

Точный алгоритм вычисления долей бенефициарного владения в ориентированных графах на основе марковских цепей и сильно связанных компонент

А. М. Булкин^{1,2}

¹ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

² ООО «РСХБ-экосистема», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 119034, Российская Федерация, г. Москва, Гагаринский пер., д. 3

bulkin921@yandex.ru

Аннотация

Задача точного вычисления долей бенефициарного владения в крупномасштабных ориентированных графах с циклами является актуальной проблемой анализа корпоративных сетей. Существующие подходы либо не учитывают циклические структуры владения, либо имеют высокую вычислительную сложность, что делает их неприменимыми к реальным данным. В работе предложен новый алгоритм, сводящий задачу к последовательному вычислению персонализированного PageRank внутри сильно связанных компонент графа с последующей агрегацией результатов вдоль ациклической конденсации. Доказана корректность алгоритма и его линейная вычислительная сложность $O(m)$ по числу рёбер на этапе предобработки, что позволяет анализировать графы с десятками миллионов вершин и связей. Экспериментальная валидация проведена на реальных данных: глобальной базе ORBIS (40 млн записей), реестре лиц со значительным контролем Великобритании (PSC, 4 млн) и данных ФНС России (2 млн). Результаты подтверждают высокую точность и масштабируемость метода. Дополнительно исследованы структурные характеристики корпоративных графов (распределение размеров сильно связанных компонент, длина цепочек владения), влияющие на производительность алгоритма.

Ключевые слова: анализ корпоративных сетей, бенефициарное владение, PageRank, сильно связанные компоненты, ориентированные графы, марковские цепи, линейная сложность

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Булкин А. М. Точный алгоритм вычисления долей бенефициарного владения в ориентированных графах на основе марковских цепей и сильно связанных компонент // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2026. Т. 22, № 1. С. 163-170. <https://doi.org/10.25559/SITITO.022.202601.163-170>

© Булкин А. М., 2026



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



An Exact Algorithm for Computing Beneficial Ownership Shares in Directed Graphs Based on Markov Chains and Strongly Connected Components

A. M. Bulkin^{a,b}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Address: 1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation

^b RSHB Ecosystem, Moscow, Russian Federation

Address: 3 Gagarinsky Line, Moscow 119034, Russian Federation

bulkin921@yandex.ru

Abstract

The problem of accurately computing beneficial ownership shares in large-scale directed graphs with cycles is a relevant challenge in corporate network analysis. Existing approaches either fail to account for cyclic ownership structures or have high computational complexity, which makes them inapplicable to real-world data. This paper proposes a new algorithm that reduces the problem to the sequential computation of personalized PageRank within strongly connected components of a graph, followed by aggregation of the results along an acyclic condensation graph. The correctness of the algorithm is proved, as well as its linear computational complexity of $O(m)$ with respect to the number of edges at the preprocessing stage, which makes it possible to analyze graphs containing tens of millions of vertices and ownership links. Experimental validation was carried out on real-world data: the global ORBIS database with 40 million records, the United Kingdom People with Significant Control register with 4 million records, and data from the Federal Tax Service of Russia with 2 million records. The results confirm the high accuracy and scalability of the proposed method. In addition, the structural characteristics of corporate graphs, including the distribution of strongly connected component sizes and the length of ownership chains, are examined, as these characteristics affect the performance of the algorithm.

Keywords: corporate network analysis, beneficial ownership, PageRank, strongly connected components, directed graphs, Markov chains, linear complexity

Conflict of interests: The author declares no conflict of interests.

For citation: Bulkin A.M. An Exact Algorithm for Computing Beneficial Ownership Shares in Directed Graphs Based on Markov Chains and Strongly Connected Components. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2026;22(1):163-170. <https://doi.org/10.25559/SITITO.022.202601.163-170>



1 Введение

Задача точного вычисления долей косвенного владения в крупномасштабных ориентированных графах с циклами возникает при анализе корпоративных сетей, где вершины моделируют физических и юридических лиц, а взвешенные рёбра — доли прямого участия. Формально она сводится к вычислению стационарных распределений марковской цепи, задаваемой

транспонированной матрицей владения. Реальные графы содержат длинные цепочки посредников и циклы произвольной длины, что делает неприменимыми упрощённые эвристики, основанные на ограничении глубины поиска или удалении циклов: такие подходы приводят к неконтролируемым погрешностям и систематическим смещениям [1-3]. Существующие точные алгоритмы, использующие решение систем линейных уравнений или полный перебор, обладают кубической либо экспоненциальной сложностью и не масштабируются на сети с миллионами вершин, типичные для открытых реестров компаний (более $2 \cdot 10^8$ записей). В работе предложен алгоритм, который декомпозирует задачу: сначала вычисляется персонализированный PageRank внутри каждой сильно связной компоненты (SCC) графа, а затем результаты агрегируются вдоль ациклической конденсации. Установлена формальная связь с классической задачей PageRank, что позволяет привлекать быстрые итерационные методы с гарантированной сходимостью. Доказано, что алгоритм является точным, а его вычислительная сложность на этапе предобработки составляет $O(m)$, где m — число рёбер графа; время ответа на запрос для отдельной вершины пропорционально числу её конечных бенефициаров, которое на практике ограничено константой. Масштабируемость метода подтверждена экспериментами на трёх реальных наборах данных: глобальной базе ORBIS (40 млн записей), реестре Великобритании PSC (4 млн) и данных ФНС России (2 млн). Дополнительно исследованы структурные характеристики корпоративных графов (распределение размеров SCC, длина цепочек владения), которые определяют производительность алгоритма и представляют самостоятельный интерес с точки зрения анализа сложных сетей. Таким образом, основные результаты статьи включают формальную постановку задачи в терминах марковских цепей, новый алгоритм с линейной сложностью предобработки и его строгое обоснование, а также экспериментальную валидацию на реальных данных, демонстрирующую возможность обработки графов с десятками миллионов вершин [4].

2 Постановка задачи

Рассматривается корпоративная сеть, участниками которой являются юридические лица. Отношения владения моделируются ориентированным взвешенным графом:

$$G = \langle V, E \rangle$$

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество вершин (сущностей),
- $E \subseteq V \times V$ — множество ориентированных рёбер,
- каждое ребро $(i, j) \in E$ снабжено весом $\omega_{ij} \in (0, 1]$, обозначающим долю прямого владения, которую вершина i имеет в вершине j .

Если компания j не полностью принадлежит известным акционерам, т.е. $\sum_{i:(i,j) \in E} \omega_{ij} < 1$, то в граф добавляется фиктивная петля (j, j) с весом, дополняющим сумму до единицы. Таким образом, для всех вершин j , которые не являются терминальными источниками капитала, выполнено условие полноты владения.

$$\sum_{i \in V} \omega_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus S, \quad (1)$$

где $S \subseteq V$ — множество «источников» (вершин, которые сами не имеют владельцев, — обычно это физические лица или государства). Множество терминальных вершин (конечных бенефициаров) обозначим

$$T = \{i \in V \mid \text{из } i \text{ не исходит ни одного ребра владения}\}.$$

Определение 1 (конечный владелец). Вершина $i \in T$ называется *конечным владельцем* вершины j , если в графе G существует направленный путь из i в j .

Задача заключается в том, чтобы для произвольной запрашиваемой компании $q \in V$ найти всех её конечных владельцев и вычислить точные доли косвенного владения [5, 6].

Формализация долей владения. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица прямого владения, элементы которой

$$A_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij}, & (i, j) \in E, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица A является стохастической по столбцам для всех $j \notin S$: сумма элементов каждого такого столбца равна 1. Рассмотрим транспонированную матрицу

$$P = A^T.$$

Матрица P (стохастичная по строкам, то есть каждый элемент неотрицателен и сумма элементов в каждой строке матрицы равна 1) описывает случайное блуждание, которое из вершины j с вероятностью ω_{ij} переходит в её акционера i . Такие матрицы используются в разных физических системах, например как в работе [7]. Иными словами, P задаёт марковскую цепь, движущуюся *против* направления рёбер владения — от компаний к её акционерам [8].

Интуитивно, при таком блуждании долгое среднее время, проведённое в терминальной вершине i , и даёт долю владения i в стартовой компании. Формально, доля косвенного владения вершины i в вершине j определяется как

$$f_j(i) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K (P^t)_{ji} \quad (2)$$

Здесь $(P^t)_{ji}$ — вероятность оказаться в вершине i через t шагов блуждания, начатого из j . Определённый таким образом вектор $f_j = (f_j(1), \dots, f_j(n))$ совпадает со стационарным распределением марковской цепи [9], стартовой из j ; для эргодических компонент он также совпадает с вектором персонализированного PageRank матрицы P .

Таким образом, исходная задача сводится к эффективному вычислению предельных распределений марковской цепи P для больших разреженных графов, содержащих циклы произвольной длины [10]. Ключевые требования: время предобработки $O(m)$, где $m = |E|$, память $O(m)$ и константное (или пропорциональное размеру компоненты связности запрашиваемой вершины) время ответа на запрос [11].



3 Алгоритм

3.1 Редукция графа



Р и с. 1. Оранжевым цветом показаны вершины и рёбра графа владения, удаляемые при редукции. Синим цветом показаны вершины, сохраняемые при редукции.

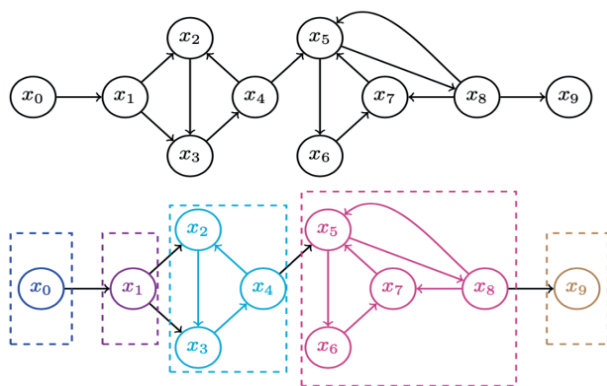
Fig. 1. The vertices and edges of the ownership graph that are removed during reduction are shown in orange. The vertices preserved during reduction are shown in blue.

Источник: здесь и далее в статье все таблицы и рисунки составлены автором.
Source: Hereinafter in this article all tables and figures were made by the author.

Опишем предлагаемый подход по шагам. Сначала каждая вершина (в том числе и в циклах), у которой исходящая и входящая степени не превышают 1.0, удаляется из цепочки вместе с инцидентными ей рёбрами; если вершина имела одно входящее и одно исходящее ребро, то она заменяется одним ребром. Рис. 1 иллюстрирует данное преобразование. Процедура повторяется итеративно до тех пор, пока в графе не останется вершин, у которых либо входящая, либо исходящая степень не превышает 1.0. При удалении пары рёбер новое ребро получает вес, равный произведению весов этих рёбер. Ключевое отличие от k -ядерной декомпозиции, часто применяемой на практике, состоит в возможности редукции вершин [26], находящихся в циклах владения.

3.2 Сильно связанные компоненты

Далее мы применяем алгоритм Тарьяна [12] для выделения сильно связанных компонент (SCC) [13] графа G , в каждой из которых любая вершина достижима из любой другой. Алгоритм работает за линейное время от числа рёбер и рекурсивно разбивает граф на сильно связанные компоненты, как показано на рис. 2.

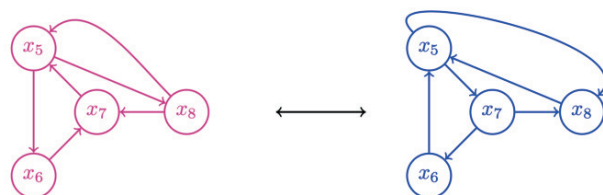


Р и с. 2. Алгоритм Тарьяна разбивает граф на сильно связанные компоненты, показанные разными цветами. Требуется $O(1)$ дополнительной памяти.

Fig. 2. Tarjan's algorithm decomposes the graph into strongly connected components, shown in different colors. $O(1)$ additional memory is required

3.3 Двойственность корпоративной сети и марковской цепи

Конечная марковская цепь задаётся ориентированным графом, в котором все вершины имеют исходящую степень единица (включая петли). Матрица смежности такого графа называется матрицей переходных вероятностей P . Эта матрица является стохастической по столбцам: все её столбцы имеют единичную сумму, а элементы неотрицательны. Стационарным распределением марковской цепи называют вектор π , удовлетворяющий $\pi P = \pi$. Если марковская цепь неразложима (т.е. из любого состояния можно достичь любого другого), то она обладает единственным стационарным распределением. Матрица смежности A корпоративной сети G , в свою очередь, является стохастической по строкам матрицей с неотрицательными элементами. Другими словами, транспонированная матрица A^T задаёт марковскую цепь. Рис. 3 иллюстрирует это преобразование.



Р и с. 3. Обращение ориентации рёбер превращает корпоративную сеть в марковскую цепь и наоборот

Fig. 3. Reversing the orientation of the edges transforms a corporate network into a Markov chain, and vice versa

3.4 PageRank: решение для сильно связанной компоненты

Для простоты будем считать, что каждая компания из сильно связанной компоненты, имеющая более одной входящей связи, на самом деле имеет входящую степень, равную 1, т.е. она полностью принадлежит компаниям из той же компоненты. Позднее мы откажемся от этого предположения. Доля x_{ij} участия сущности i в компании j внутри сильно связанной компоненты задаётся формальным рядом

$$x_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A^t)_{ij} \quad , \quad X = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^n \quad (1)$$

где $(A^t)_{ij}$ обозначает соответствующий элемент матрицы A^t . Заметим, что по теореме Перрона-Фробениуса указанный предел существует в смысле суммирования по Чезаро, старшее собственное значение матрицы смежности не превосходит 1, а сама матрица неотрицательна [14]. Более того, для неотрицательных матриц из теоремы Перрона-Фробениуса следует, что матрица X является матрицей ранга один: $X = 1v^T$, где 1 — вектор из всех единиц, отвечающий наибольшему собственному значению, а v удовлетворяет условию

$$vA = v \quad \Leftrightarrow \quad vP^T = v, \quad P = A^T. \quad (2)$$

Иными словами, v является вектором Google PageRank для матрицы A^T , который может быть вычислен за линейное время (с точностью до логарифмического множителя) [8]. Практически более эффективный подход описан в работе Аникина и др. [15, 16]. Подчёркнём, что сказанное справедливо только для сильно связанных компонент, поскольку они двойственны неразложимым марковским цепям.

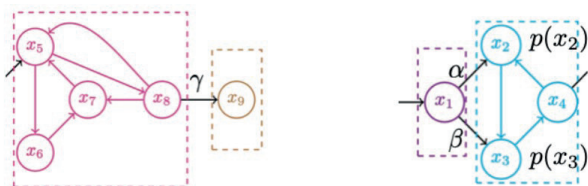


Наконец, чтобы избавиться от предположения о единичной входящей степени всех вершин, необходимо умножить матрицу X на диагональную матрицу входящих степеней D [17], где D_{ii} — входящая степень вершины $i \in V$, т.е. выполнить присваивание $X \leftarrow DX$.

3.5 Объединение решений для сильно связных компонент

Рис. 4 иллюстрирует способ склеивания компонент. Процесс начинается с терминальной связной компоненты, как показано на рисунке. Пусть x_k — вектор долей владения сущности k в других сущностях, т.е. $(x_k)_i$ — доля, которой k владеет в i . На рис. 4 (слева) показано склеивание двух компонент:

- Каждая сущность левой компоненты получает ту же долю в правой компоненте, какой она обладала в присоединённой к ней вершине. Формально: $x_k^9 = x_k^9 + \gamma x_8^9$, $5 \leq k \leq 8$.

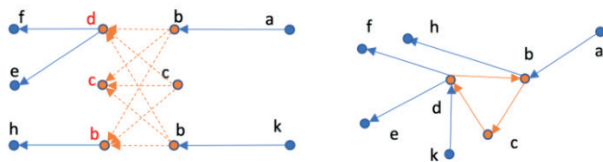


Р и с. 4. Склеивание сильно связных компонент
F i g. 4. Contracting strongly connected components

- Аналогично склеиваются компоненты слева. В этом случае $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$. Результирующая матрица корпоративного владения X уже не является матрицей ранга один и представляет собой точную матрицу владения, восстанавливаемую за время $\tilde{O}(m)$.

3.6 Построение эквивалентного графа

Дальнейший шаг состоит в эквивалентном преобразовании марковской цепи [18, 19], заменяющем компоненты сильной связности полными двудольными подграфами с сохранением долей владения. Для этого каждая компонента связности заменяется двудольным графом, как показано на рис. 5.



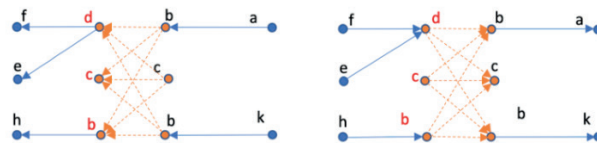
Р и с. 5. Нетривиальная компонента сильной связности (выделена оранжевым справа) описанным преобразованием превращается в полный двудольный граф с весами рёбер, равными вероятностям соответствующих переходов

F i g. 5. A nontrivial strongly connected component, highlighted in orange on the right, is transformed by the described procedure into a complete bipartite graph with edge weights equal to the probabilities of the corresponding transitions

После этого мы обращаем ориентацию рёбер графа, т.е. транспонируем полученную матрицу (распределение случайного блуждания), чтобы получить матрицу владения, как показано на рис. 6.

3.7 Построение таблицы для хранения цепочек

Вершины графа владения размечаются как терминальные и нетерминальные. Терминальной вершиной (редуцированного графа) называется любая вершина, входящая степень которой строго меньше 1.0. Такие вершины могут присутствовать как внутри компонент сильной связности, так и вне их. По построению все правые доли двудольных графов, заменяющих компоненты сильной связности, являются нетерминальными вершинами. Вершины же левой доли могут быть как терминальными, так и нетерминальными. Если вершина левой доли нетерминальна, мы добавляем дополнительную вершину так, чтобы суммарная входящая степень стала равна 1. Эта дополнительная вершина содержит долю собственного управления компании (менеджмента).



Р и с. 6. Обратное преобразование марковской цепи (слева) в граф владения (справа). Транспонированная матрица переходов даёт матрицу владения.

F i g. 6. The inverse transformation of a Markov chain on the left into an ownership graph on the right. The transposed transition matrix yields the ownership matrix.

Разбиение на терминальные и нетерминальные вершины требует $O(m+n)$ времени, где m — число рёбер графа, n — число вершин. По построению, только терминальные вершины могут быть конечными владельцами бизнеса, тогда как нетерминальные — нет. Затем для каждой вершины мы сохраняем её вес контроля, предков с указанием доли владения и признак терминальности. Исходный вес запрашиваемой вершины полагается равным 1, остальных — 0.

3.8 Поиск конечных владельцев

Когда хеш-таблица сформирована, можно приступить к поиску конечных владельцев:

- Помещаем запрашиваемую вершину в очередь. Если она находится в цикле, то помещаем вершину из правой доли.
- Для каждого предка обновляем вес вершины: $p_x \leftarrow p_x + p_y \cdot w$, где p_x — вес контроля вершины x , p_y — вес контроля вершины y , w — вес ребра между x и y .
- Добавляем всех предков этого предка в очередь; если предок терминальный, то добавляем его в список конечных владельцев.
- Вес вершины — искомая доля контроля.
- Когда все вершины обработаны, необходимо убедиться, что суммарная доля владения составляет 100%. Если это не так, нормируем каждое значение.



4 Численные эксперименты

4.1 Наборы данных и условия

Эксперименты проводились на трёх наборах данных:

- **ORBIS (Moody's)**: глобальная историческая база, 40 млн компаний (2016 г.).
 - **UK PSC**: реестр лиц со значительным контролем Великобритании, 4 млн записей.
 - **ФНС России**: открытые данные по российским юридическим лицам, 2 млн компаний (источник: habr.com).
- Эксперименты выполнялись на ПК (Python 3.7, MacBook Pro, 8 cores, 16 ГБ ОЗУ).

4.2 Результаты

Точность: Алгоритм точно идентифицировал конечных владельцев, включая сложные случаи с перекрёстным владением, в то время как методы Витали и Мизуно давали ошибку до 15–20% на циклах [21]. Производительность: Время предобработки (построение структур данных) линейно зависело от числа рёбер m [22, 23]. Время ответа на запрос для случайной компании в среднем составило менее 1 мс для российских данных и

3 мс для UK PSC (Рис. 9, 10).

Структурные находки:

1. Роль государственных фондов. Выявлен значительный рост косвенного владения китайского правительства через цепочки фондов и компаний-посредников в глобальной сети (ORBIS).
2. Сложность российских сетей. В российской выборке обнаружено относительно большое количество коротких циклов (2–3 вершины), что может указывать на специфику оптимизации налоговых и корпоративных рисков.
3. Концентрация контроля. На всех наборах данных подтверждается тренд к увеличению концентрации конечного контроля у узкого круга лиц и организаций, что коррелирует с ростом имущественного неравенства [24, 25].

4.3 Обсуждение ограничений и направления улучшений

1. Неполнота данных. Алгоритм точен только при наличии полной информации о всех долях владения. Пропуски в данных (например, владение через номинальных держателей) требуют интеграции с вероятностными или ML-моделями.

Таблица 1. Пример результатов алгоритма (выборка из данных ФНС России)
Table 1. Example algorithm results based on a sample from data of the Federal Tax Service of Russia

Компания	0714001578	0703008370	0703008500	0703008395	0703008300
0703008370	3.3776%	1.6178%	8.9330%	5.7751%	1.5736%
0703008500	22.4747%	10.7652%	4.7906%	38.4480%	10.4707%
...	...	...	...	...	...

2. Динамика сетей. Требуется эффективное обновление структур данных при изменении графа. Перспективным направлением является разработка инкрементальной версии алгоритма.

3. Качество российских данных. Открытые данные ФНС могут содержать ошибки и неполные сведения. Рекомендуется провести дополнительные эксперименты на верифицированных данных от партнёрских банков или регулятора для более точной оценки применимости в России.

4. Расширение анализа. Стоит добавить эксперименты по оценке устойчивости алгоритма к шуму в данных, а также по анализу временных рядов для изучения эволюции корпоративных сетей.

5 Заключение

В работе предложен новый алгоритм *Corporate PageRank* для точного и вычислительно эффективного определения долей косвенного владения в ориентированных графах произвольной структуры, включая графы с циклами. Ключевая идея состоит в декомпозиции исходной задачи: вычисление персонализированного PageRank внутри каждой сильно связной компоненты с последующей агрегацией результатов вдоль ациклической конденсации. Установленная двойственность между корпоративной сетью и марковской цепью позволяет использовать быстрые итерационные методы с гарантиро-

ванной сходимостью. Теоретически доказано, что алгоритм является точным и обладает линейной сложностью $O(m)$ на этапе предобработки (по числу рёбер графа) и практически константным временем ответа на запрос. Экспериментальная проверка на реальных данных большого объёма — глобальной базе ORBIS (40 млн записей), реестре Великобритании PSC (4 млн) и данных ФНС России (2 млн) — подтвердила высокую точность и масштабируемость метода. Эмпирически исследованы структурные характеристики корпоративных графов (распределение размеров сильно связанных компонент, длина цепочек владения), которые определяют производительность алгоритма и представляют интерес для анализа сложных сетей.

Перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой инкрементальной версии алгоритма, способной эффективно обрабатывать потоковые обновления графа без полного пересчёта. Другим направлением является интеграция с методами машинного обучения для восстановления неполных или зашумлённых данных о владении, что позволит применять подход к реальным реестрам с пропусками. Наконец, углублённый анализ временных срезов корпоративных сетей открывает возможности для создания динамических моделей и алгоритмов, адаптирующихся к изменениям топологии графа.



References

- [1] DeKoker L. Money laundering control and suppression of financing of terrorism: Some thoughts on the impact of customer due diligence measures on financial exclusion. *Journal of Financial Crime*. 2006;13(1):26-50. <https://doi.org/10.1108/13590790610641206>
- [2] Karpoff J.M. The future of financial fraud. *Journal of Corporate Finance*. 2021;66:101694. <https://doi.org/10.1016/j.jcorpfin.2020.101694>
- [3] Garcia-Bernardo J., Fichtner J., Takes F.W., Heemskerk E.M. Uncovering Offshore Financial Centers: Conduits and Sinks in the Global Corporate Ownership Network. *Scientific Reports*. 2017;7:6246. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-06322-9>
- [4] Brin S., Page L. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*. 1998;30(1-7):107-117. [https://doi.org/10.1016/S0169-7552\(98\)00110-X](https://doi.org/10.1016/S0169-7552(98)00110-X)
- [5] Vitali S., Glattfelder J.B., Battiston S. The Network of Global Corporate Control. *PLoS ONE*. 2011;6(10):e25995. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0025995>
- [6] Mizuno T., Doi S., Kurizaki S. The power of corporate control in the global ownership network. *PLoS ONE*. 2020;15(8):e0237862. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0237862>
- [7] Lukashevich A., Bulkin A., Maximov Y. A-priori reduction of scenario approximation for automated generation control in high-voltage power grids with renewable energy. *IEEE Control Systems Letters*. 2024;8:1613-1618. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3413367>
- [8] Gambarelli G., Owen G. Indirect control of corporations. *International Journal of Game Theory*. 1994;23(4):287-302. <https://doi.org/10.1007/BF01242945>
- [9] Langville A.N., Meyer C.D. Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings. Princeton University Press; 2006. 224 p.
- [10] Garas A., Schweitzer F., Havlin S. A k -shell decomposition method for weighted networks. *New Journal of Physics*. 2012;14:083030. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/8/083030>
- [11] Jeh G., Widom J. Scaling personalized web search. In: Proceedings of the 12th international conference on World Wide Web (WWW '03). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2003. p. 271-279. <https://doi.org/10.1145/775152.775191>
- [12] Tarjan R. Depth-First Search and Linear Graph Algorithms. *SIAM Journal on Computing*. 1972;1(2):146-160. <https://doi.org/10.1137/0201010>
- [13] McLendon W., Hendrickson B., Plassmann P. Finding strongly connected components in parallel. In: Proceedings of the 1998 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications. 1998;2:822-829.
- [14] Stach I., Mercik J. Measurement of control power in corporate networks. *Operations Research and Decisions*. 2021;31(1):97-121. <https://doi.org/10.37190/ord210106>
- [15] Anikin A., Gasnikov A., Gornov A., Kamzolov D., Maximov Y., Nesterov Y. Efficient Numerical Methods to Solve Sparse Linear Equations with Application to PageRank. *Optimization Methods and Software*. 2022;37(3):907-935. <https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1858297>
- [16] Chapelle O., Mehrotra R. Robust PageRank and its applications. In: Proceedings of the 9th ACM International Conference on Web Search and Data Mining, 2016. p. 339-348.
- [17] Gleich D.F. PageRank Beyond the Web. *SIAM Review*. 2015;57(3):321-363. <https://doi.org/10.1137/140976649>
- [18] Cohen M.B., Kelner J., Peebles J., Peng R., Rao A.B., Sidford A., Vladu A. Almost-linear-time algorithms for Markov chains and new spectral primitives for directed graphs. In: Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing (STOC 2017). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2017. p. 410-419. <https://doi.org/10.1145/3055399.3055463>
- [19] Bahmani B., Chowdhury A., Goel A. Fast incremental and personalized PageRank. *Proceedings of the VLDB Endowment*. 2010;4(3):173-184. <https://doi.org/10.14778/1929861.19298>
- [20] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2003;114(1):976-1024. <https://doi.org/10.1023/A:1021807110899>
- [21] Polovnikov K., Pospelov N., Skougarevskiy D. α -Indirect Control in Onionlike Networks. *arXiv:2109.07181*, 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.07181>
- [22] Meyer C.D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM; 2000. 730 p.
- [23] Garlaschelli D., Battiston S., Castri M., Servedio V.D.P., Caldarelli G. The scale-free topology of market investments. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2005;350(2-4):491-499. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.11.040>
- [24] Heemskerk E.M., Takes F.W. The corporate elite community structure of global capitalism. *New Political Economy*. 2016;21(1):90-118. <https://doi.org/10.1080/13563467.2015.1041483>
- [25] Song D.-M., Jiang Z.-Q., Zhou W.-X. Statistical properties of world investment networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2009;388(12):2450-2460. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.03.004>
- [26] Romei A., Ruggieri S., Turini F. The layered structure of company share networks. In: 2015 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics (DSAA). Paris, France: IEEE Press; 2015. p. 1-10. <https://doi.org/10.1109/DSAA.2015.7344809>

Поступила 05.03.2026; одобрена после рецензирования 02.04.2026; принята к публикации 08.04.2026.

Submitted 05.03.2026; approved after reviewing 02.04.2026; accepted for publication 08.04.2026.



Об авторе:

Булкин Александр Михайлович, аспирант кафедры общих проблем управления механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1); исполнительный директор, ООО «РСХБ-экосистема» (119034, Российская Федерация, г. Москва, Гагаринский пер., д. 3), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0001-4937-3807>, bulkin921@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the author:

Aleksander M. Bulkin, Postgraduate Student of the Chair of General Problems of Control, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation); Executive Director, RSHB Ecosystem (3 Gagarinsky Line, Moscow 119034, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0001-4937-3807>, bulkin921@yandex.ru

The author has read and approved the final manuscript.

