



Научное программное обеспечение в образовании и науке

<https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.501-511>

УДК 004.032.26+519.62

Сравнительный анализ методов построения нейросетевых моделей для задач с параметризованными дифференциальными уравнениями

А. Н. Васильев*, Д. С. Иванов, П. А. Павленко, Д. А. Тархов,
А. Е. Яковлева

Оригинальная статья

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Адрес: 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

* a.n.vasilyev@gmail.com

Аннотация

Проведено комплексное исследование эффективности нейроморфных моделей для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен пример параметризованного дифференциального уравнения второго порядка. Разработана двухэтапная методика, сочетающая аналитический вывод решений на основе обобщенного метода трапеций для различного количества слоев и последующую нейросетевую оптимизацию с различным количеством нейронов. На первом этапе для каждого количества слоев выведены аналитические выражения решения. На втором этапе проведена оптимизация весовых коэффициентов методом случайного поиска по набору начальных приближений с дальнейшей минимизацией функционала ошибки. В качестве нейросетевых базисных функций используются произведения гиперболических тангенсов, что позволяет учитывать зависимость решения как от пространственной переменной, так и от параметра уравнения. Дополнительно исследован метод регулировки разбиения интервалов, основанный на адаптивном изменении длины шага интегрирования. Установлено, что увеличение количества слоев приводит к последовательному снижению ошибки. Показано, что для каждого количества слоев существует оптимальное количество нейронов, обеспечивающее баланс между точностью и вычислительной сложностью.

Ключевые слова: нейроморфные вычисления, параметризованные дифференциальные уравнения, многослойное функциональное решение, аналитическая модификация численного метода, метод трапеций, весовые коэффициенты, оптимизация архитектуры сети, аналитические решения

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Сравнительный анализ методов построения нейросетевых моделей для задач с параметризованными дифференциальными уравнениями / А. Н. Васильев [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 3. С. 501-511. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.501-511>

© Васильев А. Н., Иванов Д. С., Павленко П. А., Тархов Д. А., Яковлева А. Е., 2025



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Comparative Analysis of Methods for Constructing Neural Network Models for Problems with Parameterized Differential Equations

A. N. Vasilyev*, D. S. Ivanov, P. A. Pavlenko, D. A. Tarkhov,
A. E. Yakovleva

Original article

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation

Address: 29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation

* a.n.vasilyev@gmail.com

Abstract

A comprehensive study of the effectiveness of neuromorphic models for solving ordinary differential equations has been conducted. An example of a parameterized second-order differential equation is considered. A two-stage technique has been developed that combines the analytical derivation of solutions based on the generalized trapezoid method for a different number of layers and subsequent neural network optimization with a different number of neurons. At the first stage, analytical expressions of the solution are derived for each number of layers. At the second stage, the weighting coefficients were optimized using a random search method based on a set of initial approximations while minimizing the error functional. Products of hyperbolic tangents are used as neural network basis functions, which makes it possible to take into account the dependence of the solution on both the spatial variable and the equation parameter. Additionally, a method for adjusting interval splitting based on adaptive variation of the integration step length is investigated. It has been found that increasing the number of layers leads to a consistent decrease in error. It is shown that for each number of layers there is an optimal number of neurons, providing a balance between accuracy and computational complexity.

Keywords: neuromorphic computing, parameterized differential equations, multilayer functional solution, analytical modification of the numerical method, trapezoid method, weighting coefficients, network architecture optimization, analytical solutions

Conflict of interests: The authors declares no conflict of interest.

For citation: Vasilyev A.N., Ivanov D.S., Pavlenko P.A., Tarkhov D.A., Yakovleva A.E. Comparative Analysis of Methods for Constructing Neural Network Models for Problems with Parameterized Differential Equations. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2025;21(3):501-511. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.501-511>



Введение

Решение параметризованных дифференциальных уравнений является ключевой задачей при построении моделей сложных динамических систем, киберфизических систем и цифровых двойников [1, 2, 19]. Классические численные методы¹ [3], хотя и обладают строгой теоретической базой, зачастую оказываются недостаточно гибкими для оперативной адаптации моделей к изменяющимся условиям или данным натурных измерений. В то же время, подходы, основанные на машинном обучении, в частности, физически информированные нейронные сети (ФИНС) [4, 5, 7, 12, 17, 20-25], позволяют строить модели, непосредственно учитывающие физические законы, записанные в виде дифференциальных уравнений.

В настоящем исследовании, продолжающем исследования авторов по ФИНС (многослойное функциональное решение, аналитическая модификация численного метода и др.), проводится систематический анализ двух перспективных методов. Метод на основе обобщенного метода трапеций реализует подход, в котором классическая схема метода трапеций обобщается путем введения весовых коэффициентов, оптимизируемых нейросетью, с выводом аналитических выражений решения для каждого количества слоев. Метод регулировки разбиения интервалов основан на адаптивном изменении длины шага интегрирования, что позволяет динамически изменять длину этого интервала в зависимости от поведения решения, что особенно важно для задач с быстро меняющимися особенностями.

В работах [6, 7, 13, 18] предложены методы построения нейросетевых моделей на основе модификации классических численных схем. В работах [14-16] с помощью данных методов построены модели реальных объектов по дифференциальным уравнениям и данным наблюдений, которые более точно отражают реальные объекты, чем исходные дифференциальные уравнения. В работе [11] мы предлагаем основанный на применении этих методов принципиально новый тип нейронных сетей с архитектурой, основанной на физике. Данное исследование развивает этот подход, предлагая систематический анализ влияния архитектуры сети на точность решения параметризованных дифференциальных уравнений. Особенностью предлагаемой методики является использование двухэтапного подхода, сочетающего аналитический вывод решений для фиксированного количества слоев и последующую нейросетевую оптимизацию.

Материалы и методы

Поясним наш подход [6, 7] на примере классического явного метода Эйлера. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (1)$$

на промежутке $D = [a; b]$, содержащем точку x_0 . Здесь $x \in D \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

При необходимости ОДУ высокого порядка сводится к системе ОДУ первого порядка.

Классический метод Эйлера состоит в выборе $x_0 = a$, разбиении промежутка D на n частей: $x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$, и применении итерационной формулы

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k), \quad (2)$$

где $h_k = x_{k+1} - x_k$; $\mathbf{y}_k$ — приближение к точному значению искомого решения $\mathbf{y}(x_k)$.

Для получения приближённого решения в виде функции по полученным поточечным приближениям обычно проводят ломаную линию (ломаная Эйлера) или сплайн.

Мы предлагаем принципиально другой подход для построения приближённого решения в виде функции. С помощью формулы (2) будем строить приближённое решение задачи (1) на переменном интервале $D^0 = [\min(x_0, x); \max(x_0, x)]$, где $x \in [a; b]$. При этом $h_k = h_k(x)$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(x)$, $\mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0$. В качестве искомого приближённого решения предлагается использовать $\mathbf{y}_n(x)$.

Самый простой вариант алгоритма получается при равномерном разбиении промежутка с шагом $h_k(x) = (x - x_0) / n$. Метод регулируемого разбиения интервала получается, если $h_{k+1}(x) = u h_k(x)$. При этом u может быть константой, может быть нейросетевой функцией параметра задачи, а также нейросетевой функции параметра задачи и независимой переменной x .

Можно вместо (2) использовать другую формулу, например, для известного метода трапеций $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h_k}{2} (\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) + \mathbf{f}(x_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}))$. Обобщённый метод трапеций получается, когда вводится параметр u , для которого формула (2) приобретает вид $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k (u \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) + (1-u) \mathbf{f}(x_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}))$.

Здесь опять u может быть константой, может быть нейросетевой функцией параметра задачи, а также нейросетевой функции параметра задачи и независимой переменной x .

В качестве модельной задачи для тестирования указанных методов рассмотрено параметризованное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''(x) + A(\alpha) \cdot y'(x) + B(\alpha) \cdot y(x) = 0, A(\alpha) = \alpha + \alpha^{-1}, B(\alpha) = -\alpha + \alpha^{-1}$$

с начальными условиями: $y(0) = 0, y(1) = 1$.

Решение ищется в области: $x \in [0; 1]$ $\alpha \in [0.01; 0.1]$.

¹ Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с. Хайрер Э., Ваннер Г.. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи, М., Мир, 1999. 685 с.



Двухэтапная методика исследования

Исследование для обобщённого метода трапеций проводилось в два последовательных этапа:

1. Аналитический вывод решений. На основе обобщённого метода трапеций для каждого количества слоев $n = 1, 2, 3, 4, 5$ выведены аналитические выражения решения $y_n(x, \alpha, u)$, где u – весовой коэффициент метода.

Для $n = 1$ получено выражение в виде рациональной дроби:

$$y_1(x, \alpha, u) = -\frac{x\alpha}{-\alpha + x^2(-1+u)^2(-1+\alpha^2) + x(-1+u)(1+\alpha^2)}.$$

Для $n = 2$

$$y_2(x, \alpha, u) = -\frac{4x\alpha(-4\alpha + x^2(-1+u)u(-1+\alpha^2) + x(-1+2u)(1+\alpha^2))}{(-4\alpha + x^2(-1+u)^2(-1+\alpha^2) + 2x(-1+u)(1+\alpha^2))^2}$$

Аналогичные более сложные выражения получены для $n = 3, 4, 5$.

Далее с помощью подбора параметра u проводилась минимизация функционала ошибки $J(u)$:

$$J(u) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \left[\frac{y_n'' + A(\alpha_i)y_n' + B(\alpha_i)y_n}{y_n(1, \alpha_i, u)} \right]^2}$$

для набора случайных точек в области: $x \in [0; 1]$, $\alpha \in [0.01; 0.1]$.

Также находились минимумы функционалов

$$J_{\min}(u) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \left[\frac{y_n'' + A(0.01)y_n' + B(0.01)y_n}{y_n(1, 0.01, u)} \right]^2},$$

$$J_{\max}(u) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \left[\frac{y_n'' + A(0.1)y_n' + B(0.1)y_n}{y_n(1, 0.1, u)} \right]^2}$$

Т а б л и ц а 1. Среднеквадратичная ошибка J для одного слоя

Table 1. Mean square error J for one layer

Изменение параметра	$J[0.0]$	$J[0.5]$	$J_{\min}$
$\alpha \in [0.01; 0.1]$	101.415	55.6921	48.4792
$\alpha = 0.01$	450.591	223.748	193.796
$\alpha = 0.1$	26.0286	10.4978	9.45463

Источник: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены авторами.

Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the authors.

Из таблицы 1 видно, что оптимизация параметра u позволяет уменьшить ошибку, хотя её уменьшение по сравнению со стандартным методом трапеций невелико. Таблица 2 позволяет сделать вывод о том, что с ростом числа слоёв ошибка существенно убывает. Кроме того, растёт выигрыш от выбора оптимального параметра.

Т а б л и ц а 2. Среднеквадратичная ошибка J для пяти слоёв

Table 2. Mean square error J for five layers

Изменение параметра	$J[0.0]$	$J[0.5]$	$J_{\min}$
$\alpha \in [0.01; 0.1]$	28.1089	16.7715	6.99495
$\alpha = 0.01$	2009.633	79.1093	39.9815
$\alpha = 0.1$	7.56354	0.45680	0.38691

2. Нейросетевая оптимизация. Для каждого аналитического решения $y_n(x, \alpha, u)$ проведена оптимизация с использованием нейронной сети с архитектурой:

$$u(\alpha) = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \tanh[a_i(\alpha - d_i)] + L_0$$

и нейронной сети с архитектурой:

$$u(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \tanh[a_i(x - d_i)] \cdot \tanh[a_{ii}(\alpha - d_{ii})] + L_0,$$

где $N = 1, 3, 5$ – количество нейронов в скрытом слое.

Веса сети подбирались с помощью минимизации функционала ошибки:

$$\sum_{i=1}^M (R(x_i, \alpha_i, \theta))^2,$$

где ошибка R определяется как:

$$R(x, \alpha, \theta) = y_{xx}''(x, \alpha) + A(\alpha) \cdot y_x'(x, \alpha) + B(\alpha) \cdot y(x, \alpha).$$

Минимизация проводилась с помощью метода *RProp*, пробные точки x_i, α_i регенерировались каждые 5 шагов процесса оптимизации.

Для метода регулируемого разбиения интервала исследование проводится аналогично, только формулы для $y_n(x, \alpha, u)$ получают несколько более громоздкими.

Результаты вычислительных экспериментов

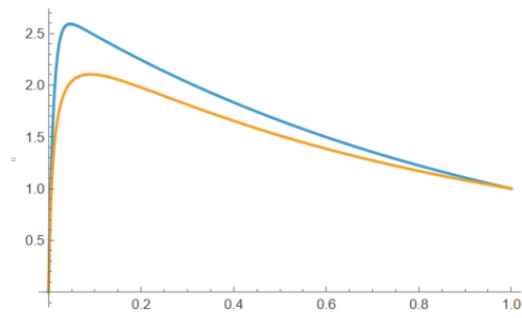
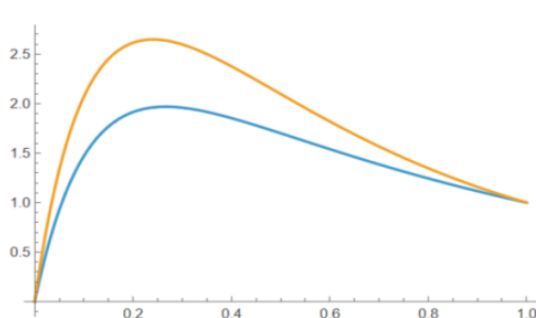
Ниже представлены некоторые результаты вычислительных экспериментов. Начиная с результатов для обобщённого метода трапеций. На первом этапе вычислений параметр u считался постоянным и находилось его оптимальное значение как для всей области изменения параметра, так и для крайних его значений.

Далее представлены результаты вычислений в том случае, когда u является функцией параметра α и переменной x . В случае, когда u является функцией только параметра α , получается несколько меньший выигрыш.



Т а б л и ц а 3. Сравнительный анализ ошибок однослойной нейронной сети
T a b l e 3. Comparative analysis of single-layer neural network errors

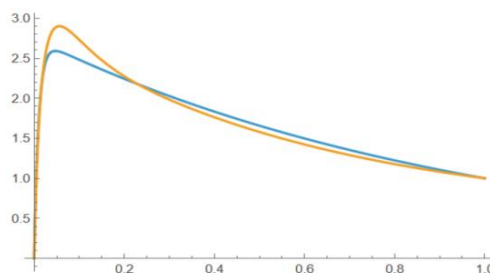
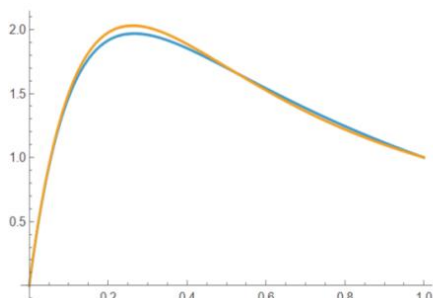
Количество нейронов	Ошибка нейросети	Ошибка константной модели	Улучшение
1	0.223129	0.494311	54.86%
3	0.0393119	0.497069	92.09%
5	0.0943487	0.482873	80.46%



Р и с. 1. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, сеть из 1 нейрона. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

F i g. 1. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, one-neuron network. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Из графиков видно, что даже такая маленькая нейронная сеть позволяет правильно отобразить форму решения на обоих концах интервала изменения параметра α .



Р и с. 2. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, сеть из 3 нейронов. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

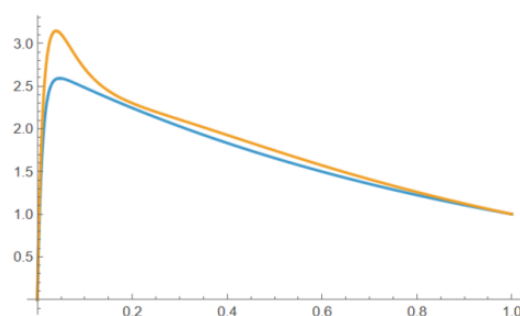
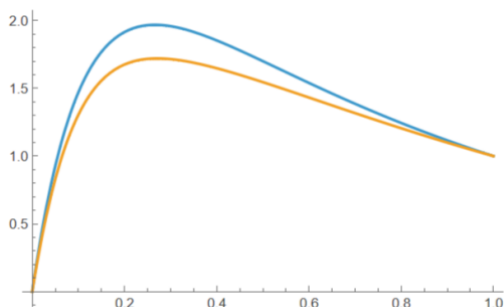
F i g. 2. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, three-neuron network. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Незначительное увеличение числа нейронов позволяет существенно сократить ошибку моделирования. Дальнейший рост сети приводит к постепенному сокращению ошибки при увеличении длительности процесса обучения.

Т а б л и ц а 4. Сравнительный анализ ошибок двухслойной нейронной сети
T a b l e 4. Comparative analysis of two-layer neural network errors

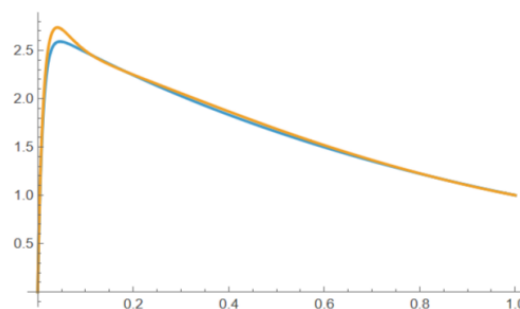
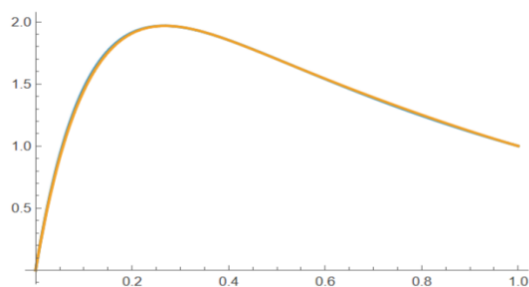
Количество нейронов	Ошибка нейросети	Ошибка константной модели	Количество нейронов
1	0.100291	0.334466	1
3	0.0463755	0.342384	3
5	0.0189031	0.335796	5

Из таблицы 4 видно, что ошибка убывает, причём более существенно при увеличении числа нейронов.



Р и с. 3. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, сеть из 1 нейрона. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

Fig. 3. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, one-neuron network. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.



Р и с. 4. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, сеть из 5 нейронов. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

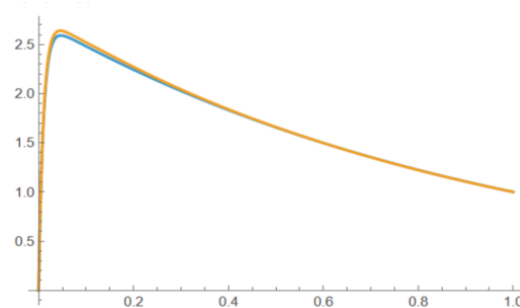
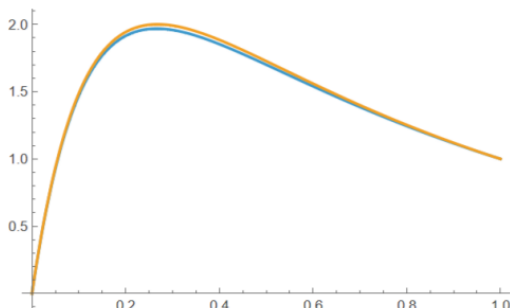
Fig. 4. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, five-neuron network. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Рисунок 4 показывает, что соответствие приближённого решения точному близко к идеальному. Таблица 5 показывает, что достаточно высокая точность

получается для сети из 1 нейрона, увеличение размера сети не приводит к радикальному увеличению точности при заданной длительности обучения.

Т а б л и ц а 5. Сравнительный анализ ошибок четырёхслойной нейронной сети
Table 5. Comparative analysis of four-layer neural network errors

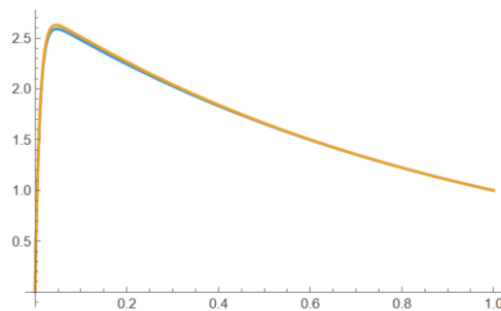
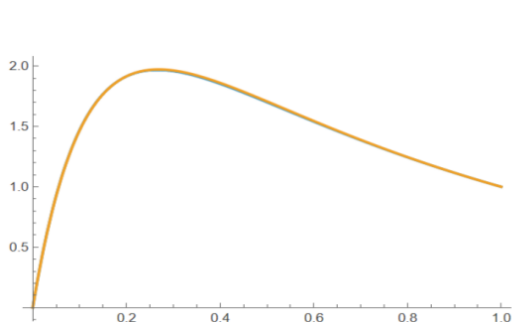
Количество нейронов	Ошибка нейросети	Ошибка константной модели	Улучшение
1	0.0171167	0.202110	91.53%
3	0.0161651	0.209629	92.29%
5	0.0107096	0.204214	94.76%



Р и с. 5. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, сеть из 3 нейронов. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

Fig. 5. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, three-neuron network. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Данный рисунок подтверждает практически идеальное соответствие точного и приближённого решения.



Р и с. 6. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, сеть из 5 нейронов. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

Fig. 6. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, five-neuron network. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Дальнейшее увеличение числа слоёв не приводит к уменьшению ошибки при сохранении заданного числа шагов процедуры обучения нейронной сети.

Сравнительный анализ ошибок по количеству слоёв

Результаты, представленные в Таблицах 3-5, демонстрируют устойчивое снижение ошибки при увеличении количества слоёв. Наименьшие значения ошибки достигаются при использовании 5 слоёв, что

подтверждает гипотезу о повышении точности модели с углублением её архитектуры. Визуальный анализ подтверждает, что увеличение числа нейронов способствует снижению ошибки в областях с высокой нелинейностью.

Результаты вычислительных экспериментов для метода регулировки разбиения интервалов

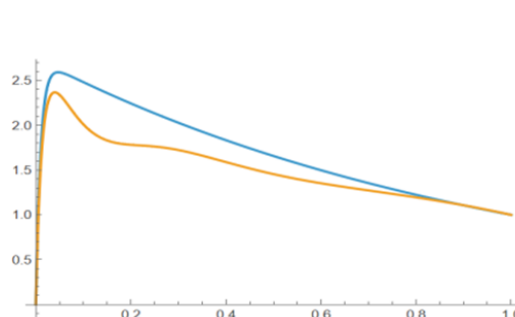
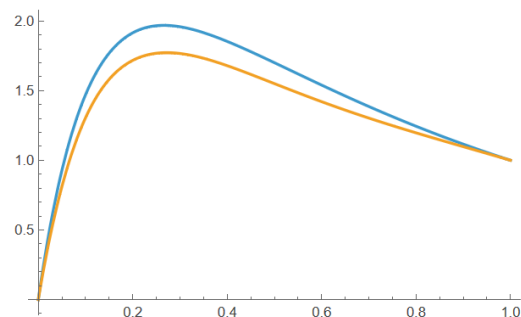
Т а б л и ц а 6. Сравнительный анализ ошибки двухслойной нейронной сети

Table 6. Comparative analysis of two-layer neural network errors

Количество нейронов	Ошибка нейросети	Ошибка константной модели	Улучшение
1	0,141192	0,337145	58,12%
3	0,0826391	0,27898	70,38%
5	0,141503	0,341545	58,57%
7	0,182567	0,540652	66,23%
10	0,0417593	0,281735	85,18%
12	0,0620461	0,202763	69,41%
15	0,0319964	0,267079	88,02%

Данная таблица показывает тенденцию уменьшения ошибки при увеличении числа нейронов, но уменьшение немонотонное, что говорит о сложности

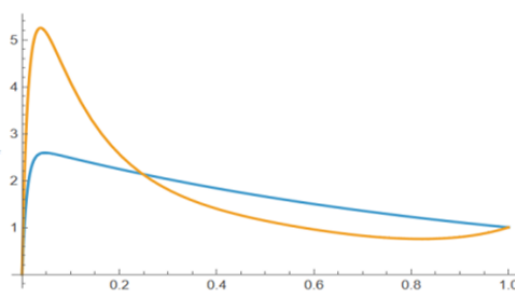
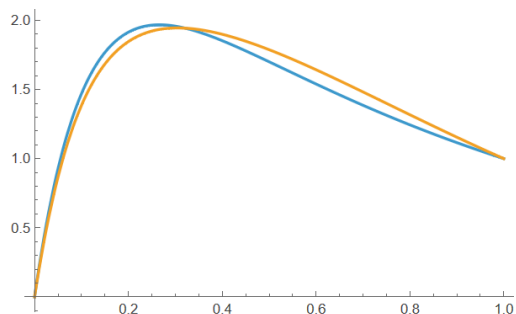
процесса обучения и необходимости перезапуска процесса оптимизации для получения оптимального результата.



Р и с. 7. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, 3 нейрона. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

Fig. 7. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, three neurons. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

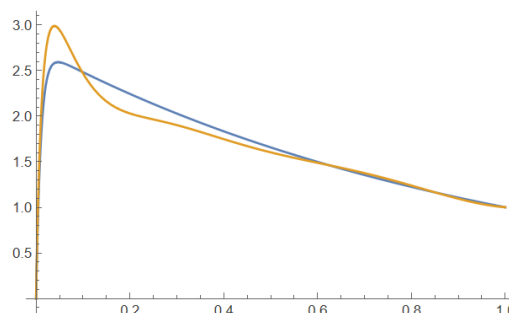
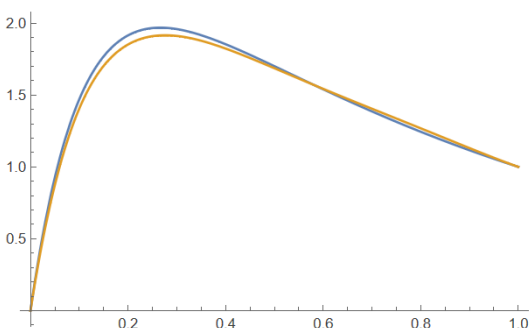
Данный рисунок показывает качественное совпадение результатов, но ошибка слишком велика.



Р и с. 8. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, 7 нейронов. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

F i g. 8. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, seven neurons. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Увеличение числа нейронов до 7 приводит к некоторому уменьшению ошибки, но результат остаётся неудовлетворительным.



Р и с. 9. Точное и нейросетевое решение для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, 15 нейронов. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

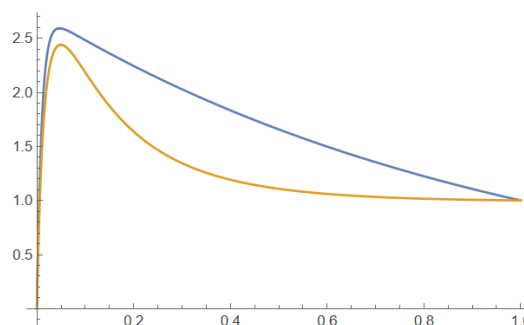
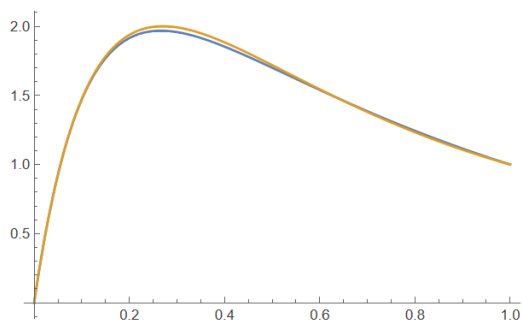
F i g. 9. Exact and neural-network solution for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, 15 neurons. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Увеличение числа нейронов до 15 делает результат приемлемым.

Т а б л и ц а 7. Сравнительный анализ ошибки трехслойной нейронной сети

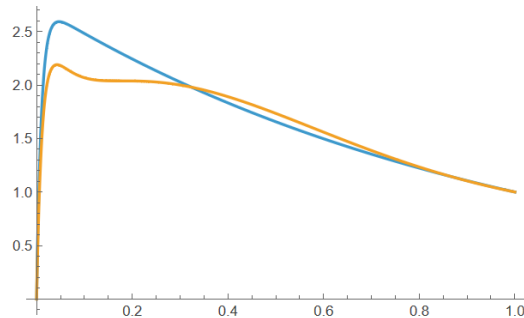
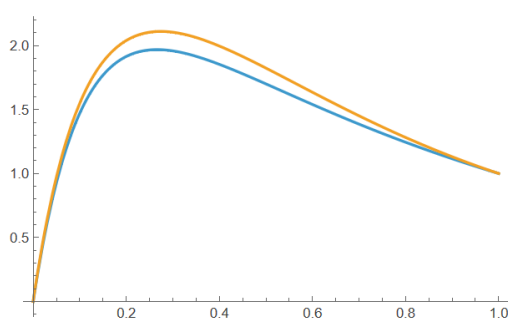
T a b l e 7. Comparative analysis of three-layer neural network errors

Количество нейронов	Ошибка нейросети	Ошибка константной модели	Улучшение
1	0,391482	0,5118	23,51%
2	0,0490918	0,940369	94,78%
3	0,0594547	0,897648	93,38%
4	0,0461238	0,8342148	94,47%



Р и с. 10. Распределение точного и нейросетевого решений для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, 1 нейрон. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

F i g. 10. Distribution of exact and neural-network solutions for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, one neuron. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.



Р и с. 11. Распределение точного и нейросетевого решений для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.01$, 4 нейрона. Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым – приближённое.

F i g. 11. Distribution of exact and neural-network solutions for $\alpha = 0.1$ and $\alpha = 0.01$, four neurons. Blue denotes the exact solution; orange denotes the approximate solution.

Метод регулировки разбиения интервалов показал наилучшую точность при использовании 15 нейронов в двухслойной архитектуре, где ошибка составила 0,0320, что соответствует улучшению на 88,02% относительно константной модели. При этом для трёхслойной конфигурации оптимальные результаты достигаются уже при 2-4 нейронах с ошибкой около 0,046-0,049, что демонстрирует эффективность метода при умеренной сложности модели.

Обсуждение и заключение

Для каждого количества слоёв и каждого метода определено оптимальное число нейронов, обеспечивающее баланс между точностью и вычислительной сложностью. Наилучшие результаты для обобщённого метода трапеций достигаются при использовании 3-5 нейронов, в то время как для метода регулировки разбиения оптимальное число нейронов варьируется в зависимости от глубины сети. Проведённое исследование подтвердило эффективность применения двухэтапного подхода на основе обобщённого метода трапеций, сочетающего аналитический вывод решений и последующую нейросетевую оптимизацию. Установлено, что увеличение числа слоёв с 1 до 5 приводит к последовательному снижению ошибки аппроксимации. Показано, что для каждого количества слоёв существует оптимальное число нейронов, при котором достигается минимальная ошибка. Например, для 5-

слойной архитектуры оптимальным является использование 5 нейронов, что позволяет достичь улучшения точности на 82,84% по сравнению с константной моделью.

Метод регулировки разбиения интервалов также продемонстрировал высокую эффективность, особенно при использовании 10-15 нейронов в двухслойной архитектуре, где ошибка снижается до 0,032-0,042. Для трёхслойной конфигурации оптимальные результаты достигаются уже при 2-4 нейронах с ошибкой около 0,046-0,049, что подчёркивает гибкость метода и его способность балансировать между точностью и вычислительной сложностью.

Предложенные подходы позволяют получать решения в аналитической форме, что расширяет возможности их практического применения, в том числе в задачах управления и оптимизации динамических систем. Важным преимуществом методов является возможность управления точностью модели за счёт варьирования её архитектуры.

Перспективным направлением дальнейших исследований в области построения полумпирических нейросетевых моделей по разнородной пополняемой информации об объекте [6-10] является применение разработанной методики к нелинейным и многопараметрическим дифференциальным уравнениям, а также её интеграция с методами обработки экспериментальных данных.

References

1. Lee J., Bagheri B., Kao H.A. A Cyber-Physical Systems architecture for Industry 4.0-based manufacturing systems. *Manufacturing Letters*. 2015;3:18-23. <https://doi.org/10.1016/j.mfglet.2014.12.001>
2. Rasheed A., San O., Kvamsdal T. Digital Twin: Values, Challenges and Enablers From a Modeling Perspective. *IEEE Access*. 2020;8:21980-22012. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2970143>
3. Gulin A.V., Samarskii A.A. On some results and problems of the stability theory of difference schemes. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 1976;28(3):263-290. <https://doi.org/10.1070/SM1976v028n03ABEH001651>
4. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686-707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
5. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*. 1998;9(5):987-1000. <https://doi.org/10.1109/72.712178>
6. Lazovskaya T., Malykhina G., Tarkhov D. Physics-Based Neural Network Methods for Solving Parameterized Singular Perturbation Problem. *Computation*. 2021;9(9):97. <https://doi.org/10.3390/computation909097>



7. Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Semi-empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development. Academic Press, Elsevier; 2020. 288 p. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-02027-X>
8. Budkina E.M., Kuznetsov E.B., Lazovskaya T.V., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. In: Cheng L., Liu Q., Ronzhin A. (eds.) *Advances in Neural Networks – ISNN 2016*. ISSN 2016. *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 9719. Cham: Springer; 2016. p. 277-283. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40663-3_32
9. Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A. Fresh approaches to the construction of parameterized neural network solutions of a stiff differential equation. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 2015;1(2):192-198. <http://dx.doi.org/10.1016/j.spjpm.2015.07.005>
10. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016;158:012061. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012061>
11. Tarkhov D., Lazovskaya T., Malykhina G. Constructing Physics-Informed Neural Networks with Architecture Based on Analytical Modification of Numerical Methods by Solving the Problem of Modelling Processes in a Chemical Reactor. *Sensors*. 2023;23(2):663. <https://doi.org/10.3390/s23020663>
12. Shemyakina T.A., Tarkhov D.A., Beliaeva A.R., Zulkarnay I.U. Neural Network Method of Restoring an Initial Profile of the Shock Wave. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018;14(1):222-232. <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201801.222-232>
13. Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V. (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 736. Cham: Springer; 2018. p. 17-22. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_3
14. Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.S. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. p. 138-146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21
15. Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A Two-layer Semi Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;1044:012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1044/1/012005>
16. Bortkovskaya M.R., Vasilyev A.N., Zulkarnay I.U., Semenova D.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P., Shishkina I.A. Modeling of the membrane bending with multilayer semi-empirical models based on experimental data. *CEUR Workshop Proceedings*. 2017;2064:150-156. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf> (accessed 26.07.2025).
17. Budkina E.M., Kuznetsov E.B., Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A., Vasilyev A.N. Neural network approach to intricate problems solving for ordinary differential equations. *Optical Memory and Neural Networks*. 2017;26(2):96-109. <https://doi.org/10.3103/S1060992X17020011>
18. Kaverzneva T.T., Malykhina G.F., Tarkhov D.A. From Differential Equations to Multilayer Neural Network Models. In: Lu H., Tang, H., Wang, Z. (eds.) *Advances in Neural Networks – ISNN 2019*. ISSN 2019. *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11554. Cham: Springer; 2019. p. 19-27. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22796-8_3
19. Rai R., Sahu C.K. Driven by Data or Derived through Physics? A Review of Hybrid Physics Guided Machine Learning Techniques with Cyber-Physical System (CPS) Focus. *IEEE Access*. 2020;8:71050-71073. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2987324>
20. Vasilyev A.N., Tarkhov D.A. Mathematical Models of Complex Systems on the Basis of Artificial Neural Networks. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2014;17(3):327-335. EDN: YMVZGV
21. Lazovskaya T.N., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Parametric Neural Network Modeling in Engineering. *Recent Patents on Engineering*. 2017;11(1):10-15. <https://doi.org/10.2174/1872212111666161207155157>
22. Antonov V., Tarkhov D., Vasilyev A. Unified approach to constructing the neural network models of real objects. Part 1. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2018;41(18):9244-9251. <https://doi.org/10.1002/mma.5205>
23. Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. 2005;14(1):59-72.
24. Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. 2005;14(2):97-122.
25. Yadav N., Yadav A., Kumar M. An Introduction to Neural Network Methods for Differential Equations. *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology*. Dordrecht: Springer; 2015. 114 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9816-7>

Поступила 22.07.2025; одобрена после
рецензирования 03.09.2025; принята к публикации
21.09.2025.

Submitted 22.07.2025; approved after reviewing
03.09.2025; accepted for publication 21.09.2025.



Об авторах:

Васильев Александр Николаевич, профессор кафедры высшей математики Института физики и математики, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0227-0162>, a.n.vasilyev@gmail.com

Иванов Данила Сергеевич, студент Физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0005-0373-1356>, danilivanovgone@gmail.com

Павленко Полина Андреевна, студент Физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-7074-7302>, polyna06mayl@gmail.com

Тархов Дмитрий Альбертович, профессор кафедры высшей математики Института физики и математики, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, dtarkhov@gmail.com

Яковлева Анна Евгеньевна, студент Физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0009-3759-3210>, yakovlevaanna07@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Alexander N. Vasilyev, Professor of the Higher Mathematics Department, Institute of Physics and Mathematics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), Dr. Sci. (Eng.), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0227-0162>, a.n.vasilyev@gmail.com

Danila S. Ivanov, Student of the Physics and Mechanics Institute, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0005-0373-1356>, danilivanovgone@gmail.com

Polina A. Pavlenko, Student of the Physics and Mechanics Institute, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-7074-7302>, polyna06mayl@gmail.com

Dmitry A. Tarkhov, Professor of the Higher Mathematics Department, Institute of Physics and Mathematics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), Dr. Sci. (Eng.), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, dtarkhov@gmail.com

Anna E. Yakovleva, Student of the Physics and Mechanics Institute, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0009-3759-3210>, yakovlevaanna07@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.