



Научное программное обеспечение в образовании и науке

<https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.539-553>

УДК 539.376:004.032.26

Применение комбинации многослойной методологии построения полуэмпирической нейронной сети и метода продолжения решения по параметру для идентификации характеристик ползучести

Е. Б. Кузнецов¹, С. С. Леонов^{1,2}, А. А. Языков^{1*}

Оригинальная статья

¹ ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

² ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

* anton199_999@mail.ru

Аннотация

Исследование посвящено решению актуальной задачи идентификации определяющих уравнений высокотемпературной ползучести на примере одноосного растяжения образцов из стали 45 при температуре $T = 850^\circ\text{C}$. Проблема долговременной прочности является критически важной при проектировании ответственных конструкций, однако её моделирование осложняется отсутствием единой универсальной теории. Существующие модели ползучести содержат набор материальных констант, определение которых представляет отдельную сложную задачу. Для идентификации характеристик ползучести предложен комбинированный подход, сочетающий метод построения полуэмпирических рекуррентных нейронных сетей и метод продолжения решения по параметру. Данная методика позволяет совместить вычислительную эффективность классических численных методов для решения дифференциальных уравнений с аппроксимационной гибкостью глубокого обучения. Применение параметрического продолжения не только упрощает процесс обучения модели, но и позволяет преодолеть проблему плохой обусловленности исходной задачи. В статье представлен детальный анализ полученных результатов, проведено их сравнение с данными, известными из научной литературы, и обоснована эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: ползучесть, идентификация, модель, численные методы, дифференциальные уравнения, метод длины дуги, нейронные сети, многослойные нейронные сети

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Языков А. А. Применение комбинации многослойной методологии построения полуэмпирической нейронной сети и метода продолжения решения по параметру для идентификации характеристик ползучести // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2025. Т. 21, № 3. С. 539-553. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.539-553>

© Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Языков А. А., 2025



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Application of a Combination of a Multilayered Methodology for Building a Semi-Empirical Neural Network and a Method for Continuing the Solution by Parameter to Identify Creep Characteristics

E. B. Kuznetsov^a, S. S. Leonov^{a,b}, A. A. Yazykov^{a*}

Original article

^a Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Address: 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

^b Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

Address: 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

* anton199_999@mail.ru

Abstract

The study addresses the relevant problem of identifying the constitutive equations for high-temperature creep, using the example of uniaxial tension in steel 45 specimens at a temperature of $T = 850$ °C. The issue of long-term strength is critically important in the design of critical structures; however, its modeling is complicated by the absence of a single, universal theory. Existing creep models contain a set of material constants, the determination of which itself presents a significant challenge. To identify the creep characteristics, a combined approach is proposed that integrates a methodology for building semi-empirical recurrent neural networks with the parameter continuation method. This technique makes it possible to combine the computational efficiency of classical numerical methods for solving differential equations with the approximation flexibility of deep learning. The application of parameter continuation not only simplifies the model training process but also helps to overcome the ill-conditioned nature of the original problem. The paper provides a detailed analysis of the results obtained, compares them with data known from the scientific literature, and substantiates the effectiveness of the proposed method.

Keywords: creep, identification, model, numerical methods, differential equations, arc length method, neural networks, multilayer neural network

Conflict of interests: The authors declares no conflict of interest.

For citation: Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Yazykov A.A. Application of a Combination of a Multilayered Methodology for Building a Semi-Empirical Neural Network and a Method for Continuing the Solution by Parameter to Identify Creep Characteristics. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2025;21(3):539-553. <https://doi.org/10.25559/SITITO.021.202503.539-553>



Введение

В работе решается задача определения характеристик ползучести для описания модели физического процесса разрушения образцов из стали 45 в диапазоне напряжений [35 МПа; 50 МПа] [1, 2]. Процесс разрушения описывается уравнениями теории структурных параметров Ю.Н. Работнова [3]:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma^n}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma^k}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}}, \end{cases} \quad (1)$$

Начальные условия задаются однородными:

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0 \quad (2)$$

В случае постоянного напряжения $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ задача может быть решена аналитически.

Предлагается для исключения плохой обусловленности задачи применить метод длины дуги. Этот метод был предложен Бельгийским математиком М. Лазем [4, 5]. Данный метод успешно применялся исследователями при решении сингулярных задач [6-11].

Цели исследования

Целью данной работы является исследование эффективности применения метода комбинирующего многослойную нейросетевую методологию и продолжение решения по параметру для идентификации сингулярных динамических уравнений ползучести. В данной статье рассмотрена задача идентификации материальных констант ползучести для интервала напряжений $\sigma = [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$. Показана реализация метода для обхода сингулярности в задаче (1)-(2). Ранее в работах [1, 2] данная задача успешно решалась авторами исследований с применением модифицированного метода Эйлера, однако наличие сингулярности в уравнениях создавало сложности при решении задачи идентификации параметров ползучести. В частности приходилось вводить дополнительные регуляризующие слагаемые, чтобы метод давал устойчивые и удовлетворительные результаты. В данной работе была решена эта проблема, а также приведён подробный анализ робастности применяемой нейронной сети и детальная оценка точности и эффективности модели со статистической точки зрения.

Аналитическое решение задачи

Рассмотрим получение аналитического решения задачи (1)-(2). Произведём операцию интегрирования, чтобы получить выражения, определяющие деформацию ползучести ε и повреждённость ω . Рассмотрим второе уравнение системы (1):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma^k}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}}, \quad (3)$$

Приводим данное уравнение к виду:

$$d\omega = \frac{B\sigma^k}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}} dt, \quad (4)$$

Интегрируя (4) по t , получим

$$\omega(t) = \left\{ 1 - [1 - (\alpha + 1)(m + 1)B\sigma^k t]^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\}. \quad (5)$$

Получим аналитическое решение для ε , решая первое уравнение системы (1). Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma^n}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}}, \quad (6)$$

Можно привести данное уравнение к виду:

$$d\varepsilon = \frac{A\sigma^n}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}} dt, \quad (7)$$

Из уравнения (3) получим:

$$\frac{d\omega}{B\sigma^k} = \frac{dt}{\omega^{\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}}, \quad (8)$$

Тогда совершив подстановку (8) в (7)

$$d\varepsilon = \frac{A\sigma^n}{B\sigma^k} d\omega, \quad (9)$$

Интегрируем выражение (9):

$$\varepsilon(t) = \frac{A\sigma^n}{B\sigma^k} \omega(t). \quad (10)$$

Время до начала разрушения (длительная прочность конструкции) при повреждённости $\omega_* = 1$ определяется следующим выражением:

$$t^* = [B\sigma^k(\alpha + 1)(m + 1)]^{-1}. \quad (11)$$

Нами получено аналитическое решение задачи. Однако выражения (5), (10) и (11) можно применять только при известных значениях параметров A, B, n, k, m, α . Полученные выражения будут использоваться в дальнейшем для получения аналитических кривых ползучести и разрушения. Рассмотрим задачу идентификации характеристик ползучести A, B, n, k, m, α . Ранее данная задача решалась [12], модифицированным методом Эйлера с переменной границей интегрирования, предложенным А.Н. Васильевым и Д.А. Тарховым [12, 13], путём комбинации рекуррентных нейронных сетей и численных методов. Авторами предлагается модифицированный подход – комбинация полуэмпирических рекуррентных сетей с методом продолжения решения по параметру. Данный подход является более эффективным применительно к данному классу задач, совмещая в себе точность и относительную простоту. Далее рассмотрим предлагаемую методику решения задачи и синтез модели пошагово.

Эксперимент

Экспериментальные данные растяжения прутков из стали 45 при $T = 850^\circ\text{C}$ для интервала напряжения $\sigma_0 = [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$, взяты из статьи [2]. Повреждённость на основе экспериментальных данных деформации ползучести ε рассчитывалась по формуле $\omega = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}$, где ε_* – значение деформации ползучести в момент разрушения. В таблицах 1-4 приведены данные экспериментальных точек, взятые из работы [1]. На рисунке 1 приведены экспериментальные данные (точки). Моменту разрушения (треугольник) соответствует условие $\omega_* = 1$.



Т а б л и ц а 1. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 35$ МПа
Table 1. Experimental data for steel 45 at $\sigma_0 = 35$ MPa

	1	2	3	4	5	6	7
t, ч	0.51	0.98	1.461	1.918	2.441	2.935	3.433
ε	0.044	0.081	0.109	0.141	0.163	0.175	0.195
ω	0.084	0.157	0.211	0.273	0.316	0.34	0.378
	8	9	10	11	12	13	14
t, ч	3.902	4.445	4.898	5.327	5.837	6.531	6.706
ε	0.211	0.234	0.249	0.264	0.287	0.379	0.516
ω	0.41	0.454	0.482	0.512	0.557	0.735	1

Источник: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены авторами.
Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the authors.

Т а б л и ц а 2. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 40$ МПа
Table 2. Experimental data for steel 45 at $\sigma_0 = 40$ MPa

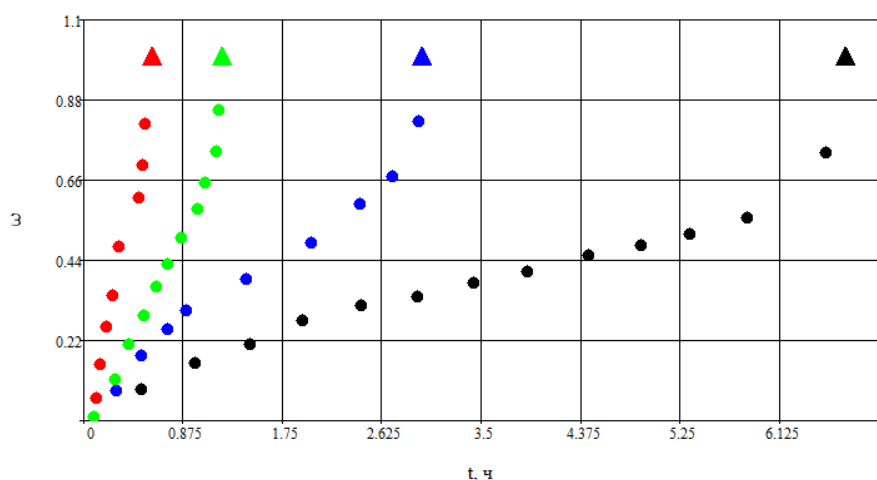
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, ч	0.286	0.51	0.735	0.906	1.429	2	2.429	2.714	2.947	2.98
ε	0.05	0.111	0.155	0.187	0.24	0.3	0.366	0.412	0.505	0.616
ω	0.0808	0.18	0.253	0.303	0.39	0.487	0.595	0.67	0.82	1

Т а б л и ц а 3. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 45$ МПа
Table 3. Experimental data for steel 45 at $\sigma_0 = 45$ MPa

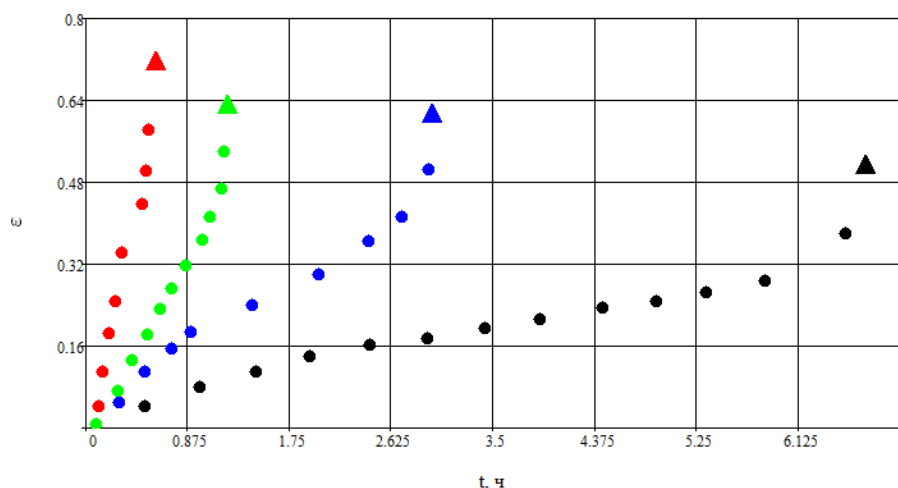
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t, ч	0.088	0.273	0.392	0.527	0.637	0.739	0.857	0.996	1.061	1.163	1.184	1.224
ε	0.007	0.072	0.134	0.183	0.232	0.273	0.318	0.368	0.413	0.468	0.541	0.633
ω	0.012	0.113	0.211	0.29	0.366	0.431	0.503	0.581	0.652	0.738	0.854	1

Т а б л и ц а 4. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 50$ МПа
Table 4. Experimental data for steel 45 at $\sigma_0 = 50$ MPa

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t, ч	0.108	0.14	0.199	0.258	0.307	0.478	0.513	0.537	0.604
ε	0.043	0.111	0.186	0.247	0.342	0.439	0.501	0.583	0.716
ω	0.06	0.154	0.259	0.345	0.477	0.612	0.7	0.813	1



Р и с. 1. Экспериментальные кривые поврежденности стержня из стали 45 в виде точек. Черная кривая соответствует $\sigma_0 = 35$. Синяя кривая соответствует $\sigma_0 = 40$. Зеленая кривая соответствует $\sigma_0 = 45$. Красная кривая соответствует $\sigma_0 = 50$.
Fig. 1. Experimental damage curves for a steel 45 rod, presented as data points. The black curve corresponds to $\sigma_0 = 35$. The blue curve corresponds to $\sigma_0 = 40$. The green curve corresponds to $\sigma_0 = 45$. The red curve corresponds to $\sigma_0 = 50$.



Р и с. 2. Экспериментальные кривые деформации ползучести стержня из стали 45 в виде точек. Черная кривая соответствует $\sigma_0 = 35$. Синяя кривая соответствует $\sigma_0 = 40$. Зелёная кривая соответствует $\sigma_0 = 45$. Красная кривая соответствует $\sigma_0 = 50$.
F i g. 2. Experimental creep deformation curves for a steel 45 rod, presented as data points. The black curve corresponds to $\sigma_0 = 35$. The blue curve corresponds to $\sigma_0 = 40$. The green curve corresponds to $\sigma_0 = 45$. The red curve corresponds to $\sigma_0 = 50$.

Методология явного метода Эйлера

Опишем явный метод Эйлера, согласно [15]. Рассмотрим задачу Коши для ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (12)$$

Интегрируя первое уравнение системы (12) на отрезке $h = x_{i+1} - x_i$, получим

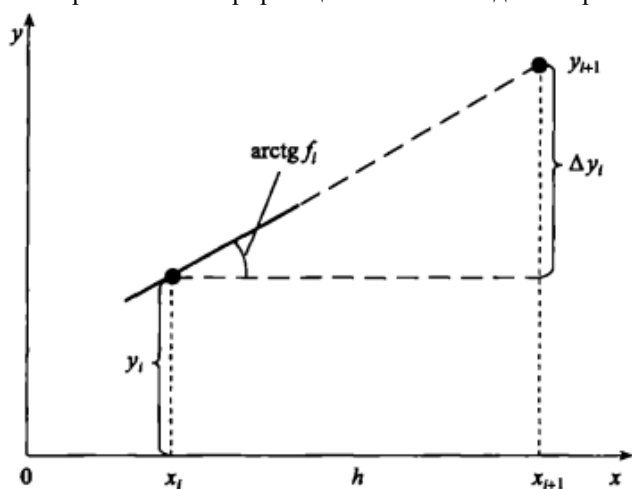
$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx.$$

К интегралу из правой части этого выражения можно применить формулу прямоугольников, тогда:

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$, $y_0 = y(x_0)$, $i = 0, 1, 2, \dots$
После исключения остаточных слагаемых имеем явную схему Эйлера (явный метод Эйлера первого порядка точности):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (13)$$

где $i = 0, n-1$. На рисунке 3 изображена геометрическая интерпретация явного метода Эйлера.



Р и с. 3. Метод Эйлера
F i g. 3. Euler's method

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \\ y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases} \quad (14)$$

При выборе шага $h = x_{i+1} - x_i$, по аналогии, получим явный метод Эйлера численного решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ (14):

$$\begin{cases} y_{1i+1} = y_{1i} + hf_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) + O(h^2), y_{10} = y_1(x_0), \\ y_{2i+1} = y_{2i} + hf_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) + O(h^2), y_{20} = y_2(x_0). \end{cases}$$

Можно видеть, что для систем ОДУ применение численной схемы имеет аналогичный характер.

Модификация метода Эйлера для многослойной рекуррентной нейронной сети

Далее опишем процедуру построения многослойной нейронной сети с использованием явного метода Эйлера. Рассматривается следующий временной интервал $t \in [t_0; t_*]$, где t_* это правая граница рассматриваемого отрезка переменной длины. Разобьем данный интервал $[t_0; t_*]$ на N промежутков.

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = t_*,$$

и применим к полученному разбиению итерационную формулу вида:

$$y_{i+1} = A(f, y_i, y_{i+1}, h_i, t_i), \quad (15)$$

где шаг h_i рассчитывается по формуле

$$h_i = t_{i+1} - t_i, \quad (16)$$

y_i – приближение к точному значению искомого решения, A – оператор, определяющий численный метод Эйлера.

В данной постановке шаг интегрирования и узловые точки численной сетки станут функциями, зависящими от времени $h_i = h_i(t)$, $y_i = y_i(t)$. В качестве приближённого решения используется $y_N(t, a)$, где a – вектор параметров, явным образом входящий в



приближённое решение. Значения искомых параметров находятся путём решения задачи минимизации функционала ошибки вида:

$$J(a) = \sum_{q=1}^l \|y_N(t_q^e, a) - y_q^e\|^2, \quad (17)$$

где t_q^e – вектор фиксированных моментов нагружения во время эксперимента, y_q^e – вектор фиксированных физических параметров ползучести, соответствующих фиксированным моментам нагружения во время эксперимента.

Для идентификации параметров модели ползучести применяются аналогичные операции для интервалов $[\omega_0; \omega]$ и $[\varepsilon_0; \varepsilon]$. Таким образом, решение задачи заключается в построении и минимизации функционала ошибки, определяющего отклонение модельных предсказаний от экспериментальных данных.

Вектора экспериментальных данных по деформации ползучести аугментируются наложением на экспериментальные точки нормально распределённого шума. Минимизация функционала осуществляется комбинацией метода сопряжённых градиентов Полака-Рибьера и метода имитации отжига. В процессе минимизации нейронная сеть находит минимальные отклонения от истинных значений параметров разрушения и фиксирует константы, соответствующие минимальному отклонению. Регуляризация функционала позволяет успешно решить задачу идентификации, делая получаемые результаты минимизации устойчивыми и близкими к воспроизводимому физическому процессу. Однако система дифференциальных уравнений, описывающая процесс разрушения, остаётся по-прежнему плохо обусловленной в окрестности момента разрушения экспериментальных образцов, что создаёт сложности при вычислении во всей области разрушения и лишает модель определённой строгости и точности. Рассмотрим предлагаемый подход для решения этой сложности.

Метод длины дуги

При детальном рассмотрении системы (1):

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma^n}{\omega^\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma^k}{\omega^\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}, \end{cases}$$

Легко видеть, что при $\omega \rightarrow 0$, возникает неопределённость, типа:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow \infty, \quad \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \infty,$$

при $\omega \rightarrow 1$, аналогично:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow \infty, \quad \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \infty,$$

С целью исключения плохой обусловленности предлагается замена независимой переменной: вместо интегрирования по времени t осуществляется интегрирование по аргументу специального вида κ . Решение задачи в этом случае проводится с применением метода продолжения по аргументу κ .

Соответствующее выражение для аргумента κ , полученное на основе геометрических соображений и теоремы Пифагора, представлено ниже:

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\omega^\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}\right)^2 \quad (18)$$

Теперь, получив параметр, разделим обе части выражения (18) на $(dt)^2$:

$$\left(\frac{d\kappa}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega^{2\alpha}(1-\omega^{\alpha+1})^{2m}}\right)^2 \quad (19)$$

Тогда

$$\frac{d\kappa}{dt} = \pm \frac{\omega^\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}} \quad (20)$$

Знак в выражении (20) зависит от того, какое у нас направление движения по кривой. Примем его со знаком плюс. С учётом выражений (18) и (20) система уравнений (1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{A\sigma^n}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B\sigma^k}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha(1-\omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}} \end{cases} \quad (21)$$

Теперь задача сводится к решению системы уравнений (21) с начальными условиями (2). Преимущество системы дифференциальных уравнений (21) над системой (1) заключается в отсутствии сингулярности. Это позволяет обойти особые точки, возникающие в процессе решения дифференциального уравнения, что обеспечивает возможность корректно применять различные численные схемы, с чем возникали сложности в работах [2], [12].

Построение слоёв нейронной сети

Рассмотрим второе уравнение системы (21), описывающего повреждённость стержня:

$$\frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B\sigma^k}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}} \quad (22)$$

Введём разбиения по которым будет происходить численное дифференцирование:

$$\kappa_i = i \frac{\kappa}{N}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_i = i \frac{\varepsilon}{N}, \quad (24)$$

$$\omega_i = i \frac{\omega}{N}, \quad (25)$$

$$t_i = i \frac{t}{N}, \quad (26)$$

Применяя описанную явную схему Эйлера в модификации А.Н. Васильева и Д.А. Тархова к уравнению (22) для идентификации характеристик ползучести в задаче растяжения образцов из стали 45 имеем:

$$\omega_{i+1} - \omega_i = (\kappa_{i+1} - \kappa_i) \frac{B\sigma^k}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}, \quad (27)$$

где $(\kappa_{i+1} - \kappa_i)$ шаг численного интегрирования.

Подставляя (23) и (25) в (27), получим выражение

$$\omega(B, A, \sigma, n, k, \omega) = \kappa \frac{B\sigma^k}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}. \quad (28)$$



Из выражения (28) можно получить выражение для κ :

$$\kappa = \omega \frac{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}{B\sigma^k}. \quad (29)$$

Аналогично рассмотрим первое уравнение системы (21), описывающего изменение деформации ползучести ε :

$$\frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{A\sigma^n}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}. \quad (30)$$

Используя описанную явную схему Эйлера к уравнению (30) для задачи идентификации характеристик ползучести образцов из стали 45 получим:

$$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = (\kappa_{i+1} - \kappa_i) \frac{A\sigma^n}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}. \quad (31)$$

Применяя (23) и (24) к (31) получим выражение:

$$\varepsilon(B, A, \sigma, n, k, \omega) = \kappa \frac{A\sigma^n}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}. \quad (32)$$

Рассмотрим третье уравнение системы дифференциальных уравнений (21), описывающее время процесса разрушения образца:

$$\frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha (1-\omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}. \quad (32)$$

Для этого уравнения также применим численную схему Эйлера:

$$t_{i+1} - t_i = (\kappa_{i+1} - \kappa_i) \frac{\omega_i^\alpha (1-\omega_i^{\alpha+1})^m}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}, \quad (33)$$

Подставим (23), (25) и (26) в (33), получим выражение, суммируя по i :

$$t = \frac{\kappa}{N^{(\alpha+1)(m+1)} \sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}} \sum_{i=0}^{N-1} (\omega_i)^\alpha (N^{\alpha+1} - (\omega_i)^{\alpha+1})^m, \quad (34)$$

Тогда, подставляя выражение (29) в (34) функция многих переменных для деформации ползучести будет иметь вид:

$$t(B, A, \sigma, n, k, \omega, m, \alpha) = \omega \frac{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}}{B\sigma^k} \cdot \frac{1}{N^{(\alpha+1)(m+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(A\sigma^n)^2+(B\sigma^k)^2}} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (\omega_i)^\alpha (N^{\alpha+1} - (\omega_i)^{\alpha+1})^m \quad (35)$$

Поскольку материальные константы явным образом присутствуют в выражениях (28), (32) и (35), процедура идентификации заключается в построении функционала ошибки и решении задачи его минимизации. В результате аппроксимации экспериментальных данных аналитическим решением были получены следующие функционалы:

$$J_1 = [\omega - \varepsilon(B, A, \sigma, n, k, \omega)]^2, \quad (36)$$

Т а б л и ц а 5. Параметры модели, описываемой задачи (1)-(2) в совокупности с параметрами модели [1]
Table 5. Parameters of the model describing problem (1)-(2), together with the model parameters [1]

σ_0 , МПа	A , МПа $^{-n}ч^{-1}$	B , МПа $^{-k}ч^{-1}$	n	k	α	m
Результаты статьи [1]						
35	$3.588 \cdot 10^{-15}$	$3.488 \cdot 10^{-13}$	8.1	6.97	0.849	2.83
40						
45						
50						
Результаты решения задачи (43)-(44)						
35	$8.704 \cdot 10^{-15}$	$7.74 \cdot 10^{-13}$	7.758	6.69	0.957	3.517
40						
45						
50						

$$J_2 = [\varepsilon - \varepsilon(B, A, \sigma, n, k, \omega)]^2, \quad (37)$$

$$J_3 = [t - t(B, A, \sigma, n, k, \omega, m, \alpha)]^2, \quad (38)$$

Объединим три функции (36), (37) и (38) и объединим их в общее выражение:

$$F_\sigma = J_1 + J_2 + J_3, \quad (39)$$

Материальные константы получим в результате минимизации функции. Применяя описанную выше методику была выбрана сумма квадратов ошибок (SSE) между экспериментальными и аналитическими значениями поврежденности и деформации ползучести вида:

$$J(\alpha, m, k, n, B_\varepsilon, B_\omega) = \delta_1 \sum_{q=1}^{l_1} F_{35}^2(\varepsilon_q^{35}, \omega_q^{35}, t_q^{35}, \alpha, m, k, n, B_\varepsilon, B_\omega, 35) + \delta_2 \sum_{q=1}^{l_2} F_{40}^2(\varepsilon_q^{40}, \omega_q^{40}, t_q^{40}, \alpha, m, k, n, B_\varepsilon, B_\omega, 40) + \delta_3 \sum_{q=1}^{l_3} F_{45}^2(\varepsilon_q^{45}, \omega_q^{45}, t_q^{45}, \alpha, m, k, n, B_\varepsilon, B_\omega, 45) + \delta_4 \sum_{q=1}^{l_4} F_{50}^2(\varepsilon_q^{50}, \omega_q^{50}, t_q^{50}, \alpha, m, k, n, B_\varepsilon, B_\omega, 50) \rightarrow \min, \quad (40)$$

где на значения материальных констант накладывается ограничение типа неравенств:

$$\alpha > 0, m > 0, k > 0, n > 0, B_\omega > 0, B_\varepsilon > 0, \quad (41)$$

В данном случае $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ – штрафные множители. Таким образом, перед нами стоит задача минимизации (40)-(41). Штрафные множители принимают значения:

$$\delta_1 = 7.103 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_2 = 7.032 \cdot 10^{-4}, \\ \delta_3 = 7.173 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_4 = 7.314 \cdot 10^{-4}.$$

Для регуляризации задачи минимизации (40)-(41) использовалась идея метода имитации отжига, согласно которой на имеющиеся экспериментальные точки накладывается шум $\epsilon \sim N(0, 0.05)$.

Численные результаты расчёта нейронной сети

Для обучения нейронной сети применялся метод сопряжённых градиентов Полака-Рибьера. Обучение проводилось при разбиении $N = 100$. После завершения процесса обучения нейронная сеть сошлась к набору констант, представленному в таблице 5. В таблицах 5 и 6 приводятся значения материальных констант ползучести из статей [1], [2] и текущего численного эксперимента. В таблице 6 приводятся значения материальных констант из статьи [2].



Т а б л и ц а 6. Параметры модели полученные в статье [2]
T a b l e 6. Model parameters obtained in the article [2]

σ_0 , МПа	$A \cdot \sigma_0^n, \text{ч}^{-1}$	$B \cdot \sigma_0^k, \text{ч}^{-1}$	α	m
35	0.0079387	0.0156534	0.9468	3.8725
40	0.03982844	0.061904	0.806	1.966
45	0.1602613	0.2551528	0.2971	1.4793
50	—	—	—	—

Конечное значение целевого функционала $J^* = 0.019$ существенно ниже результатов, полученных в исследованиях [2], [16], что, на первый взгляд, демонстрирует существенно лучшую сходимость с экспериментальными данными по сравнению с ранее применявшимися подходами к решению обратной задачи идентификации материальных констант. Для комплексной оценки адекватности идентифицированной модели был выполнен статистический анализ отклонений расчетных данных от экспериментальных значений, включающий как качественную, так и количественную оценку точности предложенной методики.

Для оценки точности аппроксимации были рассчитаны следующие метрики для полей поврежденности и деформации ползучести для каждого i -го измеренного экспериментального значения:

1. Абсолютное отклонение, согласно [17], [18]:

$$\Delta\omega_i = |\omega_i^e - \omega_i|, \quad (42)$$

где $\Delta\omega_i$ – абсолютное отклонение поврежденности, ω_i^e – экспериментальное значение поврежденности, ω_i – аналитическое значение поврежденности, рассчитанное по выражению (4);

$$\Delta\epsilon_i = |\epsilon_i^e - \epsilon_i|, \quad (43)$$

где $\Delta\epsilon_i$ – абсолютное отклонение поврежденности, ϵ_i^e – экспериментальное значение поврежденности, ϵ_i – аналитическое значение поврежденности, рассчитанное по выражению (7);

2. Относительное отклонение согласно [17], [18]:

$$\delta\omega_i = \frac{|\omega_i - \omega_i^e|}{|\omega_i^e|} \cdot 100\%, \quad (44)$$

где $\delta\omega_i$ – относительное отклонение поврежденности;

$$\delta\epsilon_i = \frac{|\epsilon_i - \epsilon_i^e|}{|\epsilon_i^e|} \cdot 100\%, \quad (45)$$

где $\delta\epsilon_i$ – относительное отклонение поврежденности;

Данная метрика безразмерна и поэтому позволяет оценить точность в процентах независимо от масштаба данных

3. Среднее Арифметическое отклонение (*Mean Absolute Error, MAE*) абсолютного отклонения, согласно [19], [20], [21]:

$$MAE(\Delta\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i}{n}, \quad (46)$$

где $MAE(\Delta\omega)$ – Среднее Арифметическое отклонение абсолютного отклонения поврежденности, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i$;

$$MAE(\Delta\epsilon) = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\epsilon_i}{n}, \quad (47)$$

где $MAE(\Delta\epsilon)$ – Среднее Арифметическое отклонение абсолютного отклонения деформации ползучести, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \Delta\epsilon_i$;

$$MAE(\delta\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta\omega_i}{n}, \quad (48)$$

где $MAE(\delta\omega)$ – Среднее Арифметическое отклонение относительного отклонения поврежденности, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \delta\omega_i$;

$$MAE(\delta\epsilon) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta\epsilon_i}{n}, \quad (49)$$

где $MAE(\delta\epsilon)$ – Среднее Арифметическое отклонение относительного отклонения деформации ползучести, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \delta\epsilon_i$;

4. Медиана абсолютных отклонений и медиана относительных отклонений

Для оценки абсолютных и относительных отклонений медиана абсолютных ошибок предоставляет робастную оценку центральной тенденции разброса, не зависящую от редких, но значительных промахов модели. Это позволяет более адекватно судить о типичной точности предсказаний в условиях зашумленных данных. В случае анализа относительных отклонений медиана относительной отклонений демпфирует эффект от резких всплесков неточности на объектах с малыми значениями целевой переменной, где даже незначительная абсолютная погрешность может приводить к аномально высоким процентным расхождениям.

Рассчитывается медиана как среднее значение вектора отклонений от эксперимента в каждый фиксированный момент эксперимента

Таким образом, использование медианы в качестве дополняющей метрики дает устойчивую и объективную картину адекватности модели, фокусируясь на характеристиках основной массы данных, а не на единичных артефактах.

5. Среднеквадратическое отклонение (*Standart Deviation, SD*), согласно [19-21]:

$$\sigma(\Delta\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta\omega_i - MAE(\Delta\omega))^2}{n}}, \quad (50)$$

где $\sigma(\Delta\omega)$ – среднеквадратическое отклонение выборки абсолютных отклонений поврежденности;

$$\sigma(\Delta\epsilon) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta\epsilon_i - MAE(\Delta\epsilon))^2}{n}}, \quad (51)$$

где $\sigma(\Delta\epsilon)$ – среднеквадратическое отклонение выборки абсолютных отклонений деформации ползучести;

$$\sigma(\delta\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta\omega_i - MAE(\delta\omega))^2}{n}}, \quad (52)$$

где $\sigma(\delta\omega)$ – среднеквадратическое отклонение выборки относительных отклонений поврежденности;

$$\sigma(\delta\epsilon) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta\epsilon_i - MAE(\delta\epsilon))^2}{n}}, \quad (53)$$

где $\sigma(\delta\epsilon)$ – среднеквадратическое отклонение выборки относительных отклонений деформации ползучести;

6. Среднеквадратичная ошибка (*Mean Squared Error, MSE*), согласно [19], [20], [21]:



$$MSE(\Delta\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i^2}{n}, \quad (54)$$

где $MSE(\Delta\omega)$ – Среднеквадратичная ошибка абсолютного отклонения повреждённости, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \Delta\omega_i^2$;

$$MSE(\Delta\epsilon) = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\epsilon_i^2}{n}, \quad (55)$$

где $MSE(\Delta\epsilon)$ – Среднеквадратичная ошибка абсолютного отклонения деформации ползучести, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \Delta\epsilon_i^2$;

$$MSE(\delta\omega) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta\omega_i^2}{n}, \quad (56)$$

где $MSE(\delta\omega)$ – Среднеквадратичная ошибка относительного отклонения повреждённости, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \delta\omega_i^2$;

$$MSE(\delta\epsilon) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta\epsilon_i^2}{n}, \quad (57)$$

где $MSE(\delta\epsilon)$ – Среднеквадратичная ошибка относительного отклонения деформации ползучести, n – число элементов суммы $\sum_{i=1}^n \delta\epsilon_i^2$;

7. Корень из среднеквадратичной ошибки (Root Mean Squared Error, RMSE), согласно [19], [20], [21]:

$$RMSE(\Delta\omega) = \sqrt{MSE(\Delta\omega)}, \quad (58)$$

где $RMSE(\Delta\omega)$ – Корень из среднеквадратичной ошибки абсолютного отклонения повреждённости;

$$RMSE(\Delta\epsilon) = \sqrt{MSE(\Delta\epsilon)}, \quad (59)$$

где $RMSE(\Delta\epsilon)$ – Корень из среднеквадратичной ошибки абсолютного отклонения деформации ползучести;

$$RMSE(\delta\omega) = \sqrt{MSE(\delta\omega)}, \quad (60)$$

где $RMSE(\delta\omega)$ – Корень из среднеквадратичной ошибки относительного отклонения повреждённости;

$$RMSE(\delta\epsilon) = \sqrt{MSE(\delta\epsilon)}, \quad (61)$$

где $RMSE(\delta\epsilon)$ – Корень из среднеквадратичной ошибки относительного отклонения деформации ползучести;

Основные данные о процессе деформации даны в таблице 7, где $\delta\epsilon^*$, $\delta\omega^*$, δt^* – относительные отклонения модельных значений деформации ползучести, повреждённости в момент разрушения и длительность разрушения соответственно от экспериментальных значений, t_n – время счёта, J^* – полученное значение функционала ошибки. Значение повреждённости в момент разрушения принимается равным единице.

Т а б л и ц а 7. Основные данные о процессе деформации
Table 7. Basic data on the deformation process

	результаты	t^* , ч	ω^*	δt^* , %	$\delta\epsilon^*$, %	$\delta\omega^*$, %	J^*	t_n , с
35 МПа	Параметры [1]	7.00057	1	4.391	18.839	26.722	–	–
	Параметры [2]	6.7348		0.43	1.73	47.956	$4.691 \cdot 10^5$	934
	Задача (40)–(41)	6.82518		1.775	25.781	23.33	0.019	44
	Эксперимент [1]	6.7061		–	–	–	–	–
40 МПа	Параметры [1]	2.76013	1	7.365	28.375	30.003	–	–
	Параметры [2]	3.0158		1.21	0.47	43.374	$12.517 \cdot 10^5$	762
	Задача (40)–(41)	2.7914		6.316	33.673	30.96	0.019	44
	Эксперимент [1]	2.9796		–	–	–	–	–
45 МПа	Параметры [1]	1.2145	1	0.816	16.644	16.125	–	–
	Параметры [2]	1.2187		0.47	0.82	62.163	$17.16 \cdot 10^5$	973
	Задача (40)–(41)	1.2686		3.602	25.678	27.917	0.019	44
	Эксперимент [1]	1.2245		–	–	–	–	–
50 МПа	Параметры [1]	0.58273	1	3.462	22.734	24.107	–	–
	Параметры [2]	–		–	–	–	–	–
	Задача (40)–(41)	0.62654		3.796	26.888	28.293	0.019	44
	Эксперимент [1]	0.6036		–	–	–	–	–

В таблицах 8 и 9 представлены основные данные об абсолютных отклонениях повреждённости и деформации ползучести, рассчитанные по формулам (42), (43), (46), (47), (50) и (51). Аналитические значения повреждённости и деформации ползучести получены по формулам (5), (10). Абсолютная погрешность является простой в вычислении и устойчивой к выбросам мерой оценки модели.

Однако при анализе качества построенной модели недостаточно абсолютного отклонения. Относительная погрешность показывает ошибку в процентах (или долях) от истинного значения. Эта мера позволяет адекватно оценить качество модели при широком диапазоне изменения переменной. В таблицах 10 и 11

представлены основные данные об относительных отклонениях повреждённости и деформации ползучести, рассчитанные по формулам (44), (45), (48), (49), (52) и (53). Аналитические значения повреждённости и деформации ползучести получены по формулам (5), (10).

Подсчитанные MSE и RMSE для построенной модели представлены в таблице 12.

Также в результате моделирования были построены кривые ползучести для интервала напряжений $\sigma_0 \in [35 \text{ МПа}; 55 \text{ МПа}]$. Кривые представлены на рисунках 4 и 5. В статье [1] были рассчитаны константы только для интервала $\sigma_0 \in [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$.



Т а б л и ц а 8. Абсолютные отклонения повреждённости от эксперимента

Table 8. Absolute deviations of damage from the experimental data

	Результаты	$\Delta\omega_{max}$	$MAE(\Delta\omega)$	$\Delta\omega_{med}$	$\sigma(\Delta\omega)$
35 МПа	Параметры [1]	0.267	0.034	0.017	0.066
	Задача (43)–(44)	0.233	0.031	0.016	0.057
40 МПа	Параметры [1]	0.3	0.082	0.028	0.099
	Задача (43)–(44)	0.31	0.073	0.022	0.1
45 МПа	Параметры [1]	0.161	0.056	0.041	0.05
	Задача (43)–(44)	0.279	0.089	0.072	0.074
50 МПа	Параметры [1]	0.241	0.092	0.082	0.068
	Задача (43)–(44)	0.283	0.123	0.113	0.083

Т а б л и ц а 9. Абсолютные отклонения деформации ползучести от эксперимента

Table 9. Absolute deviations of creep deformation from the experimental data

	Результаты	$\Delta\varepsilon_{max}$	$MAE(\Delta\varepsilon)$	$\Delta\varepsilon_{med}$	$\sigma(\Delta\varepsilon)$
35 МПа	Параметры [1]	0.097	0.027	0.02	0.022
	Задача (43)–(44)	0.133	0.019	0.016	0.057
40 МПа	Параметры [1]	0.175	0.064	0.042	0.06
	Задача (43)–(44)	0.207	0.05	0.022	0.1
45 МПа	Параметры [1]	0.105	0.074	0.073	0.018
	Задача (43)–(44)	0.163	0.052	0.072	0.074
50 МПа	Параметры [1]	0.163	0.067	0.055	0.05
	Задача (43)–(44)	0.193	0.084	0.076	0.083

Т а б л и ц а 10. Относительные отклонения повреждённости от эксперимента

Table 10. Relative deviations of damage from the experimental data

	Результаты	$\delta\omega_{max}$	$MAE(\delta\omega)$	$\delta\omega_{med}$	$\sigma(\delta\omega)$
35 МПа	Параметры [1]	41.235	8.138	4.76	11.214
	Задача (43)–(44)	47.195	8.443	4.262	12.187
40 МПа	Параметры [1]	79.385	18.566	9.086	22.665
	Задача (43)–(44)	81.625	17.488	8.79	23.623
45 МПа	Параметры [1]	906.161	91.752	8.334	247.019
	Задача (43)–(44)	911.277	95.492	12.724	247.13
50 МПа	Параметры [1]	235.674	41.845	16.694	69.966
	Задача (43)–(44)	223.321	44.257	23.716	64.344

Т а б л и ц а 11. Относительные отклонения деформации ползучести от эксперимента

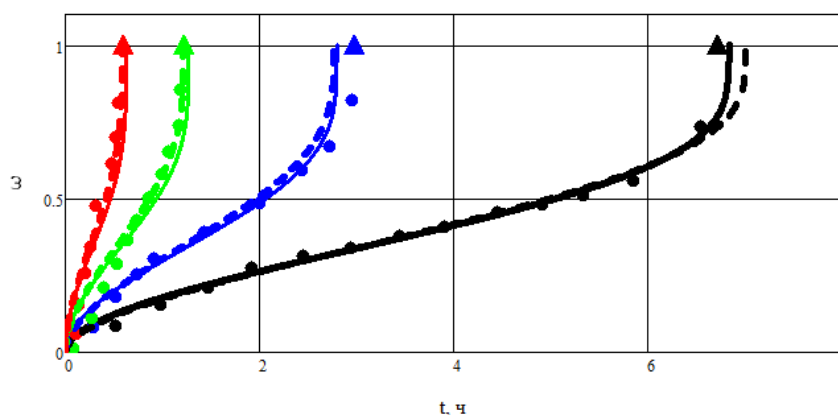
Table 11. Relative deviations of creep deformation from the experimental data

	Результаты	$\delta\varepsilon_{max}$	$MAE(\delta\varepsilon)$	$\delta\varepsilon_{med}$	$\sigma(\delta\varepsilon)$
35 МПа	Параметры [1]	56.428	14.814	11.874	12.694
	Задача (43)–(44)	42.489	8.977	5.008	11.101
40 МПа	Параметры [1]	93.701	24.67	17.791	24.958
	Задача (43)–(44)	69.938	18.191	9.111	19.653
45 МПа	Параметры [1]	$1.106 \cdot 10^{-3}$	124.592	20.363	298.047
	Задача (43)–(44)	942.684	97.94	13.119	256.019
50 МПа	Параметры [1]	300.716	53.716	20.193	90.45
	Задача (43)–(44)	229.655	44.471	22.222	66.593

Т а б л и ц а 12. Метрики ошибок для решения задачи минимизации (40)–(41)

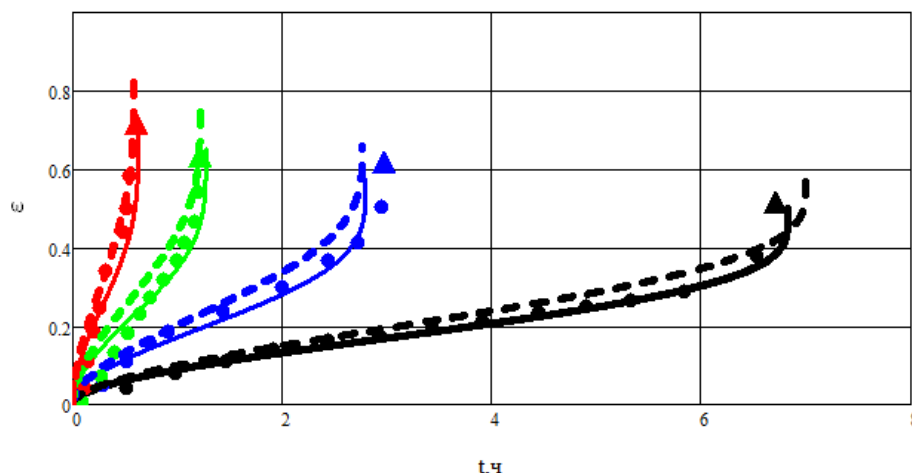
Table 12. Error metrics for the solution of the minimization problem (40)–(41)

	$MSE(\Delta\omega)$	$MSE(\Delta\varepsilon)$	$MSE(\delta\omega)$	$MSE(\delta\varepsilon)$	$RMSE(\Delta\omega)$	$RMSE(\Delta\varepsilon)$	$RMSE(\delta\omega)$	$RMSE(\delta\varepsilon)$
35 МПа	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	0.022	0.02	6.502	3.743	14.826	14.276
40 МПа	0.05	$6.41 \cdot 10^{-3}$	0.086	0.072	22.28	8.005	29.392	26.78
45 МПа	0.06	$4.61 \cdot 10^{-3}$	7.049	7.514	24.573	6.789	265.504	274.113
50 МПа	0.096	0.032	0.61	0.683	31.006	17.93	78.095	82.641



Р и с. 4. Кривые поврежденности для интервала напряжений $\sigma_0 \in [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$. Точки – данные эксперимента, треугольник – момент разрушения для каждого уровня напряжения, непрерывные линии – модельные данные, соответствующие решению задачи (40)-(41), пунктирная линия – модельные данные, соответствующие модели из статьи [2].

Fig. 4. Damage curves for the stress interval $\sigma_0 \in [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$. The points represent experimental data; the triangle indicates the failure moment for each stress level; the solid lines represent the model data corresponding to the solution of problem (40)-(41); the dashed line represents the model data corresponding to the model from article [2].



Р и с. 5. Кривые деформации ползучести для интервала напряжений $\sigma_0 \in [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$. Точки – данные эксперимента, треугольник – момент разрушения для каждого уровня напряжения, непрерывные линии – модельные данные, соответствующие решению задачи (40)-(41), пунктирная линия – модельные данные, соответствующие модели из статьи [2].

Fig. 5. Creep deformation curves for the stress interval $\sigma_0 \in [35 \text{ МПа}; 50 \text{ МПа}]$. The points represent experimental data; the triangle indicates the failure moment for each stress level; the solid lines represent the model data corresponding to the solution of problem (40)-(41); the dashed line represents the model data corresponding to the model from article [2].

Выводы

В рамках настоящего исследования была предложена и проанализирована методика, сочетающая метод продолжения решения по параметру [22] с архитектурой многослойной нейронной сети [2, 13, 23]. Решение задачи условной минимизации (40)-(41) позволило достичь значения целевого функционала $J^* = 0.019$. Полученный результат свидетельствует о достижении уровня аппроксимации, который можно считать удовлетворительным для решения ряда прикладных инженерных задач.

Качественный анализ графиков эволюции поврежденности (Рисунок 4) и деформации ползучести (Рисунок 5) позволяет выявить ряд закономерностей. Для уровней напряжения 35 МПа и 40 МПа наблюдается удовлетворительное соответствие между расчетными и экспериментальными данными, при этом

максимальные абсолютные отклонения оказываются ниже, чем в модели-аналоге [1]. Это свидетельствует о приемлемой точности модели в данной области нагружения. Однако с ростом напряжения до более высоких значений отмечается прогрессирующее увеличение как абсолютных, так и относительных погрешностей. Полученные относительные ошибки существенно превышают аналогичные показатели для моделей [1] и [2]. На основании этого можно заключить, что достигнутый выигрыш в преодолении плохой обусловленности исходной системы уравнений (1) сопровождается компромиссом в виде снижения общей точности модели.

Важным положительным аспектом является снижение медианного значения ошибки. Согласно сложившейся практике в области машинного обучения, данный факт интерпретируется как показатель повышения робастности нейронной сети. Таким образом, несмотря



на наличие значительных выбросов, основная часть результатов численного моделирования демонстрирует более близкое соответствие экспериментальным данным, что указывает на перспективность выбранного подхода при условии дальнейшей работы с аномалиями. Проведенное исследование позволяет заключить, что полученная модель демонстрирует недостаточную точность, о чем свидетельствует значение среднеквадратической ошибки (RMSE), существенно превышающее порог в 0.3. Дополнительным индикатором проблемных зон модели является тот факт, что величина RMSE значительно превосходит значение MSE, что указывает на наличие в данных аномальных наблюдений (выбросов), существенно влияющих на ошибку предсказания. В связи с этим, представленная модель требует дальнейшего углубленного исследования.

Перспективным направлением для повышения ее адекватности является анализ и разработка методов минимизации влияния выбросов. Кроме того, для увеличения точности идентификации параметров целесообразно рассмотреть альтернативные подходы. В частности, возможно применить элементы теории наилучшей параметризации Е.Б. Кузнецова и В.И. Шалашилина [22, 24] для выбора иного параметра. Возможно иной параметр позволит получить более близкое к истине решение. Также представляется необходимым использование более совершенных и робастных методов оптимизации [25], поскольку в рамках данного исследования задача минимизации (40)-(41) решалась лишь одним численным методом, что могло привести к нахождению локального, а не глобального минимума функционала ошибки.

Список использованных источников

1. Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5, № 2. С. 17-22. EDN: KWOROR
2. Vasilyev A., Kuznetsov E., Leonov S., Tarkhov D. Comparison of Neural Network and Multilayered Approach to the Problem of Identification of the Creep and Fracture Model of Structural Elements Based on Experimental Data // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science ; ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. Vol. 1201. Cham: Springer, 2020. P. 319-334. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_25
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Lahaye M. E. Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Comptes rendus hebdomadaires des seances de L'Academie des sciences. 1934. Vol. 198, No. 21. P. 1840-1842.
5. Lahaye M. E. Solution of system of transcendental equations // Académie royale de Belgique. Bulletin de la Classe des sciences. 1948. Vol. 5. P. 805-822.
6. Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Решение задачи Коши для жестких систем с гарантированной точностью методом длины дуги // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 7. С. 3-18. EDN: TFRUMB
7. Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Гарантированная точность при решении задачи Коши методом длины дуги // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 5. С. 499-502. <https://doi.org/10.7868/s086956521330004x>
8. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Цапко Е. Д. Параметризация задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с контрастными структурами // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 4. С. 486-510. <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.486-510>
9. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 6. С. 914-933. <https://doi.org/10.7868/S0044466918060066>
10. Кузнецов Е. Б. Параметризация краевых задач и прохождения точек бифуркации. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
11. Леонов С. С., Языков А.А. Применение модифицированного наилучшего аргумента при расчете установившегося напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков в условиях ползучести // Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ'2020). Москва: МАИ, 2020. С. 304-306. EDN: LSYJCS
12. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Языков А. А. Метод идентификации моделей ползучести для больших интервалов напряжений с использованием полужемпирических нейронных сетей // Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. М.: ООО «ТРИП», 2024. С. 124-125. EDN: OAJGKB
13. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 158. Article number: 012061. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012061>
14. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging / A. N. Vasilyev [et al.] // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence ; ed. by B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. P. 138-146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21



15. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы : учеб. пособие для студентов техн. ун-тов / под ред. А. И. Кибзуна. Москва : Физматлит, 2004. 398 с. EDN: QJNPSN
16. Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Тархов Д. А. Многослойный метод идентификации характеристик ползучести в интервале напряжений для задачи разрушения металлов в условиях ползучести // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 4. С. 970-980. <https://doi.org/10.25559/SITITO.15.201904.970-980>
17. Taylor J. R. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. University Science Books, 1997. 327 p.
18. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover Publications, 2000. 1130 p.
19. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Prentice Hall, 1999. 842 p.
20. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. Information Science and Statistics. Springer-Verlag New York, 2006. 778 p.
21. Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G. Introduction to Linear Regression Analysis. John Wiley & Sons, 2012. 672 p.
22. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Издательская группа URSS, 1999. 224 с.
23. Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems // Optical Memory and Neural Networks Information Optics. 2005. Vol. 14, No. 2. P. 97-122.
24. Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
25. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах : Учебное пособие для студентов вузов. – 2-е изд., исправл. М.: Изд-во «Высшая Школа», 2005. 544 с. EDN: SBRJJP

References

1. Gorev B.V., Zakharova T.E., Klopotov I.D. On description of creep and fracture of the materials with non-monotonic variation of deformation-strength properties. *Physical Mesomechanics Journal*. 2002;5(2):17-22. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: KWOROR
2. Vasilyev A., Kuznetsov E., Leonov S., Tarkhov D. Comparison of Neural Network and Multilayered Approach to the Problem of Identification of the Creep and Fracture Model of Structural Elements Based on Experimental Data. In: Sukhomlin V., Zubareva E. (eds) Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1201. Cham: Springer; 2020. p. 319-334. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_25
3. Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members. In: Leckie F.A. (ed.). Amsterdam/London: North-Holland Publishing Company; 1969. 822 p.
4. Lahaye M.E. Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes. *Comptes rendus hebdomadaires des seances de L'Academie des sciences*. 1934;198(21):1840-1842.
5. Lahaye M.E. Solution of system of transcendental equations. *Académie royale de Belgique. Bulletin de la Classe des sciences*. 1948;5:805-822.
6. Kalitkin N.N., Poshivaylo I.P. Solving the Cauchy problem with guaranteed accuracy for stiff systems by the arc length method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2015;7:24-35. <https://doi.org/10.1134/S2070048215010044>
7. Kalitkin N.N., Poshivaylo I.P. Guaranteed accuracy for the Cauchy problem solved using the arc length method. *Doklady Mathematics*. 2013;88:601-604. <https://doi.org/10.1134/S1064562413050219>
8. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tsapko E.D. The Parametrization of the Cauchy Problem for Nonlinear Differential Equations with Contrast Structures. *Mordovia University Bulletin*. 2018;28(4):486-510. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.486-510>
9. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Examples of Parametrization of the Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations with Limiting Singular Points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018;58:881-897. <https://doi.org/10.1134/S0965542518060076>
10. Kuznetsov E.B. *Parametrizaciya kraevykh zadach i prohozhdeniya tochek bifurkacii* [Parametrization of Boundary Value Problems and Passage through Bifurcation Points]. Moscow: MAI-PRINT Publ. House; 2010. 160 p. (In Russ.)
11. Leonov S.S., Yazykov A.A. Application of the Modified Best Argument in Calculating the Steady-State Stress-Strain State of Rotating Disks under Creep Conditions. In: Proceedings of the 13th International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2020). Moscow: MAI; 2020. P. 304-306. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: LSYJCS
12. Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Yazykov A.A. Method for Identifying Creep Models for Large Stress Intervals Using Semi-Empirical Neural Networks. In: XXX International Symposium "Dynamic and Technological Problems of a



Mechanics of Constructions and Continuous Mediums" dedicated to A.G. Gorshkov. Moscow: TRP, 2024. P. 124-125. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: OAJGKB

13. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016;158:012061. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012061>
14. Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.S. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V. (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 736. Springer International Publishing; 2018. p. 138-146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21
15. Formalev V.F., Reviznikov D.L. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow: Fizmatlit; 2004. 398 p. (In Russ.) EDN: QJNPSN
16. Vasilyev A.N., Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A. A Multilayer Method for Identifying Creep Characteristics in the Stress Range for the Problem of Metals Creep Rupture. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2019;15(4):970-980. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.15.201904.970-980>
17. Taylor J.R. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. University Science Books; 1997. 327 p.
18. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover Publications; 2000. 1130 p.
19. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Prentice Hall; 1999. 842 p.
20. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. *Information Science and Statistics*. Springer-Verlag New York; 2006. 778 p.
21. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. Introduction to Linear Regression Analysis. John Wiley & Sons; 2012. 672 p.
22. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Springer Dordrecht; 2003. 228 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-2537-8>
23. Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems. *Optical Memory and Neural Networks Information Optics*. 2005;14(2):97-122.
24. Kuznetsov E.B. *Metod prodolzheniya resheniya i nailuchshaya parametrizatsiya* [The Method of Solution Continuation and the Best Parametrization]. Moscow: MAI-PRINT Publ. House; 2010. 160 p. (In Russ.)
25. Panteleyev A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization Methods in Examples and Problems]. Moscow: Vysshaya shkola; 2005. 544 p. (In Russ.) EDN: SBRJJP

Поступила 12.08.2025; одобрена после
рецензирования 16.09.2025; принята к публикации
29.09.2025.

Submitted 12.08.2025; approved after reviewing
16.09.2025; accepted for publication 29.09.2025.

Об авторах:

Кузнецов Евгений Борисович, профессор кафедры мехатроники и теоретической механики Института компьютерных наук и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), доктор физико-математических наук, профессор, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

Леонов Сергей Сергеевич, доцент кафедры мехатроники и теоретической механики Института компьютерных наук и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва,

About the authors:

Evgenii B. Kuznetsov, Professor of the Chair of Mechatronics and Theoretical Mechanics, School No. 8: Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

Sergey S. Leonov, Associate Professor of the Chair of Mechatronics and Theoretical Mechanics, School No. 8: Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation); Associate Professor of the Nikolsky Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6



Применение комбинации многослойной методологии построения полумпирической нейронной сети и метода продолжения решения по параметру для идентификации характеристик ползучести
Application of a combination of a multilayered methodology for building a semi-empirical neural network and a method for continuing the solution by parameter to identify creep characteristics

Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов,
А. А. Языков
E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov,
A. A. Yazykov

Волоколамское шоссе, д. 4); доцент Математического института им. академика С.М. Никольского, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), кандидат физико-математических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

Языков Александр Алексеевич, аспирант кафедры мехатроники и теоретической механики Института компьютерных наук и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-7732-2155>, anton199_999@mail.ru

Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

Alexander A. Yazykov, Postgraduate Student of the Chair of Mechatronics and Theoretical Mechanics, School No. 8: Information Technology and Applied Mathematics, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-7732-2155>, anton199_999@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

All authors have read and approved the final manuscript.