva A.P. The Formalized Mathematical Content Cognitive Management. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018;14(3):616-625. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.616-625>
18. Balashova I.Yu., Volynskaya K.I., Makarychev P.P. Methods and means of generation of test item from natural language texts. *Models, Systems, Networks in Economics, Engineering, Nature and Society*. 2016;(1):195-202. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: VTYLVX
19. Sheveleva O.E., Dobrynin V.N., Goncharova Ya.A. Ontological Model as a Means of Implementation of Competency Assessment System. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(2):460-468. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202302.460-468>
20. Kumar S., Kumar P.S. OLGA: An Ontology and LSTM-based approach for generating Arithmetic Word Problems (AWPs) of transfer type. *arXiv:2211.12164*. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.12164>
21. Kumar S., Kumar P.S. Generating and Solving Complex Transfer Type Arithmetic Word Problems: An Ontological Approach. *Semantic Web*. 2023;0(0):1-20. Available at: <https://www.semantic-web-journal.net/system/files/swj3722.pdf> (accessed 29.03.2025).
22. Rostovtsev A.S. Developing mathematical creativity in high school students based on a multi-level system of non-standard mathematical problems. *Modern Pedagogical Education*. 2019;(9):113-117. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: BLZOQV
23. Kolobov A.N. Features of teaching solving olympiad problems in the school course of mathematics. *The world of science, culture and education*. 2022;(4):18-21. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.24412/1991-5497-2022-495-18-21>
24. Menkova S.V. Mathematical tasks as an effective means to form critical thinking of students. *Modern problems of science and education*. 2022;(5):24. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.17513/spno.32055>
25. de Losada M.F., Taylor P.J. Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education. *ZDM Mathematics Education*. 2022;54:941-959. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z>

Поступила 29.03.2025; одобрена после рецензирования 11.05.2025; принята к публикации 29.06.2025.

Submitted 29.03.2025; approved after reviewing 11.05.2025; accepted for publication 29.06.2025.

Об авторах:

Нуякшин Михаил Геннадьевич, аспирант кафедры системного анализа и управления Института системного анализа и управления, ГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна» (141982, Российская Федерация, Московская область, г. Дубна, ул. Университетская, д. 19), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0008-4269-4369>, mihail.nuyakshin@mail.ru

Черемисина Евгения Наумовна, директор Института системного анализа и управления, ГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна» (141982, Российская Федерация, Московская область, г. Дубна, ул. Университетская, д. 19), доктор технических наук, профессор, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6041-8359>, e.cheremisina@geosys.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Mihail G. Nuyakshin, Postgraduate student of the Chair of System Analysis and Management, Institute of System Analysis and Management, Dubna State University (19 Universitetskaya St., Dubna 141980, Moscow Region, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0008-4269-4369>, mihail.nuyakshin@mail.ru

Evgeniya N. Cheremisina, Head of the Institute of System Analysis and Management, Dubna State University (19 Universitetskaya St., Dubna 141980, Moscow Region, Russian Federation), Dr. Sci. (Tech.), Professor, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6041-8359>, e.cheremisina@geosys.ru

All authors have read and approved the final manuscript.



Приложение А Appendix A

Классификация нестандартных элементов олимпиадных задач Classification of non-standard elements of olympiad problems

Группа	Категория	Определение (кратко)	Несовместимости	Пример	Реком. уровень
Эвристика	Скрытая подсказка	Намёк в условии на шаг решения	—	«... в обеих частях одинаковое число...»	1–3
	Ложный след	Лишняя цепочка рассуждений	*Недостаточные данные, *Парадокс	«Учитель купил 100 тетрадей... но нужно 3»	2–3
	Переформулировка	Требуется переписать условие в другой форме	—	«Запишите задачу как систему уравнений»	2–3
	Инвариант	Использование неизменяемой величины	—	«После каждого хода сумма остаётся чётной»	2–3
	Экстремум	Принцип наибольшего / наименьшего	*Недостаточные данные, *Парадокс	«Найдите минимальное число ходов...»	3
Неопределённость	Избыточные данные	Данные, которые не используются	*Парадокс	«Даны три числа, но используется только два»	1–3
	Недостаточные данные	Решение возможно при неполных данных	*Парадокс, Сюжет с правилами, Игровая стратегия	«Неизвестен возраст, но известно соотношение...»	2–3
	Парадокс	Условие содержит противоречие	*Избыточные данные, *Недостаточные данные, Игровая стратегия	«На табличке написано: “Это утверждение ложно”»	3
Комбинаторика	Случайный выбор	Учёт вероятностей	Недостаточные данные	«Выберите случайный шар из урны...»	2–3
	Игровая стратегия	Анализ оптимальных ходов игроков	*Недостаточные данные, *Парадокс	«Кто выиграет при оптимальной игре?»	2–3
	Перестановки/комбинации	Подсчёт размещений и комбинаций	Парадокс	«Сколько способов рассадить 5 учеников...»	1–3
Игровые сюжеты	Сюжетная оболочка	Игровой или сказочный контекст	—	«Волшебник загадал число...»	1–2
	Сюжет с правилами	Условие включает специальные правила	Недостаточные данные	«Ходы разрешены только по диагонали»	2–3
Логика	Логическая цепочка	Построение цепи логических выводов	—	«Если Петя старше Вани, а Ваня старше Оли...»	1–3
	Булева комбинация	Условие через логические операции	—	«Число делится на 2 и не делится на 3»	2–3
	Мини-головоломка	Короткая логическая задача	—	«У одного из трёх всегда правда...»	1–2
Геометрия	Сетка	Координатная или клеточная сетка	*Недостаточные данные	«Сколько квадратов на сетке 5×5?»	1–3
	Координаты	Условие через координаты	—	«Найдите расстояние между A(2,3) и B(5,7)»	2–3
	Необычная конструкция	Добавление вспомогательного элемента	*Недостаточные данные	«Постройте высоту из точки A»	2–3
	Гибридные данные	Числовые и геометрические условия совместно	*Недостаточные данные, *Парадокс	«Периметр равен 12, площадь равна...»	2–3
Числовые системы	Остатки	Арифметика по модулю	*Недостаточные данные (не указан модуль)	«Найдите остаток при делении 2 ⁿ на 7»	2–3
	Нетривиальные равенства	Необычные алгебраические преобразования	—	«Докажите, что (a+b) ² ≥ 4ab»	3
	Последовательности	Работа с рекуррентными рядами	*Недостаточные данные, *Парадокс	«Найдите 10-й член последовательности...»	2–3
Смешанные	Межпредметные элементы	Элементы из смежных наук	—	«Скорость роста бактерий...»	2–3

Примечания.

1. Несовместимости, отмеченные звёздочкой (*), являются жёсткими: такие сочетания исключаются системой автоматически при генерации задач.
2. Прочие несовместимости являются мягкими: они могут допускаться только в особых случаях (например, при высоком уровне сложности) и требуют дополнительной проверки корректности формулировки экспертом.
3. Таблица основана на концептуальной классификации нестандартных элементов (см. рис. 2).