

Моделирование процессов преодоления когнитивной перегрузки учащихся при избыточном объёме учебного материала

О. М. Корчажкина

ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация
Адрес: 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-2
olgakomax@gmail.com

Аннотация

Рассматривается подход к анализу процесса преодоления когнитивной перегрузки при усвоении учащимися избыточного объёма учебной информации. В качестве математической модели, описывающей процесс преодоления когнитивной перегрузки динамической системой в виде замкнутой малочисленной учебной группы, выбрана SIR-модель Уильяма Кермака и Андерсона МакКендрика, которая была модифицирована путём введения новых параметров, характеризующих динамику развития ситуации: коэффициентов защищённости от когнитивной перегрузки, подверженности когнитивной перегрузке и преодоления когнитивной перегрузки. Исследование SIR-модели осуществлялось двумя способами: путём построения временной зависимости пополнения учащимися, взаимодействующими с когнитивной перегрузкой, трёх SIR-подгрупп (подвергнутых, преодолевающих и преодолевших) по мере развития ситуации и с помощью фазовой плоскости, позволяющей составить целостную картину явления и провести более детальное изучение общих и частных условий движения системы к состоянию равновесия в зависимости от соотношения её параметров. В ходе проведённого исследования установлено, что оба способа анализа процесса преодоления когнитивной перегрузки, основанных на SIR-модели, могут использоваться как взаимодополняющие, поскольку каждый из них акцентирует отдельные факторы, влияющие на развитие ситуации при различных начальных условиях.

Полученные результаты могут рассматриваться как необходимые мотиваторы дальнейшего развития SIR-моделирования для изучения влияния и преодоления деструктивных процессов при усвоении нового знания.

Ключевые слова: SIR-модель, фазовая плоскость, фазовый портрет, особая точка, когнитивная перегрузка, устойчивость/неустойчивость динамической системы, дифференциальные уравнения

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Корчажкина О. М. Моделирование процессов преодоления когнитивной перегрузки учащихся при избыточном объёме учебного материала // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 1. С. 127-143. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.127-143>

© Корчажкина О. М., 2025



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Modeling the Processes of How to Overcome Students' Cognitive Overload if There is an Excessive Amount of the Material to Study

O. M. Korchazhkina

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Address: 44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation
olgakomax@gmail.com

Abstract

The article considers an approach to the process of overcoming cognitive overwork analysis when students assimilate an excessive amount of educational information. We chose William Kermack and Anderson McKendrick's SIR model as a mathematical model that can describe the process of overcoming cognitive overwork by a dynamic system in the form of a closed small study group; and then modified it by introducing new parameters characterizing the dynamics of the situation: coefficients of protection from cognitive overwork, susceptibility to cognitive overwork and overcoming cognitive overwork. The study of the SIR model was carried out in two ways, such as by constructing a time dependence of the replenishment of three SIR subgroups interacting with cognitive overwork by students (subjected, overcoming and overcome) as the situation develops, and using a phase plane that allows one to make a complete picture of the phenomenon and conduct a more detailed study of the general and particular conditions of the system's movement to a state of equilibrium depending on the ratio between its parameters. The conducted research found out that both methods of analyzing the process of overcoming cognitive overwork based on the SIR model can be used as complementary, since each of them emphasizes individual factors affecting the development of the situation at different initial conditions.

The results obtained can be considered as necessary motivators for the further development of SIR modeling in the study of the influence and overcoming of destructive processes in assimilation of new knowledge.

Keywords: *SIR* model, phase plane, phase portrait, singular point, cognitive overwork, dynamic system stability/instability, differential equations

Conflict of interests: The author declares no conflict of interests.

For citation: Korchazhkina O.M. Modeling the Processes of How to Overcome Students' Cognitive Overload if There is an Excessive Amount of the Material to Study. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2025;21(1):127-143. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.127-143>



Введение

В 1927 году шотландскими учёными биохимиком Уильямом Огилви Кермаком (William Ogilvy Kermack, 1898-1970) и военным врачом и эпидемиологом Андерсоном Греем МакКендриком (Anderson Gray McKendrick, 1876-1943) была предложена статистическая модель распространения инфекционных заболеваний, или *SIR*-модель (от англ. *susceptible + infected + removed – уязвимые + инфицированные + выбывшие*), для анализа и моделирования случаев возникновения эпидемий, принимающих характер пандемии, в многочисленных замкнутых группах населения [1, 2]. *SIR*-модель, в которой впервые были применены математические методы в области эпидемиологии, представляет собой систему дифференциальных уравнений с переменными, описывающими численность здоровых, заболевших и выздоровевших «особей популяции».

За неполное столетие классическая *SIR*-модель доказала свою эффективность не только на основе данных реальных эпидемий, но и как базовая модель для анализа и прогнозирования деструктивных биологических процессов различного характера [3-7]. *SIR*-модель послужила также источником разработки модифицированных статистических моделей с целью описания динамических процессов, создаваемых широким кругом ситуаций при распространении эпидемий в неоднородных популяциях, и как инструмент применения теоретических и практических методов исследования нелинейных динамических систем, возникающих при математическом моделировании биологических и иных методологически родственных процессов¹ [8-11]. Например, моделированию и исследованию динамического развития структуры замкнутой социальной группы, находящейся под информационным воздействием, посвящена работа [12], а в исследовании [13] затрагивается влияние компьютерных вирусов на человеко-машинное взаимодействие.

Кроме того, в последние годы появляются учебные пособия для средней и высшей школы, которые знакомят старшеклассников и студентов младших курсов вузов с приёмами составления систем обыкновенных дифференциальных уравнений и методами их качественного исследования, возможностями использования дифференциальных уравнений для изучения реальных явлений и процессов, предлагая задачи, возникающие в различных областях знаний². Активное применение электронных таблиц Microsoft Excel и конкретные примеры численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в доступной для школьников форме представлены в работе³. В пособиях по математическому моделированию рассматриваются способы работы с простейшей иллюстративной

SIR-моделью эпидемии для прогноза естественного хода эпидемии⁴. Типы математических моделей для исследования динамики скоротечных эпидемий с малой летальностью, когда в популяции происходят всего два процесса – заболевание и выздоровление, предлагаются в учебно-методическом пособии⁵, где на основе практических примеров рассматриваются также способы численных решений систем дифференциальных уравнений для *SIR*-моделей и построение графиков соответствующих зависимостей в среде MS Excel. В практической разработке, посвящённой выполнению лабораторных работ в вузовском курсе математической эпидемиологии⁶, студенты получают первоначальные сведения о типах математических моделей, описывающих динамику инфекций, приобретают навыки использования моделей с целью прогнозирования и уменьшения потерь от инфекционных заболеваний, знакомятся с современными проблемами математической эпидемиологии в целом.

Применение *SIR*-модели для исследования процессов, связанных с когнитивной перегрузкой

Ещё одним направлением применения *SIR*-модели является моделирование процесса познания, при организации которого возникают различные нежелательные ситуации, тормозящие процесс обучения [14, 15]. В [16] представлены результаты начального этапа исследования динамики деструктивных процессов при усвоении нового знания на основе модифицированной *SIR*-модели, с помощью которой были изучены закономерности познавательного процесса, сопровождаемого работой с избыточной информацией членами замкнутого (неполняемого в ходе исследования) малочисленного учебного сообщества с примерным количеством от 30 до 100 человек. Избыточная информация рассматривалась в качестве *когнитивной перегрузки*, с которой учащиеся справлялись с разной степенью успешности, определяемой двумя вероятностными критериями: 1) преодолевали без потерь при любых условиях обучения, поскольку изначально обладали соответствующим уровнем подготовки и внутренней мотивации; 2) преодолевали только при благоприятных условиях обучения⁷ и постепенном формировании внутренней мотивации. Ограничением модели считалось допущение, что по окончании изучения темы или завершении определённого периода обучения все учащиеся преодолевали когнитивную перегрузку, то есть решение проблемы было достигнуто.

Подобный подход отличается от известных исследований усвоения новой информации, основанных на вероятностной фор-

¹ Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2011. 400 с. EDN: RYRSMI

² Амеликин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: ЛЕНАНД, 2021. 206 с.

³ Алексеев Д. В., Казунина Г. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Вводный курс с иллюстрациями в Microsoft Excel. М.: Едиториал УРСС, 2019. 160 с.

⁴ Горско А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. М.: Издательство «Вузовская книга», 2023. С. 21-24.

⁵ Дубровский В. Н., Усатюк В. В., Авилов К. К., Булычев В. А., Лебедева Н. А., Чернецкая Т. А. Математическое моделирование для школьников. М.: ООО «1С-Паблишинг», 2023. С. 146-161.

⁶ Леоненко В. Н. Математическая эпидемиология. Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ. СПб: Изд-во ИТМО, 2018. 38 с.

⁷ Под благоприятными условиями обучения понимается системно организованный учебный процесс (компетентные преподаватели, классно-урочная система, наличие учебного материала, регулярные домашние задания, различные очные и дистанционные формы взаимодействия учителя и учащихся, контроль, проверка, самопроверка и пр.).



муле К. Шеннона [17]. Например, когнитивная перегрузка, названная в работе⁸ когнитив-энтропией, рассматривается как характеристика образовательного процесса, определяющая меру познания в условиях неопределённости. Р.Г. Болбаков трактует усвоение информации и переход её в знания как переход информации «из состояния неопределённости в состояние большей определённости», поскольку количество полученной информации (как меры снятия неопределённости) равно уменьшению неопределённости, и подчёркивает, что «с позиций когнитив-энтропии можно анализировать степень воспринимаемости учебных материалов»⁹, которая определяется по формуле К. Шеннона, преобразованной в соответствии с условиями задачи:

$$H_{\text{ког}} = -K_{\Pi} \cdot K_K \cdot \log_2 \cdot \quad (1)$$

Когнитив-энтропию $H_{\text{ког}}$ в (1) формируют три группы сомножителей, объединённых общим знаком «минус» как показателем утраты позитивных факторов информационного взаимодействия:

- *первая группа* сомножителей $K_{\Pi} \sum_i p_i(i)$, отражающая факт информационного взаимодействия воспринимающего субъекта и источника информации, характеризует энтропию, вызванную потерей полезной информации, поступающей по запросу; здесь K_{Π} – коэффициент пертинентности¹⁰, определяющий объём полезной информации как часть всей поступающей информации, а $p_i(i)$ – функция распределения вероятности для независимых случайных событий i с N_i возможными состояниями (событиями); причём i – это объективные события утраты запрашиваемой информации;
 - *вторая группа* сомножителей $K_K \sum_i p_i(i; j)$, отражающая факт когнитивного взаимодействия воспринимающего субъекта и источника информации, характеризует энтропию, вызванную потерей информации с учётом когнитивных показателей восприятия информации субъектом, которые определяются его интеллектуальным способностями, индивидуальным познавательным стилем, условиями обучения, эмоциональным состоянием и прочими ситуативными параметрами; здесь K_K – коэффициент когнитивности, определяющий степень восприятия человеком всей поступающей информации, а $p_i(i; j)$ – функция распределения вероятности для двух независимых случайных событий i и j с N возможными состояниями (событиями); причём j – это субъективные события утраты информации, обусловленной когнитивными факторами;
 - *третий сомножитель* $\log_2 N_i(i; j)$ выполняет «техническую» функцию и характеризует логарифмическую меру энтропии – идею, позаимствованную К. Шенноном у Дж. Гиббса, который при разработке энтропийных диаграмм использовал логарифмическую шкалу с целью удобства записи и сведения функции энтропии к линейному виду.
- Формула (1) демонстрирует способ вычисления степени когнитивной перегрузки, измеряемой объёмом рассеиваемой,

или неувоенной, информации. Однако на практике (если рассматривать условия перехода информации в знания в ходе образовательного процесса) часто возникают ситуации, когда требуется более детальный анализ процесса «неусвоения» информации, поскольку одним учащимся по силам справиться с когнитивной перегрузкой, а другие с трудом её преодолевают или не преодолевают вовсе. Причём эти процессы носят динамический характер, который может быть представлен системой дифференциальных уравнений с двумя формами визуализации – как временная зависимость числа учащихся в трёх подгруппах на декартовой плоскости и как динамика изменения числа учащихся во времени на фазовой плоскости.

Этот фактор явился определяющим и был выбран в [16] как динамический способ исследования когнитивной перегрузки с использованием модифицированной SIR-модели, выраженной системой обыкновенных дифференциальных уравнений¹¹, описывающих скорость изменения функций S , I и R во времени:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \dot{S} = -\frac{\beta}{N}SI - \frac{\alpha}{N}SR, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \dot{I} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R} = \gamma I + \frac{\alpha}{N}SR. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

В системе (2)-(4) приняты следующие обозначения переменных величин, или число учащихся в SIR-подгруппах:

- 1) S – число учащихся в общей (начальной) подгруппе, подвергнутых когнитивной перегрузке (пока здоровые, но *восприимчивые* к болезням в классической SIR-модели), часть из которой составляет контингент «сильных» учащихся, без труда справляющийся с любой когнитивной перегрузкой, а остальной частью являются «проблемные» учащиеся, для которых преодоление когнитивной перегрузки возможно только при создании соответствующих условий обучения;
- 2) I – число учащихся в промежуточной подгруппе, или проблемных учащихся, находящихся в процессе преодоления когнитивной перегрузки (*заражённые*, но получающие лечение в классической SIR-модели), из неё происходит дальнейший выход учащихся в финальную подгруппу; в подгруппе I могут изначально находиться учащиеся числом $I_{\text{нач}}$, которые на момент исследования заведомо не справились с когнитивной перегрузкой (уже заражённые, но пока не получившие лечения, на начальный момент времени – так наз. *ожидающие* – в классической SIR-модели);
- 3) R – число учащихся в финальной подгруппе, где по завершении изучения определённой темы или по прошествии определённого периода времени оказываются все учащиеся (*выздоровевшие* в классической SIR-модели, которые не могут быть распространителями инфекции¹²); это означает, что чис-

⁸ Shannon C. E., Weaver W. The Mathematical Theory of Communication. Urbana: The University of Illinois Press, 1964.

⁹ Там же. С. 14.

¹⁰ Пертинентность (лат. pertineo – касаюсь, отношусь) – соответствие найденных информационно-поисковой системой документов информационным потребностям пользователя, независимо от того, как полно и как точно эта информационная потребность выражена в тексте информационного запроса.

¹¹ К классической системе уравнений SIR-модели был добавлен член SR.

¹² Строго говоря, согласно классической SIR-модели, задача которой – исследовать возможность прекращения эпидемии, в группу R входят, помимо выздоровевших, и умершие особи, поскольку они также не являются распространителями инфекции. Однако в исследуемой модели случаи «летального исхода», то есть наличие учащихся, не преодолевших когнитивную перегрузку, пока не рассматриваются.



ленность финальной подгруппы совпадает с начальным числом учащихся N .

В классическую SIR -модель введены следующие информационные параметры [16, с. 170]:

- α – коэффициент потенциальной защищённости от когнитивной перегрузки, которым обладает контингент «сильных» учащихся, способных без потерь преодолеть когнитивную перегрузку, вызванную избыточной информацией (нет эквивалента в классической SIR -модели, однако он мог бы стать коэффициентом иммунитета, полученного до начала эпидемии в результате кампании вакцинации); этот коэффициент вносит некоторый вклад в скорость, с которой справляется вся группа при поступлении избыточной информации;
- β – коэффициент потенциальной подверженности когнитивной перегрузке, или скорость поступления избыточной информации, общего контингента «проблемных» учащихся, которые при благоприятных условиях способны преодолеть когнитивную перегрузку – так наз. «справившиеся» (эквивалент скорости инфицирования, то есть частоте контактов больных со здоровыми, приводящих к распространению инфекции в классической SIR -модели);

- γ – коэффициент преодоления учащимися когнитивной перегрузки, характеризующий «справившихся» учащихся (эквивалент коэффициенту интенсивности выздоровления заражённых особей, приводящего к завершению эпидемии в классической SIR -модели).

В системе уравнений (2)–(4) коэффициенты α и β присутствуют в нормированном виде: $\frac{\alpha}{N}S$ – скорость преодоления когнитивной перегрузки относительным числом «сильных» учащихся подгруппы S при переходе в подгруппу R , а $\frac{\beta}{N}S$ – это скорость подверженности когнитивной перегрузке относительным числом «проблемных» учащихся подгруппы S при переходе в подгруппу I . Показатель γ входит в уравнения (3)–(4) в ненормированном (первоначальном) виде, поскольку характеризует скорость преодоления «проблемными» учащимися когнитивной перегрузки и воздействует только на контингент учащихся из подгруппы I , перешедших в подгруппу R безотносительно к общему числу учащихся S .

Исследование скорости преодоления когнитивной перегрузки с помощью временной зависимости

Уравнения в системе (2)–(4), являющиеся уравнениями движения, показывают *скорость перемещения* учащихся из одной SIR -подгруппы в другую. Знак «минус» в уравнениях означает, что эта часть контингента покидает подгруппу, а знак «плюс» показывает, что соответствующая часть остаётся в данной подгруппе или прибывает в неё из другой подгруппы. Эта динамика может быть описана следующим образом: часть учащихся из подгруппы S , заведомо справившихся с когнитивной перегрузкой, со скоростью $\frac{\alpha}{N}SR$ сразу перемещается в финальную подгруппу R , а остальная часть учащихся сначала переходит со

скоростью $\frac{\beta}{N}SI$ в промежуточную подгруппу I , где с разной степенью успешности пытается справиться с когнитивной перегрузкой. Затем в результате определённых учебных действий все учащиеся из подгруппы I перемещаются со скоростью γI в финальную подгруппу R , где сливаются с «сильными» учащимися¹³: так восстанавливается общая численность группы N . Таким образом, в результате учебной деятельности все учащиеся покидают и начальную подгруппу S , и промежуточную подгруппу I .

Для построения графиков соответствующих зависимостей традиционно используется среда MS Excel¹⁴ [18]. Простые алгебраические преобразования системы дифференциальных уравнений (2)–(4) позволяют получить следующую систему уравнений, которая для начальных значений $I_{нач} = I_0$, $S_{нач} = N - I_0$ и $R_{нач} = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} S_{n+1}(t) = S_n + \Delta S = S_n - \frac{\beta S_n I_n + \alpha S_n R_n}{N} \Delta t, \text{ где } S_I = S_{нач} = N - I_0 \\ I_{n+1}(t) = I_n + \Delta I = I_n + \left(\frac{\beta S_n I_n}{N} - \gamma I_n \right) \Delta t, \text{ где } I_I = I_{нач} = I_0 \\ R_{n+1}(t) = R_n + \Delta R = R_n + \left(\gamma I_n + \frac{\alpha S_n R_n}{N} \right) \Delta t, \text{ где } R_I = R_{нач} = 0 \end{cases}$$

Таблица соответствующих вычислений и графики $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ для значений коэффициентов $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$ и $\gamma = 0,05$ представлены на рис. 1.

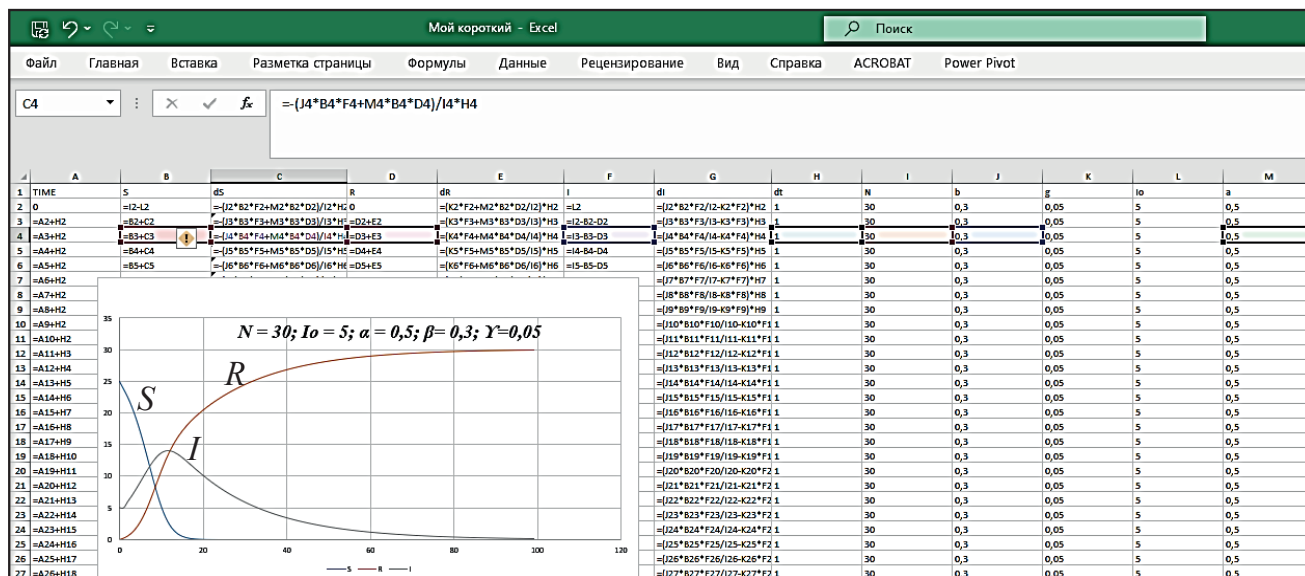
Сравним коэффициент подверженности когнитивной перегрузке (скорость поступления избыточной информации) β и скорость её преодоления γ : чем более β превосходит γ при равных α , тем медленнее протекает процесс преодоления когнитивной перегрузки (рис. 2, а, б). При близких значениях β и γ (рис. 2, в) процесс завершается (R достигает максимума и выходит на плато) за меньшее время. Об этом свидетельствует как больший наклон графика $R(t)$, так и меньшее значение максимума функции $I(t)$, который превышает начальное значение I_0 . Это означает, что при меньшей скорости преодоления когнитивной перегрузки γ через подгруппу I за большее время до завершения процесса «выздоровления» проходит большее число учащихся. Если γ превышает β (рис. 2, г), то процесс завершается гораздо быстрее за счёт более быстрой «убыли» учащихся из подгруппы I , причём число «проблемных» учащихся в этой подгруппе не увеличивается до максимального значения, как на рис. 2, а), б), а плавно спадает от I_0 до нуля. Таким образом, чем выше значение γ , тем быстрее (при прочих равных условиях) завершается процесс преодоления учащимися когнитивной перегрузки.

Сходную роль играет величина коэффициента защищённости от когнитивной перегрузки α . Сравнение графиков на рис. 3, а) и 3, б) показывает, что чем больше значение α , тем большее влияние оно оказывает на общую скорость преодоления когнитивной перегрузки всеми членами учебного сообщества. Это объясняется тем фактом, что общая скорость пополнения подгруппы R существенным образом определяется скоростью перехода учащихся в подгруппу R из подгруппы S , а именно – членом SR .

¹³ Это не значит, что часть учащихся, перемещённых из подгруппы S , остаётся в подгруппе I , как может ошибочно показаться, поскольку SI – это не число учащихся, а скорость их перемещения.

¹⁴ Дубровский В. Н., Усатюк В. В., Авилов К. К., Булычев В. А., Лебедева Н. А., Чернецкая Т. А. Математическое моделирование для школьников. М.: ООО «1С-Паблишинг», 2023. С. 150.



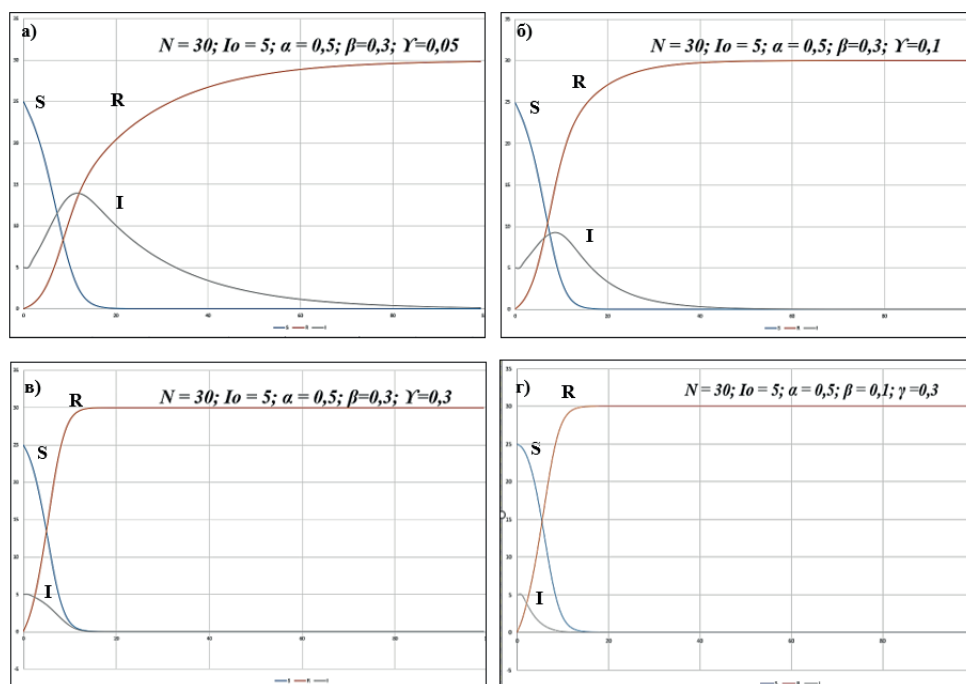


Р и с. 1. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R , построенные в среде MS Excel для $t_{max}=100$ у.е., $\alpha=0,5$, $\beta=0,3$, $\gamma=0,05$, $N=30$, $I_0=5$

Fig. 1. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R , constructed in the MS Excel environment for $t_{max}=100$ u.e., $\alpha=0,5$, $\beta=0,3$, $\gamma=0,05$, $N=30$, $I_0=5$

Источник: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены автором.

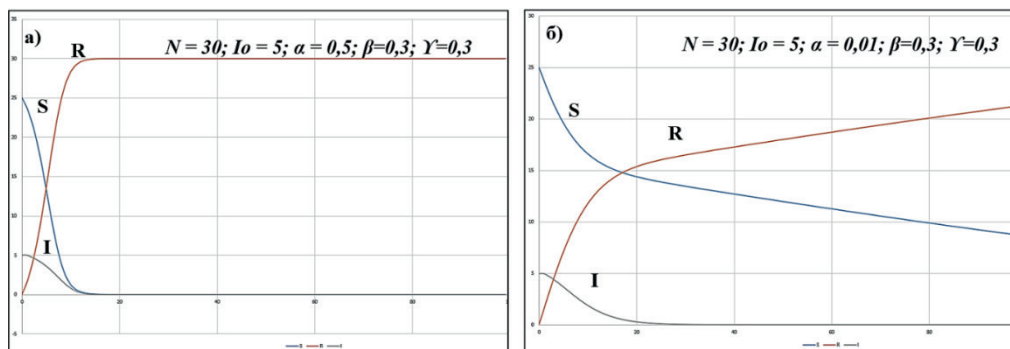
Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the author.



Р и с. 2. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R для различных коэффициентов преодоления когнитивной перегрузки («выздоровления») γ при $\alpha=0,5$; $\beta=0,3$; $\gamma=0,05$ (а); $\alpha=0,5$; $\beta=0,3$; $\gamma=0,1$ (б); $\alpha=0,5$; $\beta=0,3$; $\gamma=0,3$ (в) и $\alpha=0,5$; $\beta=0,1$; $\gamma=0,3$ (г)

Fig. 2. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R for different coefficients of overcoming cognitive overload ("recovery") γ at $\alpha=0,5$; $\beta=0,3$; $\gamma=0,05$ (a); $\alpha=0,5$; $\beta=0,3$; $\gamma=0,1$ (b); $\alpha=0,5$; $\beta=0,3$; $\gamma=0,3$ (c) and $\alpha=0,5$; $\beta=0,1$; $\gamma=0,3$ (d)





Р и с. 3. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S , I и R для различных коэффициентов защищённости от когнитивной перегрузки α : $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$ и $\gamma = 0,3$ (а); $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,3$ и $\gamma = 0,3$ (б)

Fig. 3. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S , I and R for different coefficients of protection from cognitive overload α : $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$ & $\gamma = 0,3$ (a); $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,3$ & $\gamma = 0,3$ (b)

Исследование процессов преодоления когнитивной перегрузки методом фазовых портретов

По временным графикам зависимостей $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ (см. рис. 1-3) можно определить число учащихся и скорость достижения этих значений в заданный момент времени, однако они не позволяют определить некоторые существенные параметры работы системы, например: 1) как величины S , I и R коррелируются между собой в зависимости от начальных условий; 2) какова их зависимость от скорости пополнения подгрупп при разных начальных условиях; 3) какова протяжённость зон устойчивого течения процесса (зон устойчивого равновесия) в зависимости от начальных условий и динамических параметров системы (информационных коэффициентов α , β и γ); 4) имеет ли система точки бифуркации, какого характера, и как они влияют на зоны устойчивого равновесия системы; 5) каковы траектории движения параметров системы во времени внутри и вне зон устойчивого равновесия. Остаётся дискуссионным также вопрос о том, всегда ли следует стремиться к более высокой скорости преодоления когнитивной перегрузки или с целью достижения устойчивой работы системы следует опираться на некоторые иные критерии. Указанные причины побудили провести исследование не только временной динамики $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ по отдельности, но и динамики поведения всей системы во времени в зависимости от её параметров [19-22].

Итак, малочисленная учебная группа, члены которой подвержены воздействию избыточной учебной информации, представляет собой динамическую систему, находящуюся в процессе поиска состояния равновесия по мере преодоления учащимися когнитивной перегрузки. Определение равновесных состояний системы в зависимости от времени традиционно

проводится на *фазовой* (координатной) *плоскости*, которая демонстрирует траектории движения системы как вблизи точек бифуркации, или особых точек (ОТ), так и на удалении от них. ОТ могут быть устойчивыми или неустойчивыми, они также могут быть неопределёнными (виртуальными), то есть не допускающими линеаризацию¹⁵. Причём наличие только неустойчивых или нелинеаризованных ОТ соответствует неуправляемому росту параметров системы со скоростью, близкой к бесконечной (в математическом, а не в физическом смысле), сам процесс при этом приобретает взрывной, то есть неуправляемый характер.

При исследовании реальных физических процессов, например, колебательных, на оси абсцисс фазовой плоскости откладываются значения некоторого параметра x (обычно величины отклонения движущегося материального тела от состояния равновесия), а на оси ординат – значения первой производной $\dot{x}$ по времени, или скорости перемещения тела. Полученные траектории движения тела на фазовой плоскости образуют фазовый портрет (ФП) динамической системы¹⁶, который даёт представление о совокупности всех возможных её состояний и типах движений и то, как величины, описывающие состояние системы (динамические переменные и параметры), зависят друг от друга. Поскольку каждая фазовая траектория соответствует совокупности движений системы, проходящих через одни и те же состояния и отличающихся друг от друга началом отсчета времени, то с помощью ФП могут быть изучены области её устойчивого и неустойчивого равновесия в зависимости от начальных условий и величины актуальных параметров.

Идея использования ФП для исследования процессов, описываемых SIR -моделью, на плоскости (S, I) реализована в ряде работ¹⁷, однако в упомянутых исследованиях ФП приведены как единичные иллюстрации применяемых авторами методов, а не как предметы полноценного исследования. В насто-

¹⁵ В этом случае не допускающая линеаризацию ОТ формально может быть нанесена на фазовую плоскость, однако участия в движении системы она не принимает.

¹⁶ Богданов Р. И. Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. М.: Вузская книга, 2019. 428 с.; Бутковский А. Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. М.: Наука, 1985. 136 с.; Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. Изд. 2, доп. М.: Либроком, 2009. 424 с.

¹⁷ Аналитическое и численное исследование математической модели SIR / Н. Л. Семендяева, М. В. Орлов, Ж. Тан, Э. Ян // Прикладная математика и информатика : Сб. ст. / Под ред. А. С. Крылова. М.: ООО «МАКС Пресс», 2022. С. 38-55. EDN: LJAITE

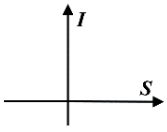
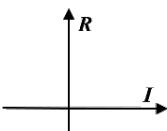
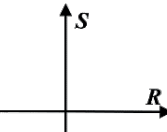


ящей статье поставлена задача (в продолжение работы [16]) проследить зависимость характера движения системы на фазовых плоскостях (S, I) , (I, R) и (R, S) вблизи особых точек от параметров учебной группы по отношению к когнитивной перегрузке: α (коэффициента защищённости), β (коэффициента подверженности) и γ (коэффициента преодоления).

Для построения ФП система трёх дифференциальных уравнений (2)-(4) была преобразована к трём системам двух дифференциальных уравнений, для каждой из которых были найдены выражения для ОТ. Полученные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1. К построению фазовых портретов системы дифференциальных уравнений (2-4)

Table 1. On the construction of phase portraits of a system of differential equations (2-4)

Фазовая плоскость	Система дифференциальных уравнений	Координаты особых точек на фазовой плоскости
	$\frac{\partial S}{\partial t} = [\alpha S + (\alpha - \beta)I - \alpha N] \frac{S}{N};$ $\frac{\partial I}{\partial t} = (\beta \frac{S}{N} - \gamma)I$	$(0; 0);$ $(\frac{\gamma}{\beta} N; \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\beta(\alpha - \beta)} N);$ $(N; 0)$
	$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\beta I(N - R - I)}{N} - \gamma I;$ $\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I + \frac{\alpha R(N - R - I)}{N}$	$(0; 0);$ $(\frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\beta(\alpha - \beta)} N; \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} N);$ $(0; N)$
	$\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma(N - S - R) + \alpha R \frac{S}{N};$ $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\beta S(N - S - R)}{N} - \alpha R \frac{S}{N}$	$(0; N);$ $(\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} N; \frac{\gamma}{\beta} N);$ $(N; 0)$

Для графического построения ФП динамической системы могут быть использованы различные математические и информационные инструменты. Например, в работе¹⁸ описываются способы визуализации решений дифференциальных уравнений, предлагаемые во многих пакетах компьютерной математики: MatLab, Mathematica (Wolfram Mathematica с помощью ContourPlot), Maple, Maxima (с помощью пакета R), в которых имеются функции, реализующие построение ФП решений.

В настоящей работе было использовано свободно распространяемое веб-приложение PhaPl¹⁹ [23], имеющее простой и понятный интерфейс и позволяющее строить ФП системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с выводом на экран координат и типов ОТ, а также фазовых траекторий как вблизи каждой отдельной ОТ, так и на общем ФП.

Чтение ФП системы дифференциальных уравнений является непростой задачей, однако некоторые закономерности движения системы с его помощью выявить можно. Наклон касательной к траектории (крутизна траектории) в данной точке указывает на величину скорости движения в фиксированный момент времени, а радиус кривизны траектории связан с экстремальными значениями S , I и R . Кроме того, в системах с множественными вероятными траекториями движения, когда

каждая траектория соответствует определённому состоянию, от точного задания начальных условий или других дополнительных данных зависит правильность определения конкретного решения системы дифференциальных уравнений, что позволяет зафиксировать именно ту фазовую траекторию, которая описывает реальное движение.

Ниже приводятся примеры ФП в координатных плоскостях (S, I) , (I, R) и (R, S) для различных значений α , β и γ . Эти ФП показывают зависимость поведения (совокупности движений) системы в виде малочисленной учебной группы от параметров α , β и γ . ФП на фазовой плоскости (S, I) показывает возможные траектории движения учащихся из подгруппы S в подгруппу I , (I, R) – из подгруппы I в подгруппу R и (R, S) – из подгруппы S в подгруппу R .

Для улучшения наглядности были приняты следующие условные обозначения: асимптотически устойчивый дискретический узел (УУ) – точка синего цвета; седло (НС) – точка жёлтого цвета; неустойчивый узел (НУ) – точка красного цвета; не допускающая линеаризацию виртуальная ОТ (НЛ) – точка зелёного цвета. Движение к УУ может осуществляться по траекториям, исходящим из НУ с притяжением (изгибами) к НС, причём чем ближе к УУ находятся неустойчивые ОТ, тем бы-

¹⁸ Макаров С. Е., Макарова И. Д. Применение пакетов компьютерной математики для построения интегральных кривых в курсе «дифференциальные уравнения» // Методика преподавания математических и естественнонаучных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития : материалы VI Всерос. НПК. Омск: ОмГТУ, 2019. С. 61-65. EDN: HRMREW

¹⁹ PhaPl: Phase Plane Helper [Электронный ресурс] // GitHub, 2025. URL: <https://phapl.github.io/> (дата обращения: 07.12.2024).



стрее завершается процесс движения к точке равновесия, соответствующей устойчивому состоянию системы.

На рис. 4 и 5 представлены ФП для двух случаев: 1) $\gamma < \beta < \alpha$ и 2) $\alpha < \gamma < \beta$. Процесс на рис. 4, а) протекает медленнее, чем на рис. 5, а), поскольку скорость преодоления когнитивной перегрузки в большей степени зависит от величины коэффициента преодоления γ , чем от величины коэффициента защищённости α . Сравнение ФП показывает, что в обоих случаях имеется по три ОТ одного и того же типа: УУ, НС и НУ. Отмечается, что координаты ОТ по типу седла в первом случае превосходят значения координат седла для второго случая, что свидетельствует о «более сильном притяжении» соответствующей ОТ, увеличивающем и радиус кривизны траекторий движения, и, соответственно, время достижения системой равновесного состояния. Однако «более медленная» система на рис. 4 оказалась более надёжной в смысле устойчивости, поскольку она имеет более обширные зоны устойчивого равновесия²⁰.

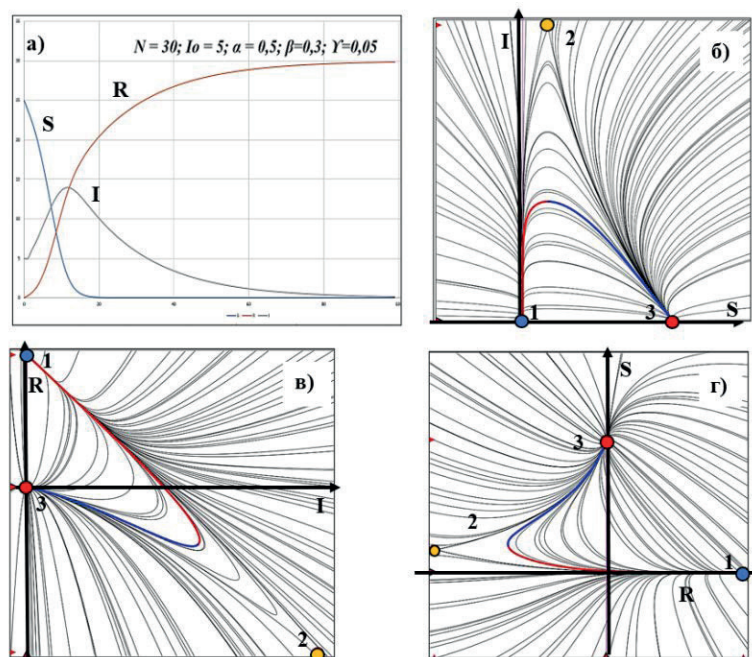
Таким образом, система с соотношением между информационными коэффициентами $\gamma < \beta < \alpha$ обладает меньшей скоростью, но большими областями устойчивости, чем система с соотношением $\alpha < \gamma < \beta$, которая является менее предпочтительной. Как оказалось, более высокая скорость преодоления когнитивной перегрузки при таких значениях параметров не гарантирует более стабильного течения всего процесса: изменение начальных условий при меньшей площади зоны устойчивого

равновесия может «выбить» систему из стабильного состояния.

Иную картину демонстрируют рис. 6 и 7. Здесь представлены временно зависимости и ФП для частного случая, при котором коэффициент защищённости от когнитивной перегрузки α равен коэффициенту её преодоления γ при разных значениях β : 1) $\alpha = \gamma, \alpha > \beta$ и 2) $\alpha = \gamma, \alpha < \beta$. Процесс на рис. 6, а) происходит быстрее, чем на рис. 7, а), за счёт меньшего уровня I_{max} , который тормозит весь процесс, поскольку соответствует большому наполнению подгруппы I , требующему дополнительное время на переход учащихся в подгруппу R .

Сравнение ФП на рис. 6, б)-г) и 7, б)-г) показывает, что в обоих случаях имеется по три ОТ одного и того же типа: УУ, НС и НУ. Однако в первом случае при $\alpha > \beta$ все седла, имеющие координаты $(S=30; I=0)$, $(R=0; I=0)$ и $(S=30; R=0)$, находятся на осях координат. Это означает, что соотношение $\alpha > \beta$ создаёт более обширные зоны устойчивого равновесия на фазовой плоскости и меньшую кривизну траекторий движения в сторону УУ, чем во втором случае – когда при $\alpha < \beta$ седла расположены вблизи осей координат.

Таким образом, соотношение между информационными коэффициентами $\alpha = \gamma, \alpha > \beta$ создаёт наиболее оптимальные условия для преодоления когнитивной перегрузки: и более высокую скорость преодоления, и более обширные зоны устойчивости.

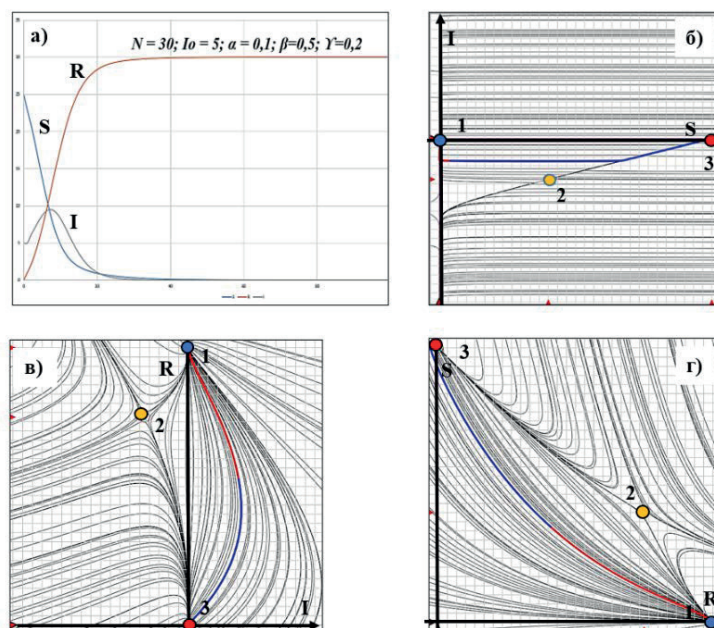


Р и с. 4. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R для $\alpha = 0,5; \beta = 0,3; \gamma = 0,05$ (а) и фазовые портреты с тремя ОТ: (S, I) ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (5; 62,5) – НС; ОТ3 (30; 0) – НУ (б); (I, R) ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (62,5; – 37,5) – НС; ОТ3 (0; 0) – НУ (в); (R, S) ОТ1 (30;0) – УУ; ОТ2 (– 37,5; 5) – НС; ОТ3 (0; 30) – НУ (г)

Fig. 4. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R for $\alpha = 0.5; \beta = 0.3; \gamma = 0.05$ (a) and phase portraits with three SPs: (S, I) SP1 (0; 0) – SN; SP2 (5; 62.5) – NS; SP3 (30; 0) – UN (b); (I, R) SP1 (0;30) – SN; SP2 (62.5; – 37.5) – NS; SP3 (0; 0) – UN (c); (R, S) OT1 (30;0) – SN; SP2 (– 37.5; 5) – NS; SP3 (0; 30) – UN (d) SP – special point, SN – asymptotically stable dicretic node, NS – saddle, UN – unstable node

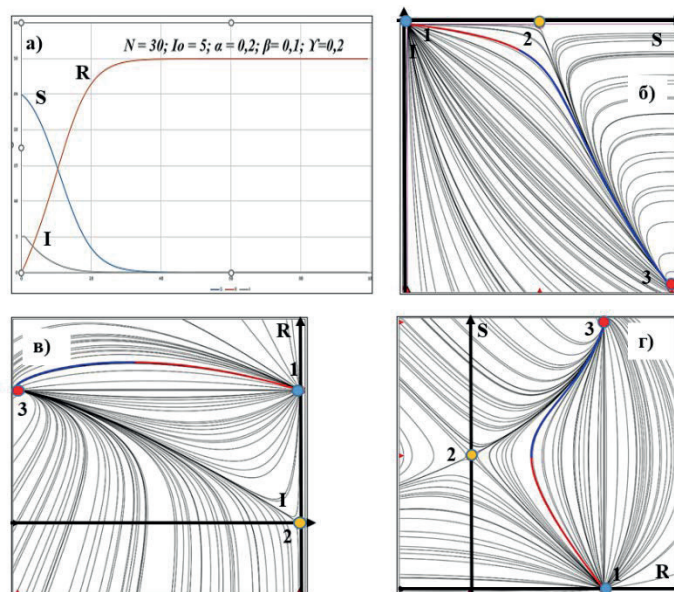
²⁰ Изучению зон устойчивого равновесия будет посвящено дальнейшее исследование.





Р и с 5. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R для $\alpha = 0,1; \beta = 0,5; \gamma = 0,2$ (а) и фазовые портреты с тремя ОТ: (S, I) ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (12; – 4,5) – НС; ОТ3 (30; 0) – НУ (б); (I, R) ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (– 4,5; 22,5) – НС; ОТ3 (0; 0) – НУ (в); (R, S) ОТ1 (30;0) – УУ; ОТ2 (22,5; 12) – НС; ОТ3 (0; 30) – НУ (г)

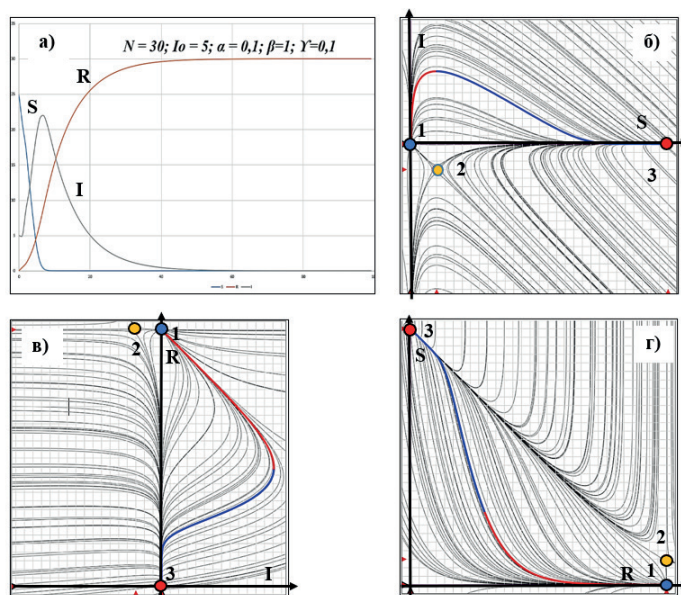
Fig. 5. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R for $\alpha = 0.1; \beta = 0.5; \gamma = 0.2$ (a) and phase portraits with three SPs: (S, I) SP1 (0;0) – SN; SP2 (12; – 4,5) – NS; SP3 (30; 0) – UN (b); (I, R) SP1 (0;30) – SN; SP2 (– 4,5; 22,5) – NS; SP3 (0; 0) – UN (c); (R, S) SP1 (30;0) – SN; SP2 (22,5; 12) – NS; SP3 (0; 30) – UN (d)



Р и с 6. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R для частного случая $(\alpha = \gamma): \alpha = 0,2; \beta = 0,1; \gamma = 0,2$ (а) и фазовые портреты с тремя ОТ: (S, I) ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (30; 0) – НС; ОТ3 (60; – 60) – НУ (б); (I, R) ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (0; 0) – НС; ОТ3 (– 60; 30) – НУ (в); (R, S) ОТ1 (30;0) – УУ; ОТ2 (0; 30) – НС; ОТ3 (30; 60) – НУ (г)

Fig. 6. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R for a special case $(\alpha = \gamma): \alpha = 0,2; \beta = 0,1; \gamma = 0,2$ (a) and phase portraits with three SPs: (S, I) SP1 (0;0) – SN; SP2 (30; 0) – NS; SP3 (60; – 60) – UN (b); (I, R) SP1 (0;30) – SN; SP2 (0; 0) – NS; SP3 (– 60; 30) – UN (c); (R, S) SP1 (30;0) – SN; SP2 (0; 30) – NS; SP3 (30; 60) – UN (d)





Р и с. 7. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S , I и R для частного случая ($\alpha = \gamma$): $\alpha = 0,1$; $\beta = 1,0$; $\gamma = 0,1$ (а) и фазовые портреты с тремя ОТ: (S, I) ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (3; – 3) – НС; ОТ3 (30; 0) – НУ (б); (I, R) ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (– 3; 30) – НС; ОТ3 (0; 0) – НУ (в); (R, S) ОТ1 (30;0) – УУ; ОТ2 (30; 0) – НС; ОТ3 (0; 30) – НУ (г)

Fig. 7. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S , I and R for a special case ($\alpha = \gamma$): $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,2$ (а) and phase portraits with three SPs: (S, I) SP1 (0;0) – SN; SP2 (3; – 3) – NS; SP3 (30; 0) – UN (б); (I, R) SP1 (0;30) – SN; SP2 (– 3; 30) – NS; SP3 (0; 0) – UN (с); (R, S) SP1 (30;0) – SN; SP2 (30; 0) – NS; SP3 (0; 30) – UN (д)

Анализ вырожденных случаев при построении фазовых портретов

К вырожденным случаям приводят значения коэффициентов α , β и γ , при которых выражения для ОТ2, а именно N , N и N имеют нули в числителях и/или знаменателях (см. Таблицу). При нулевом числителе, то есть при $\beta = \gamma$ или $\alpha = 0$, ОТ2 сливается с ОТ1 или ОТ3, а при $\alpha = \beta$ или $\beta = 0$ соответствующая координата устремляется в бесконечность. Эти случаи интересны только в теоретическом плане, поскольку ни один из них не соответствует какой-либо реальной ситуации²¹.

1. При $\alpha = \beta$ на ФП (S, I) одна из ОТ (седло) имеет координаты $(N; +\infty)$, на ФП (I, R) её координаты $(+\infty; +\infty)$, а на ФП (R, S) они составляют $(+\infty; N)$, поэтому данную ОТ нельзя отобразить на фазовой плоскости.

На рис. 8, б)-г) представлены ФП системы для $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,4$; $\gamma = 0,01$ с двумя ОТ: одним УУ и одним НУ, а ОТ по типу седла отсутствует. На рис. 8, б) траектории движения точек системы на фазовой плоскости (S, I) вдали от УУ имеют относительно небольшой наклон, однако при подходе к УУ меняют характер и устремляются к УУ непосредственно вдоль оси I , что означает бесконечную скорость достижения системой положения равновесия.

Таким образом, ФП показывает, что движение к УУ совершается из НУ, а сам процесс, протекающий довольно медленно на начальных стадиях, при подходе к УУ завершается довольно стремительно. Это объясняется значительным «всплеском» I

до $I_{\max}$ (резким переходом учащихся из подгруппы S), замедляющим движение на начальном этапе, и последующим спадом I , приводящим к быстрому росту значений R в самой конечной фазе (см. рис. 8, а).

2. При $\beta = \gamma$ ОТ2 и ОТ3 совпадают и на ФП (S, I) имеют координаты $(N; 0)$, на ФП (I, R) их координаты $(0; 0)$ и на ФП (R, S) они составляют $(0; N)$.

На рис. 9, б)-г) представлены ФП системы для $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$; $\gamma = 0,3$ с двумя ОТ: одним УУ и одной НЛ, а ОТ по типу седла отсутствует. Это означает, что нет «отвлекающего» притяжения седла, а движение к точке равновесия осуществляется на высокой скорости, хотя и не равной бесконечности, как в предыдущем случае. Поскольку ОТ2 не допускает линеаризацию (то есть по существу является виртуальной), то можно считать, что движение к УУ совершается из «ниоткуда».

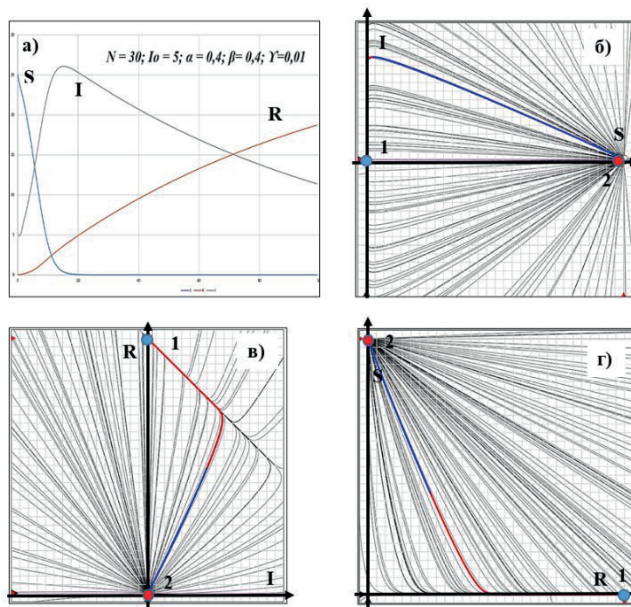
3. При $\beta = 0$ ОТ3 на ФП (S, I) имеет координаты $(+\infty; +\infty)$, на ФП (I, R) её координаты $(+\infty; N)$, а на ФП (R, S) они составляют $(N; +\infty)$. Это означает, что система имеет только две ОТ – УУ и НС, а традиционный НУ отсутствует. Этот случай, в отличие от предыдущих, может соответствовать ситуации, при которой подгруппа S не подвергается никаким деструктивным воздействиям избыточной учебной информации. Тогда коэффициенты защищённости от когнитивной перегрузки α и преодоления когнитивной перегрузки γ теряют смысл в силу отсутствия этой самой перегрузки, и всё исследование утрачивает актуальность.

²¹ Случай $\gamma = 0$ – особый. Он будет рассмотрен в следующем разделе. Случай $\alpha = 0$ исследовать не удалось, поскольку веб-приложение PhaPl не смогло построить соответствующие ФП.

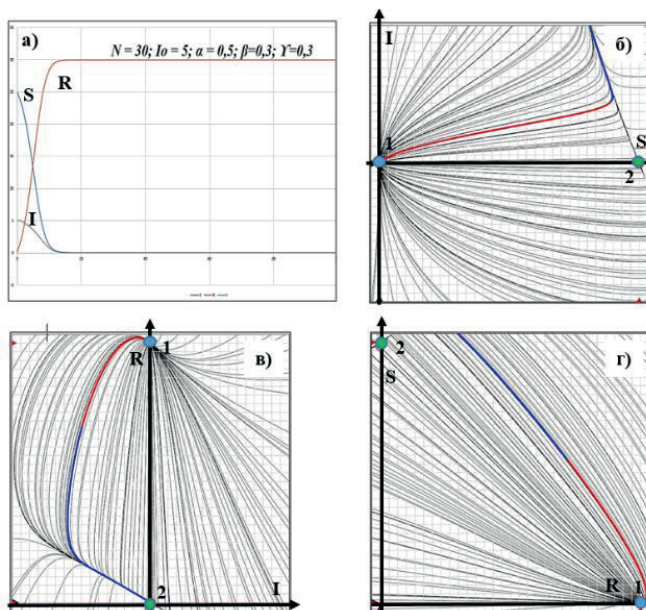


На рис. 10, б)-г) представлены ФП системы для $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,0$; $\gamma = 0,2$, которые показывают, что заход к точке равновесия УУ может осуществляться с учётом притяжения седла на разных

скоростях (от 0 до ∞) в зависимости от начальных условий, но, как и в предыдущем случае, движение совершается из «ниоткуда».



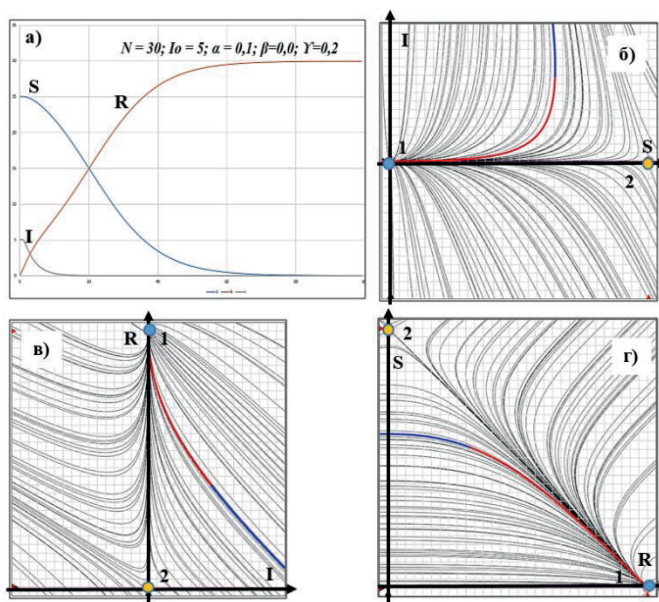
Р и с. 8. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R для вырожденного случая ($\alpha = \beta$): $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,4$; $\gamma = 0,01$ (а) и фазовые портреты с двумя ОТ: (S, I) ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (30; 0) – НУ (б); (I, R) ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (0; 0) – НУ (в); (I, S) ОТ1 (30;0) – УУ; ОТ2 (0; 30) – НУ (г)
Fig. 8. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R for a special case ($\alpha = \beta$): $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,4$; $\gamma = 0,01$ (a) and phase portraits with two SPs: (S, I) SP1 (0;0) – SN; SP2 (30; 0) – UN (b); (I, R) SP1 (0;30) – SN; SP2 (0; 0) – UN (c); (I, S) SP1 (30;0) – SN; SP2 (0; 30) – UN (d)



Р и с. 9. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S, I и R для вырожденного случая ($\beta = \gamma$): $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$; $\gamma = 0,3$ (а) и фазовые портреты (S, I) с двумя ОТ: ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (30; 0) – НЛ (б); (I, R) с двумя ОТ: ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (0; 0) – НЛ (в); (I, S) с двумя ОТ: ОТ1 (30; 0) – УУ; ОТ2 (0; 30) – НЛ (г)

Fig. 9. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S, I and R for a special case ($\beta = \gamma$): $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$; $\gamma = 0,3$ (a) and phase portraits with two SPs: SP1 (0;0) – SN; SP2 (30; 0) – NLSP (b); (I, R) with two SPs: SP1 (0;30) – SN; SP2 (0; 0) – NLSP (c); (I, S) with two SPs: SP1 (30; 0) – SN; SP2 (0; 30) – NLSP (d)





Р и с. 10. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S , I и R для вырожденного случая ($\beta = 0$): $\alpha = 0,1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0,2$ (а) и фазовые портреты с двумя ОТ: (S, I) ОТ1 (0;0) – УУ; ОТ2 (30; 0) – НС (б); (I, R) ОТ1 (0;30) – УУ; ОТ2 (0; 0) – НС (в); (I, S) ОТ1 (30;0) – УУ; ОТ2 (0; 30) – НС (г)

Fig. 10. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S , I and R for a special case ($\beta = 0$): $\alpha = 0,1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0,2$ (a) and phase portraits with two SPs: (S, I) SP1 (0;0) – SN; SP2 (30; 0) – SadP (b); (I, R) SP1 (0;30) – SN; SP2 (0; 0) – SadP (c); (I, S) SP1 (30;0) – SN; SP2 (0; 30) – SadP (d)

Исследование взрывного характера процесса преодоления когнитивной перегрузки

Исследованию SIR -моделей, описывающих динамические системы, поведение которых может приобретать деструктивный характер, посвящён ряд известных публикаций [24]. Например, в статье [2] обсуждается разработка математического аппарата для прогнозирования наиболее неблагоприятного сценария развития деструктивных процессов на примере распространения инфекции в замкнутой группе населения при заданных начальных условиях. В публикации [13] рассматривается изучение законов поведения определённых групп населения, прогнозирования развития и возможного влияния на это поведение вплоть до превращения этой группы в управляемую или неуправляемую «толпу» или «массу». Автор сформулировал гипотезу о параметрах предложенной информационной модели, при которых становится возможен «социальный взрыв» на уровне группы. Работа [25] посвящена анализу построения информационной модели «социального взрыва», соответствующей новейшим «цветным» революциям. Анализ, проведённый автором статьи, позволяет предотвратить инициацию такого взрыва с использованием современных информационных технологий.

Рассмотрим, может ли ожидать подобный «взрыв» при анализе SIR -модели немногочисленной учебной группы, члены которой подвергаются атаке избыточного учебного материала. Предположим, что близкая по своим последствиям неуправляемая ситуация может являться одним из вырожденных случаев, описанных в предыдущем разделе. Действительно,

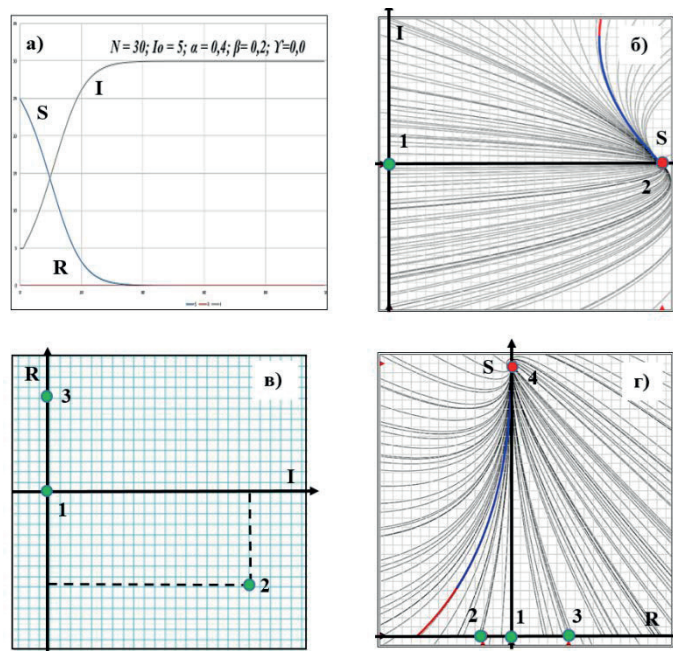
при $\gamma = 0$, то есть когда коэффициент преодоления когнитивной перегрузки равен нулю, группа учащихся не справляется с объёмом избыточной учебной информации. Ожидается при этом, что в итоговой подгруппе R окажутся только те учащиеся, которые перешли в неё непосредственно из подгруппы S (если заданы соответствующие начальные условия), а остальные так и остались в подгруппе I . На подобный ход событий указывает график временной зависимости на рис. 11, а), где все учащиеся находятся в подгруппе I , а подгруппы S и R полностью опустели (только если не было задано начальное значение $S_{нач}$).

Как это явление будет отражено на фазовой плоскости? ФП (S, I) и (R, S) не имеют устойчивых ОТ: для (S, I) имеем только один НУ и одну нелинеаризованную ОТ²², а для (R, S) – так же один НУ и четыре нелинеаризованных ОТ, как показано на рис 11, б) и г). ФП для (I, R) с помощью веб-приложения PhaPl построить не удалось (рис. 11, в), а координаты трёх виртуальных ОТ для этой системы фазовых координат вычислены «вручную» по формулам из Таблицы.

Хотя рост $I(t)$ не является взрывным, то есть его значения не устремляются в бесконечность, весь процесс можно назвать «взрывом», поскольку это самый неблагоприятный и неуправляемый вариант развития ситуации. Таким образом, «взрывному» характеру процесса преодоления когнитивной перегрузки, который приводит к нежелательным деструктивным последствиям неусвоения нового знания, соответствует нулевое значение коэффициента преодоления когнитивной перегрузки γ , что является интуитивно понятным фактом, подтверждённым аналитически и графически.

²² На ФП (S, I) существует ещё одна виртуальная ОТ с координатами (0; 60), вычисленными «вручную».





Р и с. 11. Графики временной динамики числа учащихся в подгруппах S , I и R для вырожденного («взрывного») случая ($\gamma = 0$): $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,2$; $\gamma = 0$ (а) и фазовые портреты: (S, I) с двумя ОТ: ОТ1 (0;0) – НЛ; ОТ2 (30; 0) – НУ (б); (I, R) с тремя ОТ: ОТ1 (0; 0) – НЛ; ОТ2 (60; – 30) – НЛ; ОТ3 (0; 30) – НЛ (в); (I, S) с четырьмя ОТ: ОТ1 (0;0) – НЛ; ОТ2 (– π ; 0) – НЛ; ОТ3 (2 π ; 0) – НЛ; ОТ4 (0; 30) – НУ (г)

Fig. 11. Graphs of the time dynamics of the number of students in subgroups S , I and R for a special (“explosive”) case ($\gamma = 0$): $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,2$; $\gamma = 0$ (a) and phase portraits: (S, I) with two SPs: SP1 (0;0) – NLSP; SP2 (30; 0) – UN (b); (I, R) with three SPs: SP1 (0; 0) – NLSP; SP2 (60; – 30) – NLSP; SP3 (0; 30) – NLSP (c); (I, S) with four SPs: SP1 (0;0) – NLSP; SP2 (– π ; 0) – NLSP; SP3 (2 π ; 0) – NLSP; SP4 (0; 30) – UN (d)

Заключение

Численно-графический анализ SIR -модели, описывающей поведение динамической системы в виде малочисленной учебной группы, преодолевающей когнитивную перегрузку, которая вызвана избыточной учебной информацией, был проведён двумя способами: построением графиков временной зависимости наполнения SIR -подгрупп и методом фазовой плоскости.

Графики временной зависимости $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ при различных значениях информационных параметров – коэффициентов защищённости от когнитивной перегрузки α , подверженности когнитивной перегрузке β и преодоления когнитивной перегрузки γ – показали, что высокая скорость достижения всеми учащимися состояния «плато», то есть полного преодоления когнитивной перегрузки, не является безусловной целью, определяющим фактором и гарантией стабильности этого состояния. Кроме того, с помощью только временной зависимости переменных параметров системы не удастся получить ответ на вопрос, будет ли система подвержена риску потери устойчивости при изменении внешнего воздействия. Дополнительное исследование поведения SIR -модели с различными параметрами когнитивной перегрузки, проведённое на фазовой плоскости, показало, что при больших коэффициентах α и γ и меньшем коэффициенте β члены ученической

группы преодолевают когнитивные перегрузки за меньшее время, хотя этот процесс не обязательно сопровождается образованием более обширных зон устойчивого равновесия, причём скорость преодоления когнитивной перегрузки в большей степени зависит от величины коэффициента преодоления γ , чем от величины коэффициента защищённости α ²³. Поэтому система с соотношением вида $\gamma < \beta < \alpha$ обладает меньшей скоростью, но большими областями устойчивости, чем система с соотношением вида $\alpha < \gamma < \beta$, что является более предпочтительным вариантом. Это означает, что более высокая скорость преодоления когнитивной перегрузки не гарантирует более стабильного течения всего процесса: изменение начальных условий при меньшей площади зоны устойчивого равновесия может нарушить стабильно устойчивое состояние системы. Тогда как соотношение вида $\alpha \approx \gamma$ и $\alpha > \beta$ создаёт наиболее оптимальные условия для преодоления когнитивной перегрузки, характеризующиеся и более высокой скоростью преодоления когнитивной перегрузки, и более обширными зонами устойчивости.

Таким образом, смоделированная целостная картина явления и анализ условий движения системы в виде малочисленной учебной группы к состоянию устойчивого равновесия показали, что критерии выбора оптимальных режимов преодоления когнитивной перегрузки являются сложными функциями, зависящими от ряда параметров, что требует тщательного

²³ Весовые коэффициенты вклада каждого параметра α и γ ещё предстоит определить.



изучения поведения системы с опорой не только на графики временной зависимости наполнения *SIR*-подгрупп, но и преимущественно на соответствующие фазовые портреты.

Кроме того, анализ особых точек на фазовой плоскости показал, что при формулировке критериев выбора оптимальных режимов следует избегать таких значений параметров динамической системы, при которых наблюдается сужение областей устойчивого равновесия, вырождение (непредсказуемость) её функций, чрезмерно резкое изменение (искривление) траекторий движения или взрывной характер течения процесса, чему соответствуют следующие значения информационных параметров системы: равенство коэффициентов защищённости и подверженности когнитивной перегрузке $\alpha = \beta$, равенство коэффициентов подверженности и преодоления

когнитивной перегрузки $\beta = \gamma$, нулевое значение коэффициентов подверженности и преодоления когнитивной перегрузки $\beta = 0$ и $\gamma = 0$.

На основании полученных результатов намечены основные направления дальнейших исследований: изучение по фазовому портрету качественных характеристик зон устойчивого равновесия динамической системы, влияние на размеры этих зон типов особых точек и значений информационных параметров, вклад долей (весовых коэффициентов) каждого информационного параметра в общую скорость течения процесса преодоления когнитивной перегрузки, сопряжение теоретических расчётов с реальными данными, влияние фактора начальных условий в виде объёма избыточной информации на течение процесса преодоления когнитивной перегрузки.

Список использованных источников

- [1] Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 1927. Vol. 115, issue. 772. P. 700-721. URL: <https://www.jstor.org/stable/94815> (дата обращения: 07.12.2024).
- [2] Marathe M., Vullikanti A. K. S. Computational epidemiology // *Communications of the ACM*. 2013. Vol. 56, issue 7. P. 88-96. <https://doi.org/10.1145/2483852.2483871>
- [3] Корчажкина О.М. Исследование экстремальных условий протекания деструктивных процессов с помощью *SIR*-модели // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2020. Т. 16, № 3. С. 730-742. <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202003.610-622>
- [4] Albert R. Network Inference, Analysis, and Modeling in Systems Biology // *The Plant Cell*. 2007. Vol. 19, issue 11. P. 3327-3338. <https://doi.org/10.1105/tpc.107.054700>
- [5] An G. Characterization of fundamental aspects of biology with abstract mathematics: Category theory as a pathway for dynamic computational modeling of biologic systems // *Journal of Critical Care*. 2011. Vol. 26, issue 2. P. e8-e9. <https://doi.org/10.1016/j.jcrc.2010.12.033>
- [6] Chen X., Zhu W. Network analysis for exploring systems biology. In: 2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics. Yantai, China: IEEE Press; 2010. p. 2578-2581. <https://doi.org/10.1109/BMEI.2010.5639724>
- [7] Analogies between structural and systems biology and systems-of-systems engineering in dynamic environments / S. Moitra [et al.] // 2010 5th International Conference on System of Systems Engineering. Loughborough, UK: IEEE Press, 2010. P. 1-7. <https://doi.org/10.1109/SYSOSE.2010.5544104>
- [8] Numerical modeling and theoretical analysis of a nonlinear advection-reaction epidemic system / Sh. Azam [et al.] // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020. Vol. 193. Article number: 105429. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105429>
- [9] Andersson H., Britton T. Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis // *Lecture Notes in Statistics*. Vol. 151. New York, NY: Springer, 2000. 156 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1158-7>
- [10] FluTE, a Publicly Available Stochastic Influenza Epidemic Simulation Model / D. L. Chao [et al.] // *PLOS Computational Biology*. 2010. Vol. 6, issue 1. Article number: e1000656. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000656>
- [11] Pastor-Satorras R., Castellano C., Van Mieghem P., Vespignani A. Epidemic processes in complex networks // *Reviews of Modern Physics*. 2015. Vol. 87, issue 3. P. 925-979. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.925>
- [12] Зиновьев И. В., Манько Н. И.-В., Спица И. А. Построение математической модели поведения социальной группы на основе медико-биологической *SIR*-модели распространения эпидемии // *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2013. № 2. С. 36-41.
- [13] Lloyd A. L., May R. M. How Viruses Spread Among Computers and People // *Science*. 2001. Vol. 292, issue 5520. P. 1316-1317. <https://doi.org/10.1126/science.1061076>
- [14] Time and cognitive load in working memory / P. Barrouillet [et al.] // *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*. 2007. Vol. 33, issue 3. P. 570-585. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.33.3.570>
- [15] de Jong T. Cognitive load theory, educational research, and instructional design: some food for thought // *Instructional Science*. 2010. Vol. 38. P. 105-134. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9110-0>
- [16] Корчажкина О. М. *SIR*-модель для исследования деструктивных процессов при усвоении нового знания // *Системы и средства информатики*. 2021. Т. 31, № 1. С. 168-180. <https://doi.org/10.14357/08696527210114>
- [17] Болбаков Р. Г. Когнитив-энтропия как характеристика образовательных процессов // *Дистанционное и виртуальное обучение*. 2016. № 2. С. 11-17. EDN: VKAMUV
- [18] Жумартова Б. О., Ысмагул Р. С. Применение *SIR*-модели в моделировании эпидемий // *Международный журнал по гуманитарным и естественным наукам*. 2021. № 12-2(63). С. 6-9. <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2021-12-2-6-9>



- [19] Mansal F, Baldé M. A. M. T., Bah A.O. Optimal Control on a Mathematical Model of SIR and Application to Covid-19 // *Nonlinear Analysis, Geometry and Applications. Trends in Mathematics* ; ed. by D. Seck [et al.]. Cham: Birkhäuser, 2024. P. 101-128. https://doi.org/10.1007/978-3-031-52681-7_4
- [20] The SIR Model and Identification of Spreaders / P. Shakarian [et al.] // *Diffusion in Social Networks. SpringerBriefs in Computer Science*. Cham: Springer, 2015. P. 3-18. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23105-1_2
- [21] van Merriënboer J. J. G., Sweller J. Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directions // *Educational Psychology Review*. 2005. Vol. 17. P. 147-177. <https://doi.org/10.1007/s10648-005-3951-0>
- [22] Möller M., Winter M., Reichert M. Cognitive Factors in Process Model Comprehension – A Systematic Literature Review // *Brain Sciences*. 2025. Vol. 15, issue 5. Article number: 505. <https://doi.org/10.3390/brainsci15050505>
- [23] Черепанов А. А. Веб-приложение PhaPI для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, 2018. Т. 24, № 3. С. 41-52. <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-41-52>
- [24] Challenging Cognitive Load Theory: The Role of Educational Neuroscience and Artificial Intelligence in Redefining Learning Efficacy / E. Gkintoni [et al.] // *Brain Sciences*. 2025. Vol. 15. Article number: 203. <https://doi.org/10.3390/brainsci15020203>
- [25] Чернявский А. Д. Информационная модель «социального взрыва» // *Современные исследования социальных проблем*. 2012. № 1(09). С. 406-426. EDN: PAFPCR

Поступила 07.12.2024; одобрена после рецензирования 16.02.2025; принята к публикации 27.03.2025.

Об авторе:

Корчажкина Ольга Максимовна, старший научный сотрудник Института кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга, ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), кандидат технических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-0020-4914>, olgakomax@gmail.com

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 1927;115(772):700-721. Available at: <https://www.jstor.org/stable/94815> (accessed 07.12.2024).
- [2] Marathe M., Vullikanti A.K.S. Computational epidemiology. *Communications of the ACM*. 2013; 56(7):88-96. <https://doi.org/10.1145/2483852.2483871>
- [3] Korchazhkina O.M. The Study of Extreme Conditions for Destructive Processes Using the SIR Model. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2020;16(3):610-622. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITI-TO.16.202003.610-622>
- [4] Albert R. Network Inference, Analysis, and Modeling in Systems Biology. *The Plant Cell*. 2007;19(11):3327-3338. <https://doi.org/10.1105/tpc.107.054700>
- [5] An G. Characterization of fundamental aspects of biology with abstract mathematics: Category theory as a pathway for dynamic computational modeling of biologic systems. *Journal of Critical Care*. 2011;26(2):e8-e9. <https://doi.org/10.1016/j.jcrc.2010.12.033>
- [6] Chen X., Zhu W. Network analysis for exploring systems biology. In: 2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics. Yantai, China: IEEE Press; 2010. p. 2578-2581. <https://doi.org/10.1109/BMEI.2010.5639724>
- [7] Moitra, S., Yanamala N., Tasthan O., Singh I., Langmead C.J., Klein-Seetharaman J. Analogies between structural and systems biology and systems-of-systems engineering in dynamic environments. In: 2010 5th International Conference on System of Systems Engineering. Loughborough, UK: IEEE Press, 2010. p. 1-7. <https://doi.org/10.1109/SYSE.2010.5544104>
- [8] Azam Sh., et al. Numerical modeling and theoretical analysis of a nonlinear advection-reaction epidemic system. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020;193:105429. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105429>
- [9] Andersson H., Britton T. Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis. *Lecture Notes in Statistics*. Vol. 151. New York, NY: Springer; 2000. 156 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1158-7>
- [10] Chao D.L., Halloran M.E., Obenchain V.J., Longini I.M.Jr. FluTE, a Publicly Available Stochastic Influenza Epidemic Simulation Model. *PLOS Computational Biology*. 2010;6(1):e1000656. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000656>
- [11] Pastor-Satorras R., Castellano C., Van Mieghem P., Vespignani A. Epidemic processes in complex networks. *Reviews of Modern Physics*. 2015;87(3):925-979. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.925>
- [12] Zinoveev I.V., Manko N.I.-V., Spitsa I.A. Construction of a mathematical model of social group behavior based on the medical and biological SIR model of epidemic spread. *News of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. 2013;(2):36-41. (In Russ., abstract in Eng.)
- [13] Lloyd A.L., May R.M. How Viruses Spread Among Computers and People. *Science*. 2001;292(5520):1316-1317. <https://doi.org/10.1126/science.1061076>



- [14] Barrouillet P, Bernardin S, Portrat S, Vergauwe E., Camos V. Time and cognitive load in working memory. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*. 2007;33(3):570-585. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.33.3.570>
- [15] de Jong T. Cognitive load theory, educational research, and instructional design: some food for thought. *Instructional Science*. 2010;38:105-134. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9110-0>
- [16] Korchazhkina O.M. SIR model for studying destructive processes in the acquisition of new knowledge. *Systems and Means of Informatics*. 2021;31(1):168-180. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.14357/08696527210114>
- [17] Bolbakov R.G. Cognitive entropy as a characteristic of educational processes. *Distance and virtual learning*. 2016;(2):11-17. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: VKAMUV
- [18] Zhumartova B.O., Ysmagul R.S. Application of the SIR model in modeling epidemics. *International Journal of Humanities and Natural Sciences*. 2021;(12-2):6-9. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2021-12-2-6-9>
- [19] Mansal F, Baldé M.A.M.T., Bah A.O. Optimal Control on a Mathematical Model of SIR and Application to Covid-19. In: Seck D., Kangni K., Sambou M.S., Nang P., Fall M.M. (eds.) *Nonlinear Analysis, Geometry and Applications. Trends in Mathematics*. Cham: Birkhäuser; 2024. p. 101-128. https://doi.org/10.1007/978-3-031-52681-7_4
- [20] Shakarian P, Bhatnagar A, Aleali A., Shaabani E., Guo R. The SIR Model and Identification of Spreaders. In: *Diffusion in Social Networks. SpringerBriefs in Computer Science*. Cham: Springer; 2015. p. 3-18. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23105-1_2
- [21] van Merriënboer J.J.G., Sweller J. Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directions. *Educational Psychology Review*. 2005;17:147-177. <https://doi.org/10.1007/s10648-005-3951-0>
- [22] Möller M., Winter M., Reichert M. Cognitive Factors in Process Model Comprehension – A Systematic Literature Review. *Brain Sciences*. 2025;15(5):505. <https://doi.org/10.3390/brainsci15050505>
- [23] Cherepanov A.A. PhaPI web application for automatic construction and study of phase portraits on a plane. *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*. 2018;24(3):41-52. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-41-52>
- [24] Gkintoni E., Antonopoulou H., Sortwell A., Halkiopoulos C. Challenging Cognitive Load Theory: The Role of Educational Neuroscience and Artificial Intelligence in Redefining Learning Efficacy. *Brain Sciences*. 2025;15:203. <https://doi.org/10.3390/brainsci15020203>
- [25] Chernyavsky A.D. Information model of the “social explosion”. *Modern studies of social problems*. 2012;(1):406-426. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PAF CPR

Submitted 07.12.2024; approved after reviewing 16.02.2025; accepted for publication 27.03.2025.

About the author:

Olga M. Korchazhkina, Senior Research Fellow of the A.I. Berg Institute for Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Cand. Sci. (Tech.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0020-4914>, olgakomax@gmail.com

The author has read and approved the final manuscript.

