Прикладные проблемы оптимизации

https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.398-410
УДК 621

Метод вейвлет-нейросетевого синтеза оптимальной по интегральному байесовскому критерию наблюдаемой многомерной нестационарной линейной стохастической системы

Оригинальная статья

И. Н. Синицын, В. И. Синицын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова*

ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22

* TKonashenkova64@mail.ru

Аннотация

Разработан новый метод синтеза оптимальной по интегральному функциональному байесовскому критерию (ФБК) многомерной линейной стохастической системы (СтС). СтС описывается линейными уравнениями В. С. Пугачёва для входного и выходного стохастических процессов (СтП). В состав векторного входного СтП входит полезный сигнал и аддитивная многомерная нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей ковариационных функций. Случайная помеха не зависит от вектора случайных параметров полезного сигнала. Распределение вектора случайных параметров задано. Выходной СтП задан известным преобразованием полезного сигнала из состава входного СтП. Для моделирования входного СтП применяется метод вейвлет-канонических разложений СтП, позволяющий свести моделирование СтП, заданного на конечном промежутке времени, к моделированию совокупности входных случайных величин (СВ). Построена модель ФБК оптимальной оценки выходного СтП в виде линейной комбинации входных СВ с коэффициентами, заданными детерминированными векторными координатными функциями. Скалярные координатные функции аппроксимируются вейвлет-разложениями (ВЛР) по ортонормированному базису вейвлетов с компактными носителями. Для нахождения неизвестных коэффициентов ВЛР координатных функций разработана архитектура многослойной вейвлет-нейронной сети (ВНС). Обучение ВНС с учителем осуществляется методом обратного распространения ошибки. Получены формулы для математического ожидания, второго начального момента и ковариационной матрицы ошибки ФБК оптимальной оценки выходного СтП. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: байесовский критерий, вейвлет, вейвлет-нейронная сеть, каноническое разложение, моделирование, оптимальная оценка, оптимальный синтез, стохастический процесс, стохастическая система, функция потерь, функциональный байесовский критерий

Финансирование: Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Метод вейвлет-нейросетевого синтеза оптимальной по интегральному байесовскому критерию наблюдаемой многомерной нестационарной линейной стохастической системы / И. Н. Синицын [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 3. С. 398-410. https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.398-410

Applied Optimization Problems

Method of Wavelet Neural Network Synthesis of Observable Multidimensional Nonstationary Linear Stochastic System

Original article

I. N. Sinitsyn, V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, T. D. Konashenkova*

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Address: 44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation

* TKonashenkova64@mail.ru

Abstract

Paper is dedicated to the new wavelet neural network method of synthesis by integral functional Bayes criterion (FBC) for observable multidimensional linear stochastic system (StS) described by Pugachev equations for sector input and output signal. Input signal contains useful signal and additive noise. Noise being multidimensional normal stochastic process (StP) does not depend up on random parameters of useful signal. Distribution of random parameters is known. Output signal is connected with input signal by known transform. For input signal modeling method of wavelet canonical expansions (CE) for fixed time interval is implemented. Model of FBC estimate for output in the form linear combination of input random variable (RV) with coefficients defined by deterministic vector coordinate functions. Scalar coordinate functions are approximated by wavelet expansions (WLE) on orthonormal wavelet basis with compact carrier. For estimation of unknown WLE coefficients special architecture of multilayer wavelet neural network (WNN) is developed. Training with teacher is realized by inverse error extension method. Accuracy formulae for mathematical expectation and covariance matrix of output FBC estimate are given. Advantages of CE of WNN algorithm are discussed.

Keywords: Bayesian criterion, wavelet, wavelet neural network, canonical expansion, modeling, optimal estimation, optimal synthesis, stochastic process, stochastic system, loss function, functional Bayesian criterion

Funding: The work was carried out using the infrastructure of the Center for Collective Use "High-Performance Computing and Big Data" (CCU "Informatics") of the Federal Research Center of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Method of Wavelet Neural Network Synthesis of Observable Multidimensional Nonstationary Linear Stochastic System. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2025;21(3):398-410. https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.398-410

Введение

Теория оптимальных по различным вероятностным критериям стохастических систем (СтС), в том числе включая нейросетевые подходы, продолжает развиваться и предоставляет методы, позволяющие найти теоретический оптимум при проектировании сложных систем в различных областях человеческой деятельности, включая робототехнику, финансы, экономику, биологию [1-9].

В работах[1] [10-12] авторы применяют теорию канонических разложений (КР) стохастических процессов (СтП) для решения задачи синтеза оптимальной по байесовскому критерию (БК) стохастической системы, описываемой уравнениями В.С. Пугачева для входного и выходного СтП. Рассматриваются СтС, изучение которых ведется на основе математической модели из-за трудности проведения натурных испытаний. Входной СтП задается в виде суммы полезного сигнала, зависящего от случайных параметров, и нормально распределенной случайной помехи. Выходной СтП содержит заданное преобразование полезного входного сигнала. КР СтП позволяет свести имитационное моделирование стохастического процесса, заданного на конечном промежутке времени, к моделированию совокупности случайных величин (СВ).

В [13, 14] построены КР СтП на основе ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями[2] (далее – ВЛКР). В [15, 16] для упрощения аналитических выкладок разработаны алгоритмы построения ВЛКР с применением вейвлет-нейронной сети (ВНС)[3] [17] (далее – КРВНС).

В [18-20] теория ВЛКР была применена для решения операторного уравнения, связывающего ковариационную функцию входного СтП и совместную ковариационную функцию входного и выходного СтП. Были построены оптимальные операторы в виде набора формальных правил, которые задаются после выписывания и решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В [21, 22] решение задачи синтеза БК оптимальной СтС базируется на нахождении условной плотности вероятности выходного СтП относительно входного СтП, наблюдаемого на заданной промежутке времени, методом ВЛКР. Были рассмотрены различные БК, в том числе функциональные.

В [23-25] КРВНС СтП и технология ВНС были применены для синтеза БК оптимальной СтС, что позволило решить задачу синтеза без нахождения условной плотности вероятности выходного СтП относительно входного СтП или без трудоемкого выписывания СЛАУ. В [26] дано решение задачи синтеза одномерной линейной нестационарной СтС, оптимальной по интегральному функциональному байесовскому критерию (ФБК), с применением КРВНС СтП и ВНС.

В настоящей работе дано развитие результатов, полученных в [26], на случай синтеза ФБК оптимальной многомерной линейной нестационарной СтС. В разделе 1 дана постановка задачи. Рассматривается многомерная нестационарная линейная СтС, описываемая уравнениями В. С. Пугачёва для входного и требуемого выходного стохастических процессов. В качестве критерия оптимальности рассматривается интегральный ФБК. В разделе 2 описан приближенный метод решения поставленной задачи, в основе которого лежат КРВНС СтП и нейросетевые технологии. Выделены основные этапы решения задачи. Описана технология генерации совокупности входных СВ, позволяющая смоделировать реализации входного СтП, заданного на конечном промежутке времени. КРВНС СтП строится на основе ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями. Построена модель ФБК оценки выходного СтП в виде линейной комбинации входных СВ с коэффициентами, заданными детерминированными векторными координатными функциями. Скалярные координатные функции представляются в виде вейвлет-разложений по выбранному базису вейвлетов с неизвестными коэффициентами. Задача нахождения ФБК оценки выходного СтП сведена к нахождению неизвестных коэффициентов в предложенной модели ФБК оценки. Получены формулы для математического ожидания, второго начального момента и ковариационной матрицей ошибки ФБК оценки выходного СтП. В разделе 3 приведен нейросетевой алгоритм нахождения неизвестных коэффициентов в модели ФБК оценки выходного СтП на основе многослойной ВНС. Разработана архитектура ВНС. Для обучения ВНС применяется метод обратного распространения ошибки. В разделе 4 приведен иллюстративный пример.

1. Постановка задачи

Пусть многомерные действительные СтП $Z(t)$ и $W(t)$ $\left(t\in\left[t_0,t_k\right]\right)$ заданы на вероятностных пространствах $\left(\mathcal{H}_Z,\mathcal{A}_Z,\mathcal{P}_Z\right)$ и $\left(\mathcal{H}_W,\mathcal{A}_W,\mathcal{P}_W\right)$ соответственно.

Здесь $\mathcal{H}_Z=\underbrace{\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]\times\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]\times\ldots\times\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]}_{N_Z}$,

$$\mathcal{H}_W=\underbrace{\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]\times\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]\times\ldots\times\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]}_{N_W},$$

---

[1] Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М. : Физматгиз, 1962. 884 с.; Синицын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применение. 2-е изд., перер. и доп. М. : Торус Пресс, 2023. 816 с. https://doi.org/10.30826/94588-308-6

[2] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.

[3] Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / Пер. с англ. 2-е изд. СПб.: Диалектика, 2020. 1104 с.; Терехов С. А. Вейвлеты и нейронные сети // Научная сессия МИФИ – 2001: III Всерос. научн.-техн. конф. «Нейроинформатика-2001»: Лекции по нейроинформатике. М. : МИФИ, 2001. С. 142-181.

$\mathcal{L}^2[t_0,t_k]$ – гильбертово пространство функций $f(t)$ $\left(t\in[t_0,t_k]\right)$ с нормой $\|f\|=\left[\int_{t_0}^{t_k}|f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}$, $\mathcal{A}_Z$ – σ-алгебра в H_Z, $\mathcal{A}_W$ – σ-алгебра в H_W,

$\mathcal{P}_Z\left(Z(t)=\left[z_1(t)\quad z_2(t)\quad\dots\quad z_{N_Z}(t)\right]^T\right)$ – вероятность события

$Z(t)=\left[z_1(t)\quad z_2(t)\quad\dots\quad z_{N_Z}(t)\right]^T$,

$z_h(t)\in\mathcal{L}^2[t_0,t_k], h=\overline{1,N_X}$,

$\mathcal{P}_W\left(W(t)=\left[w_1(t)\quad w_2(t)\quad\dots\quad w_{N_W}(t)\right]^T\right)$ – вероятность события

$W(t)=\left[w_1(t)\quad w_2(t)\quad\dots\quad w_{N_W}(t)\right]^T$,

$w_p(t)\in\mathcal{L}^2[t_0,t_k], p=\overline{1,N_W}$.

Рассмотрим СтС, описываемую уравнениями В. С. Пугачёва. На вход СтС поступает векторный СтП $Z(t)=\left[Z_1(t)\quad Z_2(t)\quad\dots\quad Z_{N_Z}(t)\right]^T$ $\left(t\in[t_0,t_k]\right)$ в виде суммы полезного сигнала $S(t)=\left[S_1(t)\quad S_2(t)\quad\dots\quad S_{N_Z}(t)\right]^T$ и нормально распределенной случайной помехи $X(t)=\left[X_1(t)\quad X_2(t)\quad\dots\quad X_{N_Z}(t)\right]^T$ с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей ковариационных функций $K^X(t_1,t_2)=M\left[X(t_1)X^T(t_2)\right]\left(t_1,t_2\in[t_0,t_k]\right)$.

Полезный сигнал $S(t)$ линейно зависит от вектора случайных параметров $U=\left[U_1\quad U_2\quad\dots\quad U_{N_U}\right]^T$ с заданной плотностью вероятности $f_U(u)$:

$S_h(t)=\sum_{r=1}^{N_U}U_r\xi_{hr}(t)\left(h=1,N_Z\right)$, где $\xi_{h1}(t),\dots,\xi_{hN_U}(t)$ – известные детерминированные структурные функции.

Вектор U не зависит от случайной помехи $X(t)$, имеет конечные первые и вторые моменты: $m_r^U=M[U_r]\left(r=\overline{1,N_U}\right)$, $\Gamma_{r_1r_2}^U=M\left[U_{r_1}U_{r_2}\right]$, $K_{r_1r_2}^U=M\left[\left(U_{r_1}-m_{r_1}^U\right)\left(U_{r_2}-m_{r_2}^U\right)\right]\left(r_1,r_2=\overline{1,N_U}\right)$.

Входной СтП $Z(t)$ и требуемый выходной СтП системы $W(t)=\left[W_1(t)\quad W_2(t)\quad\dots\quad W_{N_W}(t)\right]^T$ заданы уравнениями:

$$Z_h(t)=\sum_{r=1}^{N_U}U_r\xi_{hr}(t)+X_h(t)\left(h=1,N_Z\right), \quad (1)$$

$$W_p(t)=\sum_{r=1}^{N_U}\zeta_{pr}(t)U_r\left(p=\overline{1,N_W}\right), \quad (2)$$

где $\zeta_{pr}(t)$ – также известные детерминированные структурные функции.

Требуется найти оптимальную СтС, выходной СтП которой $W^*(t)=\left[W_1^*(t)\quad W_2^*(t)\quad\dots\quad W_{N_W}^*(t)\right]^T$ обеспечивал бы минимум математического ожидания заданной функции потерь $l\left(W,W^*\right)$:

$$M\left[l\left(W,W^*\right)\right]=\min. \quad (3)$$

Рассматривается случай, когда функция потерь представляет собой интегральный функционал

$$l\left(W,W^*\right)=\int_{t_0}^{t_k}\sigma(t,\Delta)dt, \quad (4)$$

где $\sigma(t,\Delta)$ – функция переменной t и ошибки $\Delta=\Delta(t)=W(t)-W^*(t)$. Величину $M\left[l\left(W,W^*\right)\right]$ называют средним риском. Критерий минимума среднего риска, соответствующий функции потерь вида (4), зависящей от случайных параметров, обычно называют функциональным байесовским критерием, а СтП $W^*(t)$ – ФБК оценкой требуемого СтП $W(t)$.

Будем считать, что многомерный действительный СтП $W^*(t)$ $\left(t\in[t_0,t_k]\right)$ задан на вероятностном пространстве $\left(H_W,\mathcal{A}_W,\mathcal{P}_W\right)$.

2. Метод приближенного моделирования ФБК оценки выходного СтП

Обобщая опыт решения аналогичных задач, описанных в [23-26], для определения ФБК оценки $W^*(t)$ применим метод КРВНС СтП и нейросетевые технологии. Для этого выделим несколько этапов решения поставленной задачи:

– генерация набора обучающих примеров на основе метода КРВНС СтП;
– выбор модели ФБК оценки $W^*(t)$ требуемого СтП $W(t)$;
– построение архитектуры ВНС для определения неизвестных коэффициентов ФБК оценки $W^*(t)$;
– обучение ВНС на основе набора обучающих примеров.

Для генерации набора обучающих примеров вначале построим КРВНС векторного СтП $X(t)$ в виде

$$X^L(t)=\sum_{\nu=1}^{L}V_\nu^X\kappa_\nu^L(t), \quad (5)$$

$$X_h^L(t)=\sum_{\nu=1}^{L}V_\nu^X\kappa_{\nu h}^L(t)\left(h=\overline{1,N_Z}\right), \quad (6)$$

где V_ν^X – некоррелированные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, $\kappa_\nu^L(t)=\left[\kappa_{\nu1}^L(t) \quad \kappa_{\nu2}^L(t) \quad \dots \quad \kappa_{\nu N_Z}^L(t)\right]^T$ – векторные координатные функции. В пространстве $\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]$ зададим ортонормированный базис вейвлетов с компактными носителями $\left\{g_\nu(t)\right\}$ с максимальным уровнем разрешения J, который определяет конечное число базисных вейвлетов[4] $L=2^{J+1}$ для $\nu=\overline{1,L}$. Согласно [16], скалярные координатные функции представим в виде линейных комбинаций базисных вейвлет-функций

$$\kappa_{\nu h}^L(t)=\sum_{\mu=1}^{L}c_\mu^{\nu h}g_\mu(t)\left(h=\overline{1,N_Z}\right), \tag{7}$$

или

$$\kappa_{\nu h}^L(t)=\left(c^{\nu h}\right)^T g^L(t), h=\overline{1,N_Z}, \tag{8}$$

где $c^{\nu h}(t)=\left[c_1^{\nu h}(t) \quad c_2^{\nu h}(t) \quad \dots \quad c_L^{\nu h}(t)\right]^T$, $g^L(t)=\left[g_1(t) \quad g_2(t) \quad \dots \quad g_L(t)\right]^T$. Параметры $c_\mu^{\nu h}\left(\nu,\mu=\overline{1,L};h=\overline{1,N_Z}\right)$ определяются при построении КРВНС СтП $X(t)$.

Из условия $\xi_{hr}(t)\in\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]$ $\left(h=\overline{1,N_Z};r=\overline{1,N_U}\right)$ следует, что скалярные функции $\xi_{hr}(t)$ можно аппроксимировать конечными суммами (бесконечных в пространстве $\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]$) вейвлет-рядов $\xi_{hr}^L(t)=\sum_{\nu=1}^{L}\gamma_\nu^{hr}g_\nu(t)$ с коэффициентами $\gamma_\nu^{hr}=\int_{t_0}^{t_k}\xi_{hr}(t)g_\nu(t)dt$. Согласно [10, 11], входному СтП $Z(t)$ ставится во взаимно однозначное соответствие совокупность СВ V_ν^Z $\left(\nu=\overline{1,L}\right)$:

$$V_\nu^Z=\sum_{r=1}^{N_U}\beta_{\nu r}^U U_r+V_\nu^X \ \left(\nu=1,2,\dots,L\right), \tag{9}$$

$$\beta_{\nu r}^U=\sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\theta=1}^{L}\frac{\gamma_\theta^{hr}}{LN_Z c_\theta^{\nu h}}. \tag{10}$$

Итак, для применения нейросетевых технологий необходимо смоделировать обучающую выборку в виде N_N совокупностей значений $\left\{v_\nu^{Zi}\right\}_{i=1}^{N_N}$ СВ V_ν^Z $\left(\nu=\overline{1,L}\right)$ и соответствующих значений $\left\{w^i(t)\right\}_{i=1}^{N_N}$ требуемого выходного СтП $W(t)$.

[4] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.

В качестве модели ФБК оценки $W^*(t)$ выходного СтП $W(t)$ рассмотрим линейную композицию СВ V_ν^Z $\left(\nu=\overline{1,L}\right)$ с коэффициентами в виде векторных детерминированных координатных функций $\chi_\nu^L(t)=\left[\chi_{\nu1}^L(t) \quad \chi_{\nu2}^L(t) \quad \dots \quad \chi_{LN_W}^L(t)\right]^T$:

$$W^L(t)=\sum_{\nu=1}^{L}V_\nu^Z\chi_\nu^L(t),$$

$$W^L(t)=\left[W_1^L(t) \quad W_2^L(t) \quad \dots \quad W_{N_W}^L(t)\right]^T,$$

$$W_p^L(t)=\sum_{\nu=1}^{L}V_\nu^Z\chi_{\nu p}(t)\ \left(p=\overline{1,N_W}\right). \tag{11}$$

Пусть $\chi_{\nu p}^L(t)\in\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]$ $\left(p=\overline{1,N_W};\nu=\overline{1,L}\right)$, тогда их можно аппроксимировать конечными суммами (бесконечных в пространстве $\mathcal{L}^2\left[t_0,t_k\right]$) вейвлет-рядов

$$\chi_{\nu p}^L(t)=\sum_{\mu=1}^{L}\lambda_\mu^{\nu p}g_\mu(t). \tag{12}$$

Если для $\nu=\overline{1,L}$ ввести матрицы неизвестных коэффициентов

$$\Lambda_\nu=\begin{bmatrix}\lambda_1^{\nu1} & \lambda_2^{\nu1} & \dots & \lambda_L^{\nu1}\\ \lambda_1^{\nu2} & \lambda_2^{\nu2} & \dots & \lambda_L^{\nu2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{\nu N_W} & \lambda_2^{\nu N_W} & \dots & \lambda_L^{\nu N_W}\end{bmatrix}, \tag{13}$$

тогда

$$\chi_\nu^L(t)=\Lambda_\nu g^L(t), \tag{14}$$

а ФБК оценка примет вид

$$W^L(t)=\sum_{\nu=1}^{L}V_\nu^Z\chi_\nu^L(t). \tag{15}$$

В ответ на каждую i-ую реализацию входного СтП в виде совокупности значений СВ $v_\nu^{Zi}\left(\nu=\overline{1,L}\right)$, ВНС будет выдавать значение оценки векторного выходного СтП $w^{Li}(t_j)=\left[w_1^{Li}(t_j) \quad w_2^{Li}(t_j) \quad \dots \quad w_{N_W}^{Li}(t_j)\right]$:

$$w^{Li}(t)=\sum_{\nu=1}^{L}v_\nu^{Zi}\chi_\nu^L(t). \tag{16}$$

Для сгенерированного набора обучающих примеров оценка среднего риска (3) вычисляется по формуле:

$$E(\Lambda)=\frac{1}{N_N}\sum_{i=1}^{N_N}\int_{t_0}^{t_k}\sigma\left(t,w^i(t)-w^{Li}(t)\right)dt. \tag{17}$$

В терминах теории ВНС функция $E(\Lambda)$ называется функцией стоимости и вычисляется для всего набора обучающих примеров. Рассмотрим дискретную аппроксимацию функции стоимости

$$E^L(\Lambda)=\frac{1}{N_N}\sum_{i=1}^{N_N}\sum_{j=1}^{L}\sigma\left(t_j,w^i(t_j)-w^{Li}(t_j)\right)\delta t, \tag{18}$$

где $t_j = t_0 + j \cdot \dfrac{\delta t}{2}$, $\delta t = \dfrac{t_k - t_0}{L}$, $j = \overline{1, L}$. В результате задача построения ФБК оценки $W^*(t)$ сведена к нахождению оптимальных значений коэффициентов $\lambda_\mu^{\nu p*}$ $\left(p = \overline{1, N_W}; \nu, \mu = \overline{1, L} \right)$, составляющих матриц $\Lambda_\nu \left(\nu = \overline{1, L} \right)$, при которых функция стоимости (18) принимает минимальное значение.

Точность ФБК оценки $W^{L*}(t)$ выходного СтП $W(t)$ оценивается математическим ожиданием, вторым начальным моментом и ковариационной матрицей ошибки $\Delta(t) = W(t) - W^{L*}(t)$,

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t) & \Delta_2(t) & \dots & \Delta_{N_W}(t) \end{bmatrix}^T,$$

где

$$\Delta_p(t) = W_p(t) - W_p^{L*}(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \left(\zeta_{pr}(t) - \sum_{\nu=1}^{L} \beta_{\nu r}^U \chi_{\nu p}^{L*}(t) \right) - \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^X \chi_{\nu p}^{L*}(t) \left(p = 1, N_W \right);$$

$$\chi_{\nu p}^{L*}(t) = \sum_{\mu=1}^{L} \lambda_\mu^{\nu p*} g_\mu(t) \left(p = \overline{1, N_W}; \nu = \overline{1, L} \right).$$

Пусть $\varepsilon_{pr}^{\zeta}(t, L) = \zeta_{pr}(t) - \sum_{\nu=1}^{L} \beta_{\nu r}^U \chi_{\nu p}^{L*}(t)$ $\left(p = \overline{1, N_W}; r = \overline{1, N_U} \right)$, тогда

$$\Delta_p(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \varepsilon_{pr}^{\zeta}(t, L) - \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^X \chi_{\nu p}^{L*}(t) \left(p = 1, N_W \right).$$

Компоненты математического ожидания ошибки $M\left[\Delta(t) \right] = m^\Delta(t) = \begin{bmatrix} m_1^\Delta(t) & m_2^\Delta(t) & \dots & m_{N_W}^\Delta(t) \end{bmatrix}^T$ вычисляются по формулам

$$m_p^\Delta(t) = \sum_{r=1}^{N_U} m_r^U \varepsilon_{pr}^{\zeta}(t, L) \left(p = 1, N_W \right), \tag{19}$$

компоненты второго начального момента ошибки $\Gamma^\Delta(t) = M\left[\Delta(t) \Delta^T(t) \right] = \left\| \Gamma_{pq}^\Delta(t) \right\|_{p,q=1}^{N_W}$ по формулам

$$\Gamma_{pq}^\Delta(t) = \sum_{r_1=1}^{N_U} \sum_{r_2=1}^{N_U} \Gamma_{r_1 r_2}^U \varepsilon_{pr_1}^{\zeta}(t, L) \varepsilon_{qr_2}^{\zeta}(t, L) + \sum_{\nu=1}^{L} \chi_{\nu p}^{L*}(t) \chi_{\nu q}^{L*}(t) \left(p, q = 1, N_W \right), \tag{20}$$

компоненты ковариационной матрицы ошибки $K^\Delta(t) = M\left[\left(\Delta(t) - m_\Delta(t) \right) \left(\Delta(t) - m_\Delta(t) \right)^T \right] = \left\| K_{pq}^\Delta(t) \right\|_{p,q=1}^{N_W}$ по формулам

$$K_{pq}^\Delta(t) = \sum_{r_1=1}^{N_U} \sum_{r_2=1}^{N_U} K_{r_1 r_2}^U \varepsilon_{pr_1}^{\zeta}(t, L) \varepsilon_{qr_2}^{\zeta}(t, L) + \sum_{\nu=1}^{L} \chi_{\nu p}^{L*}(t) \chi_{\nu q}^{L*}(t) \left(p, q = 1, N_W \right). \tag{21}$$

3. Нейросетевой алгоритм

Обобщая опыт построения нейросетевых алгоритмов для синтеза оптимальных одномерных и многомерных СтС [23-26], для решения поставленной задачи построим многослойную ВНС (рис. 1):

– входной сигнал: $\left\{ v_1^{Zi} \quad v_2^{Zi} \quad \dots \quad v_L^{Zi} \right\}_{i=1}^{N_N}$; $\left\{ t_j \right\}_{j=1}^{L}$;
– первый скрытый слой задаёт пространство признаков в виде значений вектора базисных вейвлет-функций $g^L(t_j)$ $\left(j = \overline{1, L} \right)$;
– второй скрытый слой вычисляет значения координатных функций $\chi_\nu^L(t_j)$ $\left(\nu, j = \overline{1, L} \right)$;
– выходной слой вычисляет значения ФБК оценки $w^{Li}(t_j)$ $\left(i = 1, N_N; j = \overline{1, L} \right)$.

ВНС содержит четыре слоя, в том числе два скрытых. Обучаемыми параметрами являются матрицы синаптических весов $\Lambda_\nu = \left\| \lambda_\mu^{\nu p} \right\|_{p,\mu}^{N_W, L}$. Применим пакетный режим обучения, который проводится после подачи в сеть всех N_N наборов обучения, что отражено в структуре сети. Для обучения ВНС с учителем применим метод обратного распространения ошибки[5]. Начиная с исходного значения $\lambda_\mu^{\nu p}(0) = \lambda_{\mu 0}^{\nu p}$, генерируется последовательность весовых коэффициентов $\lambda_\mu^{\nu p}(1), \lambda_\mu^{\nu p}(2), \dots$, таких что при переходе от *n*-й итерации алгоритма к $(n+1)$-й выполняется условие $E(n+1) \le E(n)$, а значения весовых коэффициентов стабилизируются около оптимальных значений $\lambda_\mu^{\nu p*}$.

Корректировка весов осуществляется по формуле

$$\lambda_\mu^{\nu p}(n+1) = \lambda_\mu^{\nu p}(n) - \eta q_\mu^{\nu p}(n), \tag{22}$$

где

$$q_\mu^{\nu p}(n) = q_\mu^{\nu p} = \frac{\partial E(\Lambda)}{\partial \lambda_\mu^{\nu p}} = \frac{\delta t}{N_N} \sum_{i=1}^{N_N} v_\nu^{Zi} \sum_{j=1}^{L} \frac{\partial \sigma\left(t_j, w^i(t_j) - w^{Li}(t_j) \right)}{\partial w_p^{Li}} g_\mu(t_j),$$

$\eta = const$ – параметр скорости обучения, $0 < \eta < 1$.

ФБК оценка определяется выражением:

$$W^{*L}(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^Z \Lambda_\nu^* g^L(t), \; \Lambda_\nu^* = \left\| \lambda_\mu^{\nu p*} \right\|_{p,\mu}^{N_Z, L} \left(\nu = \overline{1, L} \right). \tag{23}$$

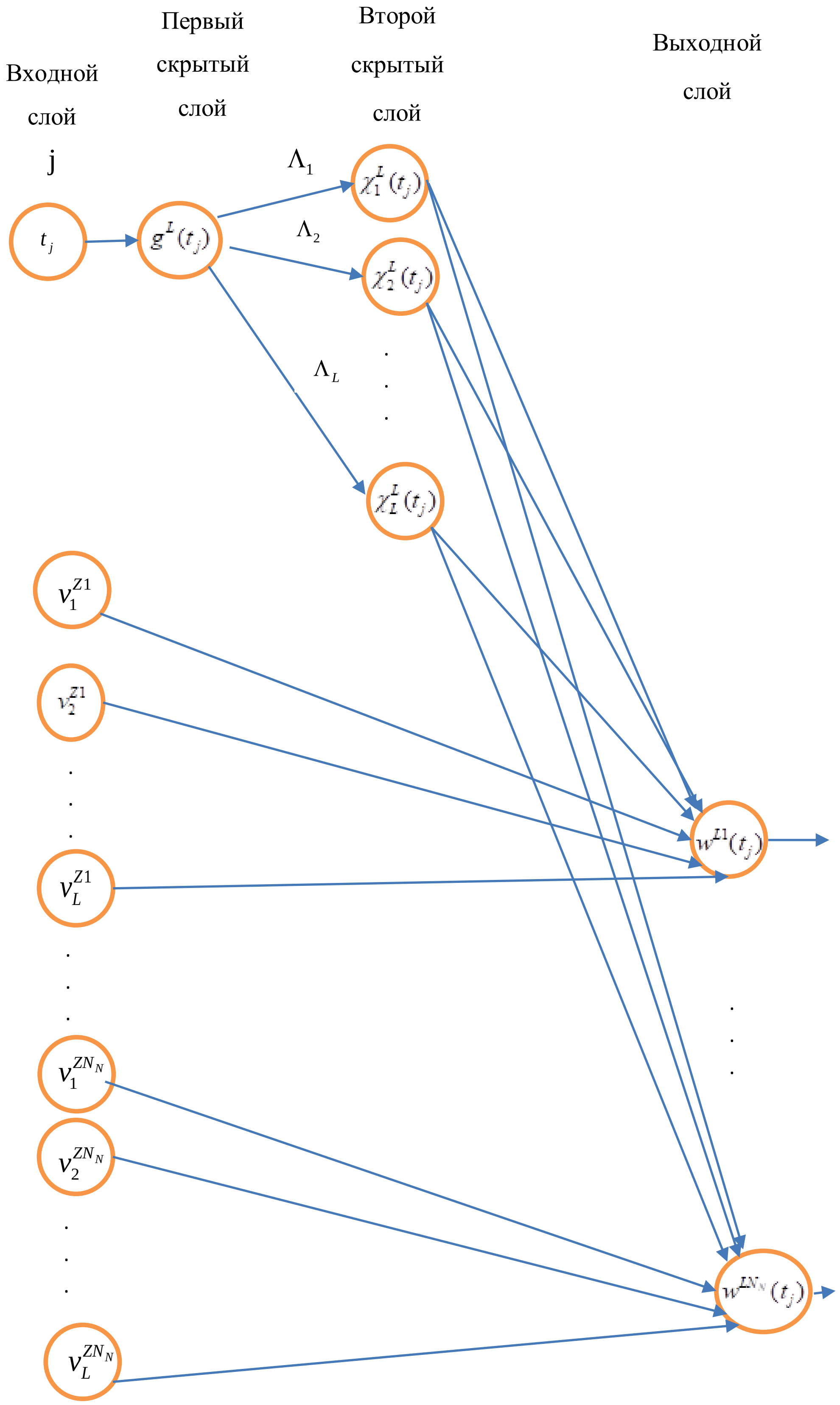
В результате получен алгоритм синтеза ФБК оценки $W^{L*}(t)$ выходного СтП (2) по результатам наблюдения входного СтП (1) на промежутке времени $\left[t_0, t_k \right]$.

Алгоритм. Синтез ФБК оценки выходного СтП.

1. Генерация набора обучающих примеров: $\left\{ v_1^{Zi} \quad v_2^{Zi} \quad \dots \quad v_L^{Zi} \right\}_{i=1}^{N_N}$, $\left\{ t_j \right\}_{j=1}^{L}$, $\left\{ w^i(t_j) \right\}_{i=1}^{N_N}$.
2. Задание параметра скорости обучения $0 < \eta < 1$, параметра $0 < \delta^E < 1$.
3. Инициализация весов. При $n = 0$ $\lambda_\mu^{\nu p}(0) = \lambda_{\mu 0}^{\nu p}$.
4. Вычисление функций первого скрытого слоя ВНС: $g_\nu(t_j)$ $\left(\nu, j = \overline{1, L} \right)$.
5. Вычисление функций второго скрытого слоя ВНС:

$$\chi_{\nu pj}^L(n) = \chi_{\nu p}^L(t_j) = \sum_{\mu=1}^{L} \lambda_\mu^{\nu p}(n) g_\mu(t_j) \left(p = \overline{1, N_W}; \nu = \overline{1, L} \right).$$

[5] Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / Пер. с англ. 2-е изд. СПб. : Диалектика, 2020. 1104 с.



Р и с. 1. Архитектура ВНС
F i g. 1. Architecture of a wavelet neural network

Источник: здесь и далее в статье все рисунки составлены авторами.
Source: Hereinafter in this article all figures were drawn up by the authors.

6. Вычисление фактического отклика ВНС: $w_p^{Li}(t_j,n)=\sum_{\nu=1}^{L} v_\nu^{Zi}\chi_{\nu pj}^{L}(n)$ $\left(i=\overline{1,N_N};\, p=\overline{1,N_W};\nu, j=\overline{1,L}\right)$.

7. Вычисление значения функции стоимости по формуле (18). Начиная со третьего шага, проверка условия окончания адаптации весов: $\left|E\left(\lambda(n+1)\right)-E\left(\lambda(n)\right)\right|\le\delta^E$. Если условие выполняется, выход из алгоритма, в противном случае переход к п. 5.

8. Адаптация весов. Изменение весов по формуле (22).

9. Увеличиваем номер итерации *n* на 1 и возвращаемся к п. 5.

4. Пример

Найти оптимальную систему с выходным СтП $W^*(t)=\left[W_1^*(t)\quad W_2^*(t)\right]^T$ для воспроизведения двумерного поляризованного сигнала $W(t)=\left[W_1(t)\quad W_2(t)\right]^T$:

$$W_1(t)=\beta\left(U_1+tU_2+t^2U_3\right), W_2(t)=\rho\left(U_1+tU_2+t^2U_3\right), \quad (24)$$

по результатам наблюдения в течение интервала времени $\left[t_0,t_0+T\right]$ входного сигнала $Z(t)=\left[Z_1(t)\quad Z_2(t)\right]^T$:

$$Z_1(t)=\beta\left(U_1+tU_2+t^2U_3+X(t)\right), \; Z_2(t)=\rho\left(U_1+tU_2+t^2U_3+X(t)\right), \quad (25)$$

по критерию минимума квадрата ошибки, усредненного по заданному интервалу времени наблюдения,

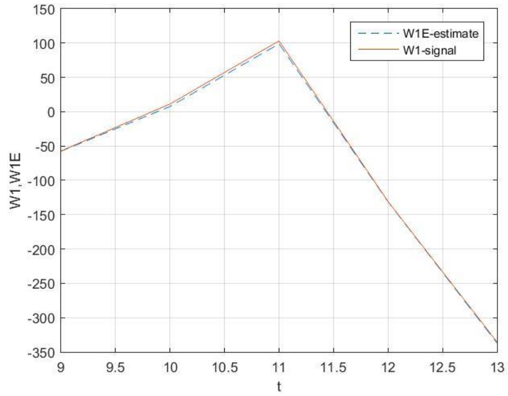
$$M\left[\int_{t_0}^{t_0+T}\left(W-W^*\right)^T\left(W-W^*\right)dt\right]=\min.$$

Случайная помеха $X(t)$ распределена нормально, имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию $K_X\left(t_1,t_2\right)=D_X\exp\left\{-\alpha_X\left|t_2-t_1\right|\right\}$. Векторный случайный параметр $U=\left[U_1\quad U_2\quad U_3\right]^T$ не зависит от случайной помехи $X(t)$ и задан нормальным распределением с математическим ожиданием $m_u=\left[0\quad 0\quad 0\right]^T$ и ковариационной матрицей $K_u=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. Исходные данные:

$$D_X=1,\alpha_X=1,\, t_0\in\left[0;4\right],T=9,\beta=1,\rho=2.$$

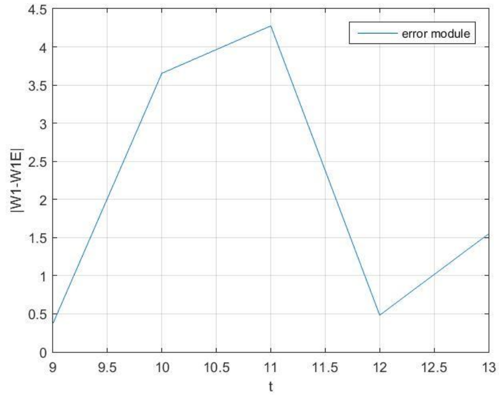
Для моделирования ФБК оценки $W^*(t)$ выходного СтП $W(t)$ применили ортонормированный базис Хаара с максимальным уровнем вейвлет-разрешения $J=4$ и числом базисных функций $L=32$. Число обучающих примеров $N_N=L$. Для проведения вычислительных экспериментов разработано инструментальное программное обеспечение в среде MATLAB «ФБК-Синтез-ВНС.2». Алгоритм обучения использовался в процессе функционирования ВНС. Вычислительные эксперименты показали, что оптимальное значение параметра скорости обучения $\eta=0,0001$. Начиная с $n=280$, выполняется условие $\left|E\left(\lambda(n+1)\right)-E\left(\lambda(n)\right)\right|\le\delta^E$ для $\delta^E=0,001$.

На рис. 2-7 приведены результаты вычислительных экспериментов при $n=300$. На рис. 2 изображены графики сигнала $W_1(t)$ и его ФБК оценки $W_1^*(t)$. Значения сигнала $W_1(t)$ изменяются от -340 до +100. На рис. 3 по графику модуля ошибки $\left|\Delta_1(t)\right|=\left|W_1(t)-W_1^*(t)\right|$ видно, что модуль ошибки $\left|\Delta_1(t)\right|$ не превосходит 4,3. Точность ФБК оценки $W_1^*(t)$ характеризуется математическим ожиданием ошибки $m_1^\Delta(t)$, которое в данном примере равно 0, и дисперсией ошибки $K_{11}^\Delta(t)$, график которой изображен на рис. 4. На графике дисперсия ошибки $K_{11}^\Delta(t)$ обозначена как D1E. По графику видно, что на промежутке времени $[9,13]$ значения $K_{11}^\Delta(t)$ увеличиваются от 1,95 до 5,2. На рис. 5 изображены графики сигнала $W_2(t)$ и его ФБК оценки $W_2^*(t)$. Значения сигнала $W_2(t)$ изменяются от -680 до +200. На рис. 6 по графику модуля ошибки $\left|\Delta_2(t)\right|=\left|W_2(t)-W_2^*(t)\right|$ видно, что модуль ошибки $\left|\Delta_2(t)\right|$ не превосходит 8,5. Математическое ожидание ошибки $m_2^\Delta(t)$ равно 0. График дисперсии ошибки $K_{22}^\Delta(t)$ изображен на рис. 4. На графике дисперсия ошибки $K_{22}^\Delta(t)$ обозначена как D2E. По графику видно, что на промежутке времени $\left[9,13\right]$ значения $K_{22}^\Delta(t)$ увеличиваются от 7,9 до 20,7.



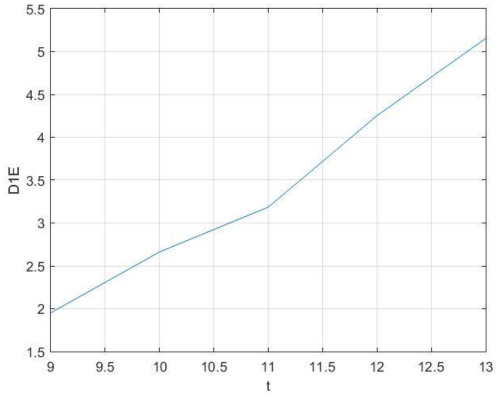
Р и с. 2. Графики сигнала $W_1(t)$ и его оценки $W_1(t)$

F i g. 2. Graphs of the signal $W_1(t)$ and its estimates $W_1(t)$



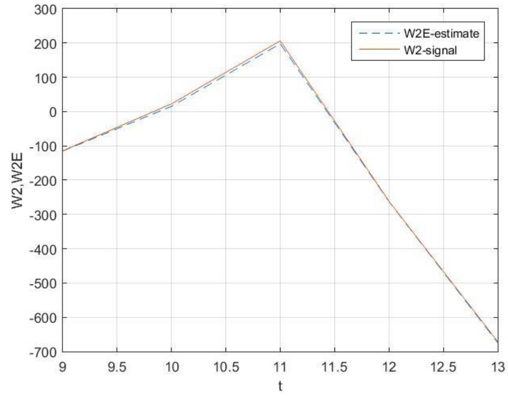
Р и с. 3. График модуля ошибки $\left|\Delta_1(t)\right| = \left|W_1(t) - W_1^*(t)\right|$

F i g. 3. Error module graph $\left|\Delta_1(t)\right| = \left|W_1(t) - W_1^*(t)\right|$



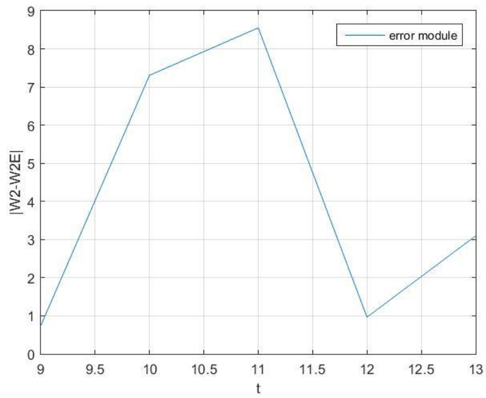
Р и с. 4. График дисперсии ошибки $K_{11}^{\Delta}(t)$

F i g. 4. Graph of error variance $K_{11}^{\Delta}(t)$



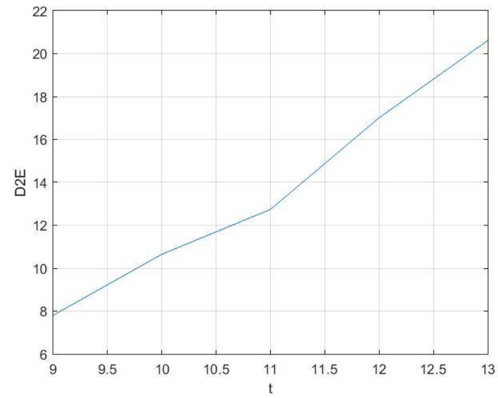
Р и с. 5. Графики сигнала $W_2(t)$ и его оценки $W_2^*(t)$

F i g. 5. Graphs of the signal $W_2(t)$ and its estimates $W_2^*(t)$



Р и с. 6. График модуля ошибки $\left|\Delta_2(t)\right| = \left|W_2(t) - W_2^*(t)\right|$

F i g. 6. Error module graph $\left|\Delta_2(t)\right| = \left|W_2(t) - W_2^*(t)\right|$



Р и с. 7. График дисперсии ошибки $K_{22}^{\Delta}(t)$

F i g. 7. Graph of error variance $K_{22}^{\Delta}(t)$

Как показали вычислительные эксперименты, результаты которых приведены на рис. 2-7, предлагаемый метод позволяет смоделировать ФБК оценку требуемого векторного выходного СтП (24) по результатам наблюдения векторного входного СтП (25) с высокой точностью. Абсолютная погрешность моделирования ФБК оценки $W_1^*(t)$ не превосходит 4,3, а относительная погрешность – 4,3 %. Абсолютная погрешность моделирования ФБК оценки $W_2^*(t)$ не превосходит 8,5, а относительная погрешность – 4,25 %.

Заключение

В работе описан метод приближенного моделирования оптимальной по интегральному функциональному байесовскому критерию оценки требуемого выходного стохастического процесса многомерной нестационарной линейной стохастической системы, описываемой линейными уравнениями В. С. Пугачёва для входного и выходного стохастических процессов. В основе метода лежит метод канонического разложения СтП и нейросетевые технологии. Для решения поставленной задачи разработан алгоритм, выделены и описаны следующие этапы:

– генерация набора обучающих примеров на основе метода КРВНС СтП; моделирование входного СтП в виде совокупности входных СВ;
– построение модели ФБК оценки требуемого СтП в виде линейной комбинации входных СВ с коэффициентами, заданными детерминированными координатными функциями; координатные функции представлены в виде вейвлет-разложений по заданному ортонормированному базису вейвлетов с неизвестными коэффициентами;
– построение архитектуры многослойной вейвлет-нейронной сети для определения неизвестных коэффициентов в модели ФБК оценки требуемого СтП;
– обучение ВНС с учителем на основе набора обучающих примеров методом обратного распространения ошибки.

Предлагаемый метод позволяет построить оценку выходного СтП без нахождения условной плотности вероятности выходного СтП относительно наблюдаемого входного СтП. Получены формулы для математического ожидания, второго начального момента и ковариационной матрицы ошибки ФБК оценки выходного СтП. На примере проиллюстрирована высокая точность предлагаемого метода.

Представляет практический интерес разработка вейвлет-нейросетевого метода синтеза оптимальных по интегральному ФБК нелинейных СтС В.С. Пугачева.

Список использованных источников

1. Li S., Huang H., Lu W. A Neural Networks Based Method for Multivariate Time-Series Forecasting // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 63915-63924. https://doi.org/10.1109/access.2021.3075063
2. Zhu B., Karimi H. R., Zhang L., Zhao X. Neural network-based adaptive reinforcement learning for optimized backstepping tracking control of nonlinear systems with input delay // Applied Intelligence. 2025. Vol. 55. Article number: 129. https://doi.org/10.1007/s10489-024-05932-x
3. Musavi N., Sun D., Mitra S., Dullerud G. E., Shakkottai S. Verification and Parameter Synthesis in Stochastic Systems with Hybrid State Space Using Optimistic Optimization // IEEE Open Journal of Control Systems. 2023. Vol. 2. P. 263-276. https://doi.org/10.1109/ojcsys.2023.3299152
4. Chen Z., Ma W. A Bayesian approach to data-driven multi-stage stochastic optimization // Journal of Global Optimization. 2024. Vol. 90. P. 401-428. https://doi.org/10.1007/s10898-024-01410-3
5. Diveev A., Konstantinov S. Applying Neural Networks for the Identification of Control Object Mathematical Models for the Control Problems // 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). Istanbul, Turkey: IEEE Press, 2022. P. 1059-1063. https://doi.org/10.1109/CoDIT55151.2022.9803986
6. Чернышев Л. С. Идентификация нейросетевой модели технической системы или процесса с целью синтеза оптимального управления // Технологии электромагнитной совместимости. 2023. № 2(85). С. 74-78. EDN: UVOUMK
7. Доценко А. В. Автоматический синтез непрерывной динамической системы стабилизации на основе искусственных нейронных сетей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия приборостроение. 2020. № 3(132). С. 66-83. https://doi.org/10.18698/0236-3933-2020-3-66-83
8. Бирюков И. Д. Совместный квазиоптимальный алгоритм обработки радиосигналов источников радиоизлучения авиационным средством радиотехнического наблюдения // Вестник РАЕН. 2024. Т. 24, № 3. С. 48-58. https://doi.org/10.52531/1682-1696-2024-24-3-48-58
9. Ясинский С. А., Григорчук А. Н., Сукачёв В. Н., Добровольский С. Л. Применение байесовского принципа и метода максимального правдоподобия для обнаружения и различения сигналов // Труды ЦНИИС. Санкт-Петербургский филиал. 2022. Т. 1, № 13. С. 106-112. EDN: CGPLYM
10. Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. Stochastic Systems: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 2002. 928 p. https://doi.org/10.1142/4805
11. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Структурная теория сложных стохастических систем // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, № 2. С. 4-16. EDN: NXKRQZ
12. Sinitsyn I. N. Developing the theory of stochastic canonic expansions // Pattern Recognition and Image Analysis. 2023. Vol. 33, issue 4. P. 862-887. https://doi.org/10.1134/S1054661823040429
13. Синицын И. Н., Сергеев И. В., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV) // Системы высокой доступности. 2017. Т. 13, № 3. С. 55-59. EDN: ZSQHLR
14. Синицын И. Н., Сергеев И. В., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V) // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 1. С. 59-70. EDN: YVXNBW

15. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Моделирование нестационарного стохастического процесса посредством его канонического разложения на основе вейвлет-нейронной сети // Системы и средства информатики. 2024. Т. 34, № 2. С. 21-39. https://doi.org/10.14357/08696527240202
16. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Алгоритм моделирования векторного стохастического процесса посредством его канонического разложения на основе многослойной вейвлет-нейронной сети // Системы и средства информатики. 2025. Т. 35, № 2. С. 17-30. https://doi.org/10.14357/08696527250202
17. Veitch D. Wavelet Neural Networks and their application in the study of dynamical system // Networks. 2005. Vol. 1, No. 8. P. 313-320.
18. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 138-156. https://doi.org/10.31857/S0005231020110082
19. Sinitsyn I., Sinitsyn V., Korepanov E., Konashenkova T. Bayes Synthesis of Linear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions // Mathematics. 2022. Vol. 10, issue 9. Article number: 1517. https://doi.org/10.3390/math10091517
20. Sinitsyn I., Sinitsyn V., Korepanov E., Konashenkova T. Synthesis of Nonlinear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions // Mathematics. 2023. Vol. 11, issue 9. Article number: 2059. https://doi.org/10.3390/math11092059
21. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Синтез оптимальных по функциональным Бейесовым критериям стохастических систем методом вейвлет канонических разложений // Системы высокой доступности. 2023. Т. 19, № 4. С. 37-50. https://doi.org/10.18127/j20729472-202304-03
22. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Бейесов синтез многомерной стохастической системы высокой доступности методом вейвлет канонических разложений // Системы высокой доступности. 2024. Т. 20, № 1. С. 55-66. https://doi.org/10.18127/j20729472-202401-06
23. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Нейросетевой синтез оптимальной линейной стохастической системы по критерию минимума среднеквадратичной ошибки // Системы и средства информатики. 2024. Т. 34, № 3. С. 87-108. https://doi.org/10.14357/08696527240307
24. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Развитие методов оптимизации информационных систем на основе вейвлет-канонических разложений и технологий вейвлет-нейронной сети // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 1. С. 46-55. https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.46-55
25. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Вейвлет-нейросетевой алгоритм синтеза многомерной линейной нестационарной стохастической системы высокой доступности по критерию минимума средней квадратичной ошибки // Системы высокой доступности. 2025. Т. 21, № 2. С. 35-45. https://doi.org/ 10.18127/j20729472-202502-03
26. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Вейвлет-нейросетевой синтез одномерной линейной нестационарной стохастической системы высокой доступности по интегральному функциональному байесовскому критерию // Системы высокой доступности. 2025. Т. 21, № 2. С. 46-55. https://doi.org/ 10.18127/j20729472-202502-04

References

1. Li S., Huang H., Lu W. A Neural Networks Based Method for Multivariate Time-Series Forecasting. *IEEE Access*. 2021;9:63915-63924. https://doi.org/10.1109/access.2021.3075063
2. Zhu B., Karimi H.R., Zhang L., Zhao X. Neural network-based adaptive reinforcement learning for optimized backstepping tracking control of nonlinear systems with input delay. *Applied Intelligence*. 2025;55(129). https://doi.org/10.1007/s10489-024-05932-x
3. Musavi N., Sun D., Mitra S., Dullerud G.E., Shakkottai S. Verification and Parameter Synthesis in Stochastic Systems with Hybrid State Space Using Optimistic Optimization. *IEEE Open Journal of Control Systems*. 2023;2:263-276. https://doi.org/10.1109/ojcsys.2023.3299152
4. Chen Z., Ma W. A Bayesian approach to data-driven multi-stage stochastic optimization. *Journal of Global Optimization*. 2024;90:401-428. https://doi.org/10.1007/s10898-024-01410-3
5. Diveev A., Konstantinov S. Applying Neural Networks for the Identification of Control Object Mathematical Models for the Control Problems. In: 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). Istanbul, Turkey: IEEE Press; 2022. p. 1059-1063. https://doi.org/10.1109/CoDIT55151.2022.9803986
6. Chernyshev L.S. Identification of a neural network model of a technical system or process in order to synthesize optimal control. *Tekhnologii elektromagnitnoy sovmestimosti* = Technologies of electromagnetic compatibility. 2023;2(85):74-78. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: UVOUMK
7. Dotsenko A.V. Automatic synthesis of a continuous dynamic stabilization system based on artificial neural networks. *Vestnik moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya priborostroenie* = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering. 2020;3(132):66-83. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.18698/0236-3933-2020-3-66-83

8. Biryukov I.D. Joint quasi-optimal algorithm for processing radio signals of radio emission sources by aviation radio surveillance facilities. *Vestnik RAEN* = Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. 2024;24(3):48-58. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.52531/1682-1696-2024-24-3-48-58
9. Yasinskii S.A., Grigorchuk A.N., Sykashew V.N., Dobrovolsky S.L. Application of the Bayesian principle and the maximum likelihood method for detecting and distinguishing signals. *Trudy TsNIIS. Sankt-Peterburgskiy filial.* 2022;1(13):106-112. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: CGPLYM
10. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic Systems: Theory and Applications. Singapore: World Scientific; 2002. 928 p. https://doi.org/10.1142/4805
11. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Theory of Complex Stochastic Systems. *Informatika i Ee Primeneniya* = Informatics and its Applications. 2011;5(2):4-16. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: NXKRQZ
12. Sinitsyn I.N. Developing the theory of stochastic canonic expansions. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2023;33(4):862-887. https://doi.org/10.1134/S1054661823040429
13. Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software tools for analysis and synthesis of highly available stochastic systems (IV). *Sistemy vysokoy dostupnosti* = Systems Highly Available. 2017;13(3):55-59. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: ZSQHLR
14. Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software tools for analysis and synthesis of highly available stochastic systems (V). *Sistemy vysokoy dostupnosti* = Systems Highly Available. 2018;14(1): 59-70. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: YVXNBW
15. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Nonstationary Stochastic Process Modeling by Canonical Expansion and Wavelet Neutral Network. *Sistemy i Sredstva Informatiki* = Systems and Means of Informatics. 2024;34(2):21-39. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.14357/08696527240202
16. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Modeling algorithms for vector stochastic process by canonical expansions based on multilayer wavelet neural network. *Sistemy i sredstva informatiki* = Systems and Means of Informatics. 2025;35(2):17-30. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.14357/08696527250202
17. Veitch D. Wavelet Neural Networks and their application in the study of dynamical system. *Networks*. 2005;1(8):313-320.
18. Sinitsyn I., Sinitsyn V., Korepanov E., Konashenkova T. Qptimization of linear stochastic systems based on canonical wavelet expansions. *Automation and Remote Control*. 2020;81(11):2046-2061. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.1134/S0005117920110077
19. Sinitsyn I., Sinitsyn V., Korepanov E., Konashenkova T. Bayes Synthesis of Linear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions. *Mathematics*. 2022;10(9):1517. https://doi.org/10.3390/math10091517
20. Sinitsyn I., Sinitsyn V., Korepanov E., Konashenkova T. Synthesis of Nonlinear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions. *Mathematics*. 2023;11(9):2059. https://doi.org/10.3390/math11092059
21. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Methodological support of functional Bayes synthesis of stochastic systems based on wavelet canonical expansions. *Sistemy vysokoy dostupnosti* = Systems Highly Available. 2023;19(4):37-50. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.18127/j20729472-202304-03
22. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Bayes synthesis of multidimensional stochastic system with high availability by wavelet canonical expansions. *Sistemy vysokoy dostupnosti* = Systems Highly Available. 2024; 20(1):55-66. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.18127/ j20729472-202401-06
23. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Neural network synthesis of an optimal linear stochastic system according to the criterion of minimum mean square error. *Sistemy i sredstva informatiki* = Systems and Means of Informatics. 2024;34(3):87-108. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.14357/08696527240307
24. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Development of Information System Optimization Methods Based on Wavelet Canonical Expansions and Wavelet Neural Network Technologies. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2025;21(1):46-55. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202501.46-55
25. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Wavelet neural networks mean square error synthesis of multidimensional linear nonstationary stochastic system with high availability. *Sistemy vysokoy dostupnosti* = Systems Highly Available. 2025;21(2):35-45. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.18127/j20729472-202502-03
26. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Wavelet neural network synthesis of one dimensional linear nonstationary stochastic system with high availability by integral Bayes functional criterion. *Sistemy vysokoy dostupnosti* = Systems Highly Available. 2025;21(2):46-55. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/ 10.18127/j20729472-202502-04

Поступила 29.07.2025; одобрена после рецензирования 11.09.2025; принята к публикации 02.10.2025.

Submitted 29.07.2025; approved after reviewing 11.09.2025; accepted for publication 02.10.2025.

Об авторах:

Синицын Игорь Николаевич, главный научный сотрудник отдела № 61 «Стохастические проблемы информатики» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), доктор технических наук, профессор, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0534-4262,** sinitsin@dol.ru

Синицын Владимир Игоревич, главный научный сотрудник, руководитель отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), доктор физико-математических наук, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1456-9719,** vsinitsin@ipiran.ru

Корепанов Эдуард Рудольфович, ведущий научный сотрудник, руководитель отдела № 61 «Стохастические проблемы информатики» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), кандидат технических наук, профессор, **ORCID: https://orcid.org/0009-0007-9795-0983,** ekorepanov@ipiran.ru

Конашенкова Татьяна Дмитриевна, научный сотрудник отдела № 61 «Стохастические проблемы информатики» отделения 6 «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных», ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-22), кандидат физико-математических наук, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8498-979X,** TKonashenkova64@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Igor N. Sinitsyn, Chief Researcher of Department No. 61 "Stochastic Problems of Informatics" of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Dr. Sci. (Tech.), Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0534-4262,** sinitsin@dol.ru

Vladimir I. Sinitsyn, Chief Researcher, Head of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1456-9719,** vsinitsin@ipiran.ru

Eduard R. Korepanov, Leading Researcher, Head of Department No. 61 "Stochastic Problems of Informatics" of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Cand. Sci. (Eng.), Professor, **ORCID: https://orcid.org/0009-0007-9795-0983,** ekorepanov@ipiran.ru

Tatyana D. Konashenkova, Research Fellow of Department No. 61 "Stochastic Problems of Informatics" of Division 6 "Stochastic and Intelligent Methods and Tools for Modeling and Building Systems with Intensive Use of Data", Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences (44 Vavilov St., building 2, Moscow 119333, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8498-979X,** TKonashenkova64@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.