

<https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.46-55>
УДК 621

Оригинальная статья

Развитие методов оптимизации информационных систем на основе вейвлет-канонических разложений и технологий вейвлет-нейронной сети

И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова*

ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22

* TKonashenkova64@mail.ru

Аннотация

Канонические разложения (КР) стохастических процессов (СтП) широко используются в прикладной математике, информатике и теории управления. На основе вейвлет-вычислительных технологий авторами разработана теория вейвлет-канонических разложений (ВЛКР), а также теория КР на основе вейвлет-нейронной сети (КРВНС). В докладе после краткого обзора развития теории КР, ВЛКР и КРВНС рассматривается метод синтеза оптимальной информационной системы по энергетическому критерию (ЭК). Описан нейросетевой метод построения ЭК-оптимальной нестационарной линейной стохастической системы (СтС), описываемой уравнениями В.С. Пугачева для параметров качества информационной системы. Приведена постановка задачи оптимизации. Дан нейросетевой алгоритм построения КРВНС случайной помехи из состава входного СтП. Описан нейросетевой метод построения ЭК-оптимального оператора СтС и ЭК-оптимальной оценки выходного СтП. Получены формулы для математического ожидания и дисперсии ошибки ЭК-оптимальной оценки выходного СтП. Приводится иллюстративный пример. Сравнительный анализ предлагаемого нейросетевого метода построения оптимальной оценки выходного СтП системы, описываемой уравнениями В. С. Пугачёва, с другими приближенными методами, разработанными авторами, показал, что все методы дают одинаковый порядок точности вычислений. Но предлагаемый метод проще в исполнении, так как не требует предварительных аналитических выкладок в том случае, когда случайные параметры системы заданы только первыми двумя конечными вероятностными моментами.

Ключевые слова: вейвлет-каноническое разложение, информационная система, каноническое разложение, каноническое разложение на основе вейвлет-нейронной сети, параметр качества информационной системы, стохастический процесс, стохастическая система

Финансирование: Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Развитие методов оптимизации информационных систем на основе вейвлет-канонических разложений и технологий вейвлет-нейронной сети / И. Н. Сеницын [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 1. С. 46-55. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.46-55>

© Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д., 2025



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Development of Information System Optimization Methods Based on Wavelet Canonical Expansions and Wavelet Neural Network Technologies

I. N. Sinitsyn, V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, T. D. Konashenkova*

Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Address: 44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation

* Tkonashenkova64@mail.ru

Abstract

Canonical expansion (CE) of stochastic processes (StP) are widely used in applied mathematics, informatics and control. Based on wavelet computing technologies, the authors developed the theory of wavelet canonical decompositions (WCDE), as well as the theory of canonical decompositions based on a wavelet neural network (WNNN). In the report, after a brief review of the development of the theory of canonical expansions, wavelet-canonical expansions and the theory of canonical expansions based on a wavelet neural network, a method for synthesizing an optimal information system based on the energy criterion (EC) is considered. Problem statement is given for V.S. Pugachev IS and WCDE. WCDE is constructed of CE of input StP. Equations for EC-optimal operator are presented. Formulae for mathematical expectation and variance of EC-optimal output StP estimate are outlined. Illustrate example confirms effective of suggested method in comparison with other two known methods.

Keywords: canonical expansion, canonical expansion based on wavelet neural network, information system, quality parameter of information system, stochastic process, stochastic system, wavelet canonical expansion

Funding: The work was carried out using the infrastructure of the Center for Collective Use "High-Performance Computing and Big Data" (CCU "Informatics") of the Federal Research Center of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Development of Information System Optimization Methods Based on Wavelet Canonical Expansions and Wavelet Neural Network Technologies. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2025;21(1):46-55. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.46-55>



Введение

Канонические разложения (КР) стохастических процессов (СтП) как в рамках корреляционной теории, так и теории конечномерных вероятностных распределений широко используются в прикладной математике, кибернетике и информатике для решения задач теоретико-вероятностного и статистического моделирования, системного анализа и синтеза стохастических систем (СтС) по различным критериям¹ [1-3]. В рамках корреляционной теории на основе вейвлет-вычислительных технологий разработана теория вейвлет КР (ВЛКР). Развитие теории ВЛКР в рамках общей теории конечномерных распределений встречает серьезные вычислительные трудности и возможно, например, на основе КР с независимыми компонентами² [2, 3]. В [4] развита корреляционная теория и методы моделирования на основе КР вейвлет-нейронной сети (КРВНС).

Применительно к задачам оптимизации качества информационных систем высокой доступности, описываемых линейными и нелинейными уравнениями для параметров качества в форме В. С. Пугачева³ [3], [5, 6] получены следующие результаты.

Для критерия минимума средней квадратичной ошибки (СКО) в работах⁴ [7-15] решены задачи синтеза оптимальных нестационарных линейных и нелинейных СтС на основе ВЛКР входных СтП. В [16, 17] предложен рекуррентный метод построения ВЛКР СтП на основе ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями⁵. В [18] построено КР СтП на основе вейвлет-нейронной сети (ВНС).

В [7-16] решена задача определения оптимальной оценки выходного СтП по байесову критерию (БК), т.е. критерию минимума математического ожидания заданной функции потерь.

В [7-11] на основе ВЛКР построены линейные операторы, оптимальные по критерию минимума СКО и по сложно-статистическому критерию, в виде наборов формальных правил, описывающих реакцию оптимального оператора системы на базисные вейвлет-функции. Набор формальных правил задается после решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая выписывается на основе операторного уравнения, связывающего ковариационную функцию входного сигнала системы и совместную ковариационную функцию входного и выходного сигналов системы.

В работах [4], [12-15] описано решение задачи синтеза оптимальной по БК нестационарной линейной и нелинейной СтС методом ВЛКР. Согласно⁶ [3] оптимальная система, обеспечивающая минимум условного математического ожидания функции потерь относительно входного СтП, будет обеспечивать минимум безусловного математического ожидания

функции потерь. Получена формула для условной плотности вероятности выходного СтП относительно входного СтП, наблюдаемого на конечном промежутке времени. Далее задача построения БК-оптимальной оценки выходного СтП сводится к задаче нахождения минимума условного математического ожидания функции потерь относительно входного СтП.

В настоящей работе после краткого обзора описан нейросетевой метод построения оптимальной по энергетическому критерию (ЭК) нестационарной линейной СтС, описываемой уравнениями В.С. Пугачева. В разделе 1 приведена постановка задачи. В разделе 2 дан нейросетевой алгоритм построения КРВНС случайной помехи из состава входного СтП. В разделе 3 описан нейросетевой метод построения ЭК-оптимального оператора СтС и ЭК-оптимальной оценки выходного СтП. Приведены формулы для математического ожидания и дисперсии ошибки ЭК-оптимальной оценки выходного СтП. В разделе 4 приведен иллюстративный пример.

Постановка задачи

Пусть стохастические одномерные действительные СтП $Z(t)$ и $W(t)$ ($t \in [t_0, t_k]$) заданы на вероятностном пространстве $(\mathcal{L}^2[t_0, t_k], \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Здесь $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ – гильбертово пространство функций $\xi(t)$ ($t \in [t_0, t_k]$) с нормой

$$\|\xi\| = \left[\int_{t_0}^{t_k} |\xi(t)|^2 dt \right]^{1/2},$$

$\mathcal{A}$ – σ -алгебра в $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, $\mathcal{P}(\xi)$ – вероятность события ξ .

Рассмотрим линейную СтСВД, описываемую уравнениями В. С. Пугачёва [9, 10]. На вход СтСВД поступает СтП $Z(t)$ в виде суммы полезного сигнала $S(t)$ и нормально распределенной случайной помехи $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и известной ковариационной функцией $K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]$ ($t_1, t_2 \in [t_0, t_k]$), $K_X(t_1, t_2) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$. Полезный сигнал $S(t)$ представляет собой линейную комбинацию заданных случайных параметров U_r ($r = \overline{1, N_U}$):

$$S(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \xi_r(t) \quad (1)$$

где $\xi_1(t), \dots, \xi_{N_U}(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ – известные структурные функции;

$U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{N_U}]^T$ – N_U -мерная случайная величина (СВ) имеет известные конечные первые и вторые вероятностные моменты. Математическое ожидание СВ $U(t)$ отлично от нуля, $M[U] = [m_1^U \ m_2^U \ \dots \ m_{N_U}^U]^T$. Тогда входной СтП имеет вид

$$Z(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \xi_r(t) + X(t). \quad (2)$$

¹ Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.; Сеницын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применение. 2-е изд., перер. и доп. М.: Торус Пресс, 2023. 816 с. <https://doi.org/10.30826/94588-308-6>

² Там же.

³ Там же.

⁴ Метод функциональной байесовой оптимизации, основанный на вейвлет канонических представлениях гауссовских стохастических процессов / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления : сб. науч. тр. М.: ИПУ РАН, 2024. С. 528-532. EDN: EYDAPY

⁵ Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.

⁶ Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.; Сеницын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применение. 2-е изд., перер. и доп. М.: Торус Пресс, 2023. 816 с. <https://doi.org/10.30826/94588-308-6>



На выходе системы требуется получить СтП $W(t)$, представляющий собой заданное преобразование полезного сигнала $W(t) = P_t[S(t)]$:

$$W(t) = \sum_{r=1}^{N_L} U_r \zeta_r(t) \quad (3)$$

Здесь $\zeta_1(t), \dots, \zeta_{N_L}(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ – также известные функции. Требуется найти оптимальную СтСВД с оператором P_t^* , выходной СтП которой $W^*(t) = P_t^*[Z(t)]$ обеспечивал бы минимум второго вероятностного момента ошибки системы $\eta(t) = W(t) - W^*(t)$:

$$\Gamma_\eta(t) = \min, \quad (4)$$

где $\Gamma_\eta(t) = M[\eta(t)]^2$, $\Gamma_\eta(t) = D_\eta(t) + m_\eta^2(t)$, $m_\eta(t) = M[\eta(t)]$, $D_\eta(t) = M[\eta(t) - m_\eta(t)]^2$. Систему с оператором P_t^* , обеспечивающим минимум функционала (4), будем называть оптимальной по энергетическому критерию СтСВД (далее – ЭК-оптимальной СтСВД), а $W^*(t)$ – ЭК-оптимальной оценкой СтП $W(t)$.

Для применения технологии искусственных нейронных сетей надо смоделировать N_Z независимых реализаций входного СтП $\{z^i(t)\}_{i=1}^{N_Z}$, наблюдаемого на заданном промежутке времени $[t_0, t_k]$, и соответствующее им множество независимых значений выходного СтП $\{w_i(t)\}_{i=1}^{N_Z}$. В ответ на каждую реализацию входного СтП $z^i(t)$ ЭК-оптимальная СтСВД выдает оценку $w_i(t)$. Тогда согласно закону больших чисел оценка $\Gamma_\eta(t)$ вычисляется по формуле:

$$E(t) = \frac{1}{N_Z} \sum_{i=1}^{N_Z} (w_i(t) - w_i^*(t))^2. \quad (5)$$

Построение КРВНС случайной помехи $X(t)$

Задача построения КР СтП $X(t)$ ($t \in [t_0, t_k]$) сведена к задаче аппроксимации ковариационной функции $K_X(t_1, t_2)$ ($t_1, t_2 \in [t_0, t_k]$) линейной зависимостью нелинейных двумерных вейвлет-функций вида

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{v=1}^V D_v^* g_v(t_1) g_v(t_2),$$

которая решена на основе трехслойной ВНС. Здесь $g_v(t)$ – базисные функции ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями пространства $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$. Согласно обратной теореме Пугачева⁸, получено искомого КР СтП $X(t)$:

$$X(t) = \sum_{v=1}^V V_v g_v(t),$$

где V_v – некоррелированные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями D_v^* .

Для обучения с учителем ВНС задаётся множество маркированных примеров $T = \left\{ (\tau^i, d^i) \right\}_{i=1}^N$, $\tau^i = [t_1^i \ t_2^i]^T$, $d^i = K_X(t_1^i, t_2^i)$. Активационные функции нейронов скрытого слоя построены на основе вейвлет-базиса:

$$\Psi_v(\tau) = \Psi_v(t_1, t_2) = g_v(t_1) g_v(t_2) \quad (v = \overline{1, L}).$$

Вектор признаков $\Psi(\tau) = [\Psi_0(\tau) \ \Psi_1(\tau) \ \dots \ \Psi_L(\tau)]^T$ представляет собой «образ», индуцированный в пространстве признаков при предъявлении вектора входного сигнала $\tau = [t_1 \ t_2]^T$.

Функционирование ВНС можно описать следующим образом:

- входной сигнал: $\tau^i = [t_1^i \ t_2^i]^T$ ($i = \overline{1, N}$);
- скрытый слой ВНС задаёт пространство признаков: $\Psi_v(\tau^i) = \Psi_v(t_1^i, t_2^i) = g_v(t_1^i) g_v(t_2^i)$ ($v = \overline{1, L}$), ($i = \overline{1, N}$);
- выходной слой ВНС вычисляет отклик системы: $y^i(n) = \sum_{v=1}^L w_v(n) \Psi_v(\tau^i)$, или в векторной форме $y^i(n) = \Psi^T(\tau^i) w(n)$ ($i = \overline{1, N}$) для итерации n алгоритма.

Выходной сигнал $y^i(n)$ для каждого i -го примера сравнивается с соответствующим желаемым откликом системы $d^i(n)$. Их разность определяет сигнал ошибки $e^i(n) = d^i - y^i(n) = d^i - \Psi^T(\tau^i) w(n)$. Функция стоимости задаётся в виде среднеквадратичной ошибки (СКО) для всего набора примеров:

$$E^K(w(n)) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (e^i(n))^2.$$

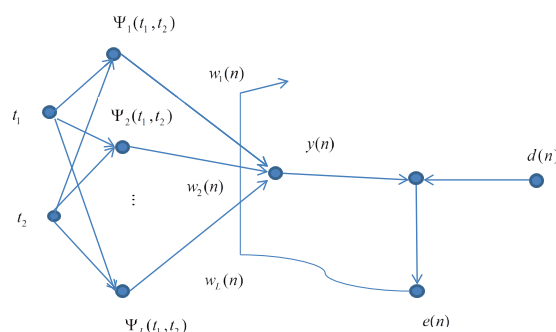


Рис. 1. Граф передачи сигнала в ВНС

Fig. 1. Graph of signal transmission to a wavelet neural network (WNN)

Источник: здесь и далее в статье все рисунки составлены авторами.

Source: Hereinafter in this article all figures were drawn up by the authors.

На рис. 1 представлен граф прохождения сигнала в ВНС в процессе обучения, основанного на коррекции СКО. Сигнал ошибки $e(n)$ инициализирует механизм управления, цель которого заключается в применении последовательности корректировок к синаптическим весам w . Эти изменения нацелены на пошаговое приближение выходного сигнала y к желаемому d . На рис. 1 видно, что обучение на основе коррекции ошибок – это пример замкнутой системы с обратной связью. Из теории управления известно, что устойчивость такой системы определяется параметром обратной связи, т. е. параметром скорости обучения η . Для обеспечения устойчивости и сходимости итеративного процесса обучения требуется тщательный подбор этого параметра. Пошаговая корректировка синаптических весов продолжается, как правило, до тех пор,

⁷ Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.;

⁸ Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.; Синицын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применение. 2-е изд., перер. и доп. М.: Торус Пресс, 2023. 816 с. <https://doi.org/10.30826/94588-308-6>



пока система не достигнет устойчивого состояния, при котором синаптические веса практически стабилизируются. В этой точке процесс обучения останавливается. При этих значениях синаптических весов достигается минимум функции стоимости.

Преимущества предлагаемого подхода нахождения минимума функции $E^k(w(n))$ по сравнению со стандартными методами, основанными на решении системы уравнений

$$\frac{\partial E^k}{\partial w_l} = 0 \quad (l = \overline{1, L})$$

и приводящими к сложным математическим процессам, заключаются в простоте вычисления градиента

$$\nabla E^k(w) = \left[\frac{\partial E^k}{\partial w_1} \quad \frac{\partial E^k}{\partial w_2} \quad \dots \quad \frac{\partial E^k}{\partial w_L} \right]^T,$$

$$\frac{\partial E^k}{\partial w_l} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Psi_i(\tau^i) \left(d^i - \sum_{j=1}^L w_j(n) \Psi_j(\tau^i) \right) \quad (l = \overline{1, L}),$$

и сходимости алгоритма при $0 < \eta < 1$.

Нейросетевой синтез ЭК-оптимального оператора СтС

Входной СтП представляется в виде вейвлет-разложения

$$Z(t) = \sum_{v=1}^L Z_v g_v(t), \quad (6)$$

$$\text{где } Z_v = \sum_{r=1}^{N_{tr}} \alpha_{vr} U_r + V_v \quad (v = 1, 2, \dots, L), \quad \alpha_{vr} = \int_{t_0}^{t_k} g_v(\tau) \xi_r(\tau) d\tau. \quad (7)$$

В [16], [18] доказано, что между СтП $Z(t) \quad t \in [t_0, t_k]$ и совокупностью СВ $Z_v \quad (v = 1, 2, \dots, L)$ формулы (6), (7) устанавливают взаимно однозначное соответствие. Каждой реализации СтП $Z(t)$ соответствуют определенные возможные значения СВ $Z_v \quad (v = 1, 2, \dots, L)$, и наоборот, каждой совокупности СВ $Z_v \quad (v = 1, 2, \dots, L)$ соответствует определенная реализация СтП $Z(t)$.

Процесс моделирования N_Z реализаций входного СтП $\{z^i(t)\}_{i=1}^{N_Z}$, наблюдаемого на заданном промежутке времени $[t_0, t_k]$, состоит в моделировании N_Z совокупностей СВ $\{Z_v^{Li}\}_{i=1}^{N_Z}$. На выходе СтС должна получить соответствующее множество реализаций требуемого выходного СтП $\{w_i(t)\}_{i=1}^{N_Z}$.

Таким образом, на вход ВНС подается обучающаяся выборка $\left\{ \left[\begin{bmatrix} t & Z_1^{Li} & Z_2^{Li} & \dots & Z_L^{Li} \end{bmatrix}^T, w_i(t) \right] \right\}_{i=1}^{N_Z}$.

В качестве модели ЭК-оптимального оператора рассмотрим линейную композицию базисных вейвлет-функций со случайными коэффициентами Z_v^L и неизвестными весовыми коэффициентами h_v^L :

$$W^{L*}(t) = \sum_{v=1}^L h_v^L Z_v^L g_v(t). \quad (8)$$

Тогда активационные функции нейронов скрытого слоя примут вид

$$G_v^L(t) = Z_v^L g_v(t) \quad (v = \overline{1, L}). \quad (9)$$

Пусть $h^L = [h_1^L \quad h_2^L \quad \dots \quad h_L^L]^T$ – вектор весовых коэффициентов, $y^L = [y_1^L \quad y_2^L \quad \dots \quad y_{N_Z}^L]^T$ – выходной сигнал ВНС,

$$y_i^L = \sum_{v=1}^L h_v^L Z_v^{Li} g_v(t) = \sum_{v=1}^L h_v^L G_v^{Li}(t). \quad (10)$$

Выходной сигнал y_i^L для каждого i -го примера сравнивается с соответствующим желаемым откликом системы $d^i = w_i(t) \quad (i = \overline{1, N_Z})$ и вычисляется ошибка $e^{Li} = d^i - y_i^L$. Функция стоимости⁹ задается в виде СКО для всего набора примеров:

$$E(h^L) = \frac{1}{2N_Z} \sum_{i=1}^{N_Z} (e^{Li})^2 = \frac{1}{2N_Z} \sum_{i=1}^{N_Z} \left(d^i - \sum_{v=1}^L h_v^L G_v^{Li}(t) \right)^2. \quad (11)$$

Обучение ВНС происходит посредством интерактивного процесса корректировки синаптических весов $h_v^L \quad (v = \overline{1, L})$ методом наискорейшего спуска. Начиная с исходного значения $h^L(0)$, генерируется последовательность векторов коэффициентов $h^L(1), h^L(2), \dots$, таких что при переходе от n -й итерации алгоритма к $(n+1)$ -й итерации значение функции стоимости уменьшается: $E(h^L(n+1)) < E(h^L(n))$. Корректировка вектора весов выполняется в направлении максимального уменьшения функции стоимости, т.е. в направлении, противоположном вектору градиентов

$$\nabla E(h^L) = \left[\frac{\partial E}{\partial h_1^L} \quad \frac{\partial E}{\partial h_2^L} \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial h_L^L} \right]^T,$$

$$\frac{\partial E}{\partial h_l^L} = -\frac{1}{N_Z} \sum_{i=1}^{N_Z} G_l^{Li}(t) \left(d^i - \sum_{v=1}^L h_v^L G_v^{Li}(t) \right) \quad (l = \overline{1, L}).$$

Для удобства обозначим градиент $\nabla E(h^L) = q^L(n)$. Корректировка весов осуществляется по формуле

$$h^L(n+1) = h^L(n) - \eta q^L(n). \quad (12)$$

Здесь $\eta = const$ – параметр скорости обучения, $0 < \eta < 1$. Процесс обучения проводится от итерации к итерации, пока синаптические веса не стабилизируются около оптимального значения $h^{L*} = [h_1^{L*} \quad h_2^{L*} \quad \dots \quad h_L^{L*}]^T$, а СКО не сойдется к некоторому минимальному значению¹⁰ $E_{\min}^L$ [19].

В результате имеем ЭК-оптимальную систему с выходным процессом

$$W^{L*}(t) = \sum_{v=1}^L h_v^{L*} Z_v^L g_v(t), \quad (13)$$

или для активационных функций (13)

$$G^L(t) = [G_1^L(t) \quad G_2^L(t) \quad \dots \quad G_L^L(t)]^T \quad \text{в матричном виде} \\ W^{L*}(t) = (h^{L*})^T G^L(t). \quad (14)$$

Отсюда ЭК-оптимальный оператор принимает вид

$$P_i^* = [h_1^{L*} g_1(t) \quad h_2^{L*} g_2(t) \quad \dots \quad h_L^{L*} g_L(t)]^T. \quad (15)$$

Если ввести обозначение $Z^L = [Z_1^L \quad Z_2^L \quad \dots \quad Z_L^L]^T$, то ЭК-оптимальная оценка (13) будет определяться формулой

⁹ Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / Пер. с англ. 2-е изд. СПб.: Диалектика, 2020. 1104 с.

¹⁰ Терехов С. А. Вейвлеты и нейронные сети // Научная сессия МИФИ – 2001: III Всерос. науч.-техн. конф. «Нейроинформатика-2001»: Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2001. С. 142-181.



$$W^*(t) = (P_i^*)^T Z^L. \quad (16)$$

Архитектуру ВНС можно описать следующим образом:

- входной сигнал: $\begin{bmatrix} t & Z_1^{Li} & Z_2^{Li} & \dots & Z_L^{Li} \end{bmatrix}^T$ ($i = \overline{1, N_Z}$);
- скрытый слой ВНС задаёт пространство признаков:
 $G_v^{Li}(t) = Z_v^{Li} g_v(t)$ ($v = \overline{1, L}; i = \overline{1, N_Z}$);
- выходной слой ВНС вычисляет отклик системы
 $y_i^L(n) = \sum_{v=1}^L w_v^L(n) G_v^{Li}(t)$ ($i = \overline{1, N_Z}$) для итерации n алгоритма.

Для оценки точности ЕК-оптимальной СтС (13), или в матричном виде (16), найдем математическое ожидание и дисперсию ошибки $\eta(t)$. Согласно (2) и (13),

$$\begin{aligned} \eta(t) &= W(t) - W^{L*}(t) = \\ &= \sum_{r=1}^{N_U} U_r \left(\zeta_r(t) - \sum_{v=1}^L h_v^{L*} \alpha_{vr} g_v(t) \right) - \sum_{v=1}^L h_v^{L*} V_v g_v(t). \end{aligned}$$

Если для каждого $r = \overline{1, N_U}$ ввести функцию $\varepsilon_r^\zeta(t, L) = \zeta_r(t) - \sum_{v=1}^L h_v^{L*} \alpha_{vr} g_v(t)$, равную ошибке аппроксимации функции $\zeta_r(t)$ вейвлет-разложением $\sum_{v=1}^L h_v^{L*} \alpha_{vr} g_v(t)$, то

$$\eta(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \varepsilon_r^\zeta(t, L) - \sum_{v=1}^L h_v^{L*} V_v g_v(t). \quad (17)$$

Отсюда математическое ожидание ошибки равно

$$m_\eta(t) = \sum_{r=1}^{N_U} m_r^U \varepsilon_r^\zeta(t, L). \quad (18)$$

Введем обозначения $\gamma_{r_1 r_2} = M[U_{r_1} U_{r_2}]$ ($r_1, r_2 = \overline{1, N_U}$), тогда второй начальный момент ошибки

$$\begin{aligned} \Gamma_\eta(t) &= M \left(\sum_{r=1}^{N_U} U_r \varepsilon_r^\zeta(t, L) - \sum_{v=1}^L h_v^{L*} V_v g_v(t) \right)^2 = \\ &= \sum_{r_1=1}^{N_U} \sum_{r_2=1}^{N_U} \gamma_{r_1 r_2} \varepsilon_{r_1}^\zeta(t, L) \varepsilon_{r_2}^\zeta(t, L) + \sum_{v=1}^L D_v (h_v^{L*} g_v(t))^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Наконец, дисперсия ошибки вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} D_E(t) &= M \left(\sum_{r=1}^{N_U} (U_r - m_r^U) \varepsilon_r^\zeta(t, L) - \sum_{v=1}^L w_v^{L*} V_v g_v(t) \right)^2 = \\ &= \sum_{r_1=1}^{N_U} \sum_{r_2=1}^{N_U} k_{r_1 r_2} \varepsilon_{r_1}^\zeta(t, L) \varepsilon_{r_2}^\zeta(t, L) + \sum_{v=1}^L D_v (w_v^{L*} g_v(t))^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения $k_{r_1 r_2} = M[(U_{r_1} - m_{r_1}^U)(U_{r_2} - m_{r_2}^U)]$.

Пример

Найти ЭК-оптимальную оценку для экстраполяции полезного сигнала, представляющего собой линейную функцию времени:

$$Z(t) = U_1 + U_2 t + X(t), \quad W(t + \Delta) = U_1 + U_2(t + \Delta), \quad t \in [t_k - T, t_k], \quad (21)$$

Помеха $X(t)$ распределена нормально, имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию $K_X(t_1, t_2) = D \exp\{-\alpha|t_2 - t_1|\}$. Векторный случайный параметр $U = [U_1 \ U_2]^T$ с математическим ожиданием $m_u = [m_1 \ m_2]^T$ и ковариационной матрицей K_u задан нормальной плотностью

$$f(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^2 c_{pq} (u_p - m_p)(u_q - m_q)\right\}$$

где c_{pq} – элементы матрицы K_u^{-1} .

Исходные данные: $t_k \in [8; 16]$, $T = 8$, $\Delta = 1$;

$$D = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0,001; \quad K_u = \begin{bmatrix} D_1^u & 0 \\ 0 & D_2^u \end{bmatrix}; \quad D_1^u = D, \quad D_2^u = D,$$

$$m_u = [0,5 \ 0,5]^T.$$

Для моделирования случайной помехи $X(t)$ задается ортонормированный базис Хаара с максимальным уровнем вейвлет-разрешения J и числом базисных функций $L = 2^{J+1}$ [20-24]. Для проведения вычислительных экспериментов разработано инструментальное программное обеспечение в среде MATLAB «ЭК-Синтез-ВНС.1». Алгоритм обучения используется в процессе функционирования ВНС. Вычислительные эксперименты показали [25], что оптимальное значение параметра скорости обучения $\eta = 0,001$.

На рис. 2-4 приведены результаты вычислительных экспериментов для базиса Хаара при $J = 2, L = 8$ в точках $(t_k + 1) \in [13; 21]$. На рис. 2 приведен график сигнала W и его оценки WE , вычисленной по формуле

$$W^*(t_k + \Delta) = \sum_{v=1}^L w_v^* Z_v g_v(t_k + \Delta). \quad (22)$$

На рис. 3 и рис. 4 изображены графики математического ожидания и дисперсии ошибки соответственно.

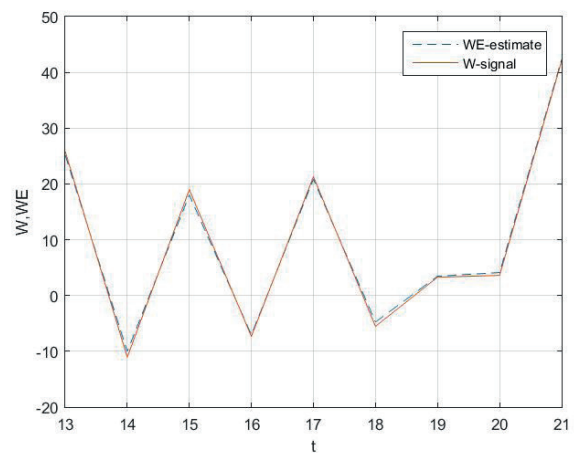
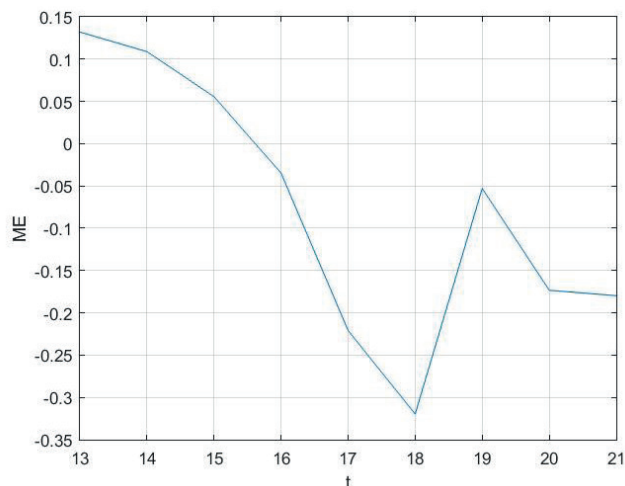
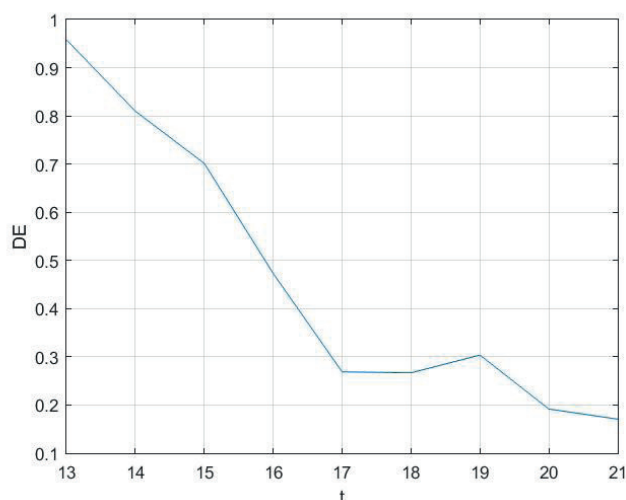


Рис. 2. График сигнала W и его оценки WE для $J = 2, L = 8$
Fig. 2. Graph of the signal W and its estimates WE for $J = 2, L = 8$





Р и с. 3. График математического ожидания ошибки
Fig. 3. Graph of the mathematical expectation of the error



Р и с. 4. График дисперсии ошибки
Fig. 4. Error dispersion graph

На графиках (рис. 2-4) видно, что значения сигнала изменяются от -11 до 43, при этом математическое ожидание ошибки принимает значения в пределах от -0,32 до 0,13, а дисперсия ошибки не превышает 0,97. Вычислительные эксперименты показали, что увеличивая число базисных функций и максимальный уровень вейвлет-разрешения базиса вейвлетов, можно добиться высокой точности моделирования выходного СтП системы.

Заключение

Для решения задачи синтеза нестационарной стохастической системы, описываемой уравнениями В.С. Пугачева, авторами разработано три общих метода на основе вейвлет-канонических разложений. Первый метод разработан для определения ЭК-оптимальных оценок выходного СтП линейной СтС. В его основе лежит решение операторного уравнения, связывающего ковариационную функцию входного СтП и совместную ковариационную функцию входного и выходного СтП линейной СтС. Оптимальные оценки выходного СтП определяются после составления и решения системы линейных алгебраических уравнений. Второй метод разработан для синтеза БК-оптимальной линейной и нелинейной СтС. Условием его применения является нормальность аддитивных случайных помех из состава входного и выходного СтП. Получена формула для условной плотности вероятности выходного СтП относительно входного СтП. Задача сведена к нахождению экстремума функционала. В основе третьего подхода лежат нейросетевые технологии, позволяющие избежать трудоемких предварительных аналитических выкладок. Разработан алгоритм синтеза ЭК-оптимальных нестационарных линейных СтС. Сравнительный анализ нейросетевого метода построения оценки выходного СтП системы, описываемой уравнениями В. С. Пугачёва, с другими приближенными методами, показал, что все методы дают одинаковый порядок точности вычислений. Но предлагаемый метод проще в исполнении, так как не требует предварительных аналитических выкладок в том случае, когда случайные параметры системы заданы только первыми двумя конечными вероятностными моментами. Полученные результаты допускают развитие нейросетевых методов синтеза оптимальных по различным БК нестационарных линейных и нелинейных СтС.

Список использованных источников

- [1] Кравцова О. А. Использование критериев стационарности для настройки моделей при прогнозировании временных рядов // Информатика и ее применения. 2022. Т. 16, № 2. С. 11-18. <https://doi.org/10.14357/19922264220202>
- [2] Шнурков П. В. Решение задачи оптимального управления запасом непрерывного продукта в стохастической модели регенерации со случайными стоимостными характеристиками // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17, № 4. С. 48-56. <https://doi.org/10.14357/19922264230407>
- [3] Sinitsyn I. N. Developing the Theory of Stochastic Canonic Expansions and Its Applications // Pattern Recognition and Image Analysis. 2023. Vol. 33, issue 4. P. 862-887. <https://doi.org/10.1134/S1054661823040429>
- [4] Бейсов синтез многомерной стохастической системы высокой доступности методом вейвлет канонических разложений / И. Н. Синицын, В. И. Синицын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2024. Т. 20, № 1. С. 55-66. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202401-06>
- [5] Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. Stochastic Systems: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 2002. 928 p. <https://doi.org/10.1142/4805>



- [6] Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Структурная теория сложных стохастических систем // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, № 2. С. 4-16. EDN: NXKRQZ
- [7] Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 138-156. <https://doi.org/10.31857/S0005231020110082>
- [8] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XI) / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2021. Т. 17, № 1. С. 25-40. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202101-03>
- [9] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XII) / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2021. Т. 17, № 2. С. 26-44. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202102-03>
- [10] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XIII) / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2021. Т. 17, № 3. С. 39-58. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202103-04>
- [11] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XV) / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2022. Т. 18, № 1. С. 47-61. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202201-05>
- [12] Bayes Synthesis of Linear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions / I. N. Sinitsyn, V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, T. D. Konashenkova // Mathematics. 2022. Vol. 10, issue 9. Article number: 1517. <https://doi.org/10.3390/math10091517>
- [13] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XVI) / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2022. Т. 18, № 2. С. 58-77. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202202-04>
- [14] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XVII) / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2023. Т. 19, № 2. С. 5-24. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202302-01>
- [15] Синтез оптимальных по функциональным байесовым критериям стохастических систем методом вейвлет канонических разложений / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2023. Т. 19, № 4. С. 37-50. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202304-03>
- [16] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV) / И. Н. Сеницын, И. В. Сергеев, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2017. Т. 13, № 3. С. 55-59. EDN: ZSQHLR
- [17] Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V) / И. Н. Сеницын, И. В. Сергеев, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 1. С. 59-70. EDN: YVXNBW
- [18] Моделирование нестационарного стохастического процесса посредством его канонического разложения на основе вейвлет-нейронной сети / И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы и средства информатики. 2024. Т. 34, № 2. С. 21-39. <https://doi.org/10.14357/08696527240202>
- [19] Veitch D. Wavelet Neural Networks and their application in the study of dynamical system // Networks. 2005. Vol. 1, no. 8. P. 313-320.
- [20] Arora S., Singh Brar Y., Kumar S. Haar Wavelet Matrices for the Numerical Solutions of Differential Equations // International Journal of Computer Applications. 2014. Vol. 97, no. 18. P. 33-36. URL: <https://research.ijcaonline.org/volume97/number18/pxc3897759.pdf> (дата обращения: 27.01.2025).
- [21] Lepik U. Numerical Solution of Evolution Equations by the Haar Wavelet Method // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 185. Issue 1. P. 695-704. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.077>
- [22] Cattani C. Haar Wavelets Based Technique in Evolution Problems // Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. Physics. Mathematics. 2004. Vol. 53, issue 1. P. 45-63. <https://doi.org/10.3176/phys.math.2004.1.04>
- [23] Hariharan G. An Overview of Haar Wavelet Method for Solving Differential and Integral Equations // World Applied Sciences Journal. 2013. Vol. 23, issue 12. P. 01-14. <https://doi.org/10.5829/idosi.wasj.2013.23.12.423>
- [24] Hsiao C. H., Wu S. P. Numerical Solution of Time-Varying Functional Differential Equations via Haar Wavelets // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 188, issue 1. P. 1049-1058. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.070>
- [25] Метод линейной оптимальной обработки информации посредством вейвлет разложений / И. Н. Сеницын, Д. В. Жуков, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. № 21. С. 213-221. EDN: RPPANP

Поступила 27.01.2025; одобрена после рецензирования 04.03.2025; принята к публикации 11.04.2025.



Об авторах:

Синицын Игорь Николаевич, главный научный сотрудник отдела № 61 «Стохастические проблемы информатики» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), доктор технических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0534-4262>, sinitsin@doi.ru

Синицын Владимир Игоревич, главный научный сотрудник, руководитель отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1456-9719>, vsinitsin@ipiran.ru

Корепанов Эдуард Рудольфович, ведущий научный сотрудник, руководитель отдела № 61 «Стохастические проблемы информатики» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), кандидат технических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-9795-0983>, ekorepanov@ipiran.ru

Конашенкова Татьяна Дмитриевна, научный сотрудник отдела № 61 «Стохастические проблемы информатики» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8498-979X>, TKonashenkova64@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Kravtsova O.A. Model setting using stationarity criteria for time series forecasting. *Informatika i Ee Primeneniya* = Informatics and its Applications. 2022;16(2):11-18. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.14357/19922264220202>
- [2] Shnurkov P.V. Solution of the problem of optimal control of the stock of a continuous product in a stochastic model of regeneration with random cost characteristics. *Informatika i Ee Primeneniya* = Informatics and its Applications. 2023;17(4):48-56. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.14357/19922264230407>
- [3] Sinitsyn I.N. Developing the Theory of Stochastic Canonic Expansions and Its Applications. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2023;33(4):862-887. <https://doi.org/10.1134/S1054661823040429>
- [4] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Bayes Synthesis of Multidimensional Stochastic System with High Availability by Wavelet Canonical Expansions. *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2024;20(1):55-66. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202401-06>
- [5] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic Systems: Theory and Applications. Singapore: World Scientific; 2002. 928 p. <https://doi.org/10.1142/4805>
- [6] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Theory of Complex Stochastic Systems. *Informatika i Ee Primeneniya* = Informatics and its Applications. 2011;5(2):4-16. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: NXKRQZ
- [7] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Optimization of Linear Stochastic Systems Based on Canonical Wavelet Expansions. *Automation and Remote Control*. 2020;81(11):2046-2061. <https://doi.org/10.1134/S0005117920110077>
- [8] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (XI). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2021;17(1):25-40. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202101-03>
- [9] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (XII). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2021;17(2):26-44. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202102-03>
- [10] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (XIII). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2021;17(3):39-58. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202103-04>
- [11] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (XV). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2022;18(1):47-61. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202201-05>
- [12] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Bayes Synthesis of Linear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions. *Mathematics*. 2022;10(9):1517. <https://doi.org/10.3390/math10091517>
- [13] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (XVI). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2022;18(2):58-77. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202202-04>



- [14] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (XVII). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2023;19(2):5-24. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202302-01>
- [15] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Methodological Support of Functional Bayes Synthesis of Stochastic Systems Based on Wavelet Canonical Expansions. *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2023;19(4):37-50. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18127/j20729472-202304-03>
- [16] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (IV). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2017;13(3):55-59. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: ZSQHLR
- [17] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software Tools for Analysis and Synthesis of Stochastic Systems with High Availability (V). *Sistemy' vy'sokoj dostupnosti* = Highly available systems. 2018;14(1):59-70. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: YVXNBW
- [18] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Nonstationary Stochastic Process Modeling by Canonical Expansion and Wavelet Neural Network. *Sistemy i Sredstva Informatiki* = Systems and Means of Informatics. 2024;34(2):21-39. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.14357/08696527240202>
- [19] Veitch D. Wavelet Neural Networks and their application in the study of dynamical system. *Networks*. 2005;1(8):313-320.
- [20] Arora S., Singh Brar Y., Kumar S. Haar Wavelet Matrices for the Numerical Solutions of Differential Equations. *International Journal of Computer Applications*. 2014;97(18):33-36. Available at: <https://research.ijcaonline.org/volume97/number18/pxc3897759.pdf> (accessed 27.01.2025).
- [21] Lepik U. Numerical Solution of Evolution Equations by the Haar Wavelet Method. *Applied Mathematics and Computation*. 2007;185(1):695-704. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.077>
- [22] Cattani C. Haar Wavelets Based Technique in Evolution Problems. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. Physics. Mathematics*. 2004;53(1):45-63. <https://doi.org/10.3176/phys.math.2004.1.04>
- [23] Hariharan G. An Overview of Haar Wavelet Method for Solving Differential and Integral Equations. *World Applied Sciences Journal*. 2013;23(12):01-14. <https://doi.org/10.5829/idosi.wasj.2013.23.12.423>
- [24] Hsiao C.H., Wu S.P. Numerical Solution of Time-Varying Functional Differential Equations via Haar Wavelets. *Applied Mathematics and Computation*. 2007;188(1):1049-1058. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.070>
- [25] Sinitsyn I.N., Zhukov D.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Method of Linear Optimal Shock Information Processing by Wavelet Expansions. *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya* = Computer Mathematics Systems and Their Applications. 2020;(21):213-221. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: RPPANP

Submitted 27.01.2025; approved after reviewing 04.03.2025; accepted for publication 11.04.2025.

About the authors:

Igor N. Sinitsyn, Chief Researcher of Department No. 61 "Stochastic Problems of Informatics" of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Dr. Sci. (Tech.), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0534-4262>**, sinitsin@dol.ru

Vladimir I. Sinitsyn, Chief Researcher, Head of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1456-9719>**, vsinitsin@ipiran.ru

Eduard R. Korepanov, Leading Researcher, Head of Department No. 61 "Stochastic Problems of Informatics" of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Cand. Sci. (Eng.), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-9795-0983>**, ekorepanov@ipiran.ru

Tatyana D. Konashenkova, Research Fellow of Department No. 61 "Stochastic Problems of Informatics" of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8498-979X>**, TKonashenkova64@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

