УДК 004.41

Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Умбетбаев К.У.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ НАСЛЕДИЮ АЛЬ ФАРАБИ

АННОТАЦИЯ

В статье освещены вопросы использования информационных технологий для повышения эффективности обучения уникальным алгоритмам геометрических задач на построение с помощью циркуля и линейки, а также тригонометрическим линиям и теории составления тригонометрических таблиц из математического наследия аль-Фараби.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Математическое наследие аль-Фараби, геометрические задачи на построение, GeoGebra, информационные технологии.

Bidaibekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G., Umbetbaev K.U.

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

INFORMATION TECHNOLOGY IN TEACHING MATHEMATICAL HERITAGE OF AL-FARABI

ANNOTATION

The given paper covers the issues of use of information technology for improvement of efficiency of teaching unique algorithms of geometric construction problems with help of compass and ruler, also trigonometric lines and theories of creation of trigonometric tables from the mathematical heritage of al-Farabi.

KEYWORDS

Mathematical heritage of al-Farabi, geometric construction problems, GeoGebra, information technology.

Аль-Фараби (870-950 гг.) – один из величайших ученых, мыслителей и энциклопедистов раннего средневековья, уроженец Казахстана и представитель древних тюркских племен, на основе которых был образован нынешний Казахский народ. Как обладателю незаурядных способностей во всех отраслях знаний, ему принадлежит почетное место среди огромной плеяды ученых средневекового Востока, которые еще при жизни называли его вторым учителем - «ал - муаллимас-сани» после Аристотеля.

Аль-Фараби является одним из основоположников прогрессивной общественно-философской мысли на мусульманском Востоке, в том числе в Средней Азии и Казахстане, откуда вышли такие философы и ученые, как Ибн-Сина, аль-Бируни, Омар Хайям, Наср ад-Дин ат-Туси и др. Написал кроме чисто философских и логических сочинений, множество естественно-математических и натурфилософских работ. Оставил богатейшее научное наследие, которое оказало огромное влияние на последующее развитие науки, как на Востоке, так и на Западе. Изучение научного наследия этого мыслителя, определение его влияния на мировую науку и цивилизацию были и продолжают оставаться актуальными и сегодня.

В научной деятельности аль-Фараби и физико-математические науки также занимают большое место. Математическое наследие аль-Фараби достаточно хорошо изучено Ауданбеком Кубесовым (1932-2008 гг.), которой является крупным ученым в области истории математической науки и педагогики исламского Востока. Его труды «Математическое наследие аль-Фараби», «Математические трактаты» оцифрованы в Мичиганском университете (2007 г., 2010 г.), а «Комментарии к «Альмагесту» Птолемея» - в Калифорнийском университете (2008 г.) [1, 4].

В исследованиях А. Кубесова приведены основные сведения о рукописях, изданиях, переводах и исследованиях сочинений аль-Фараби, содержащих физико-математические сведения. Некоторые другие сведения о зарубежных изданиях, переводах и исследованиях этих сочинений можно найти в библиографической книге Н. Решера [2].

Широко известна монография А. Кубесова «Математическое наследие аль-Фараби» [10], получившая высокую оценку зарубежных ученых [1]. В ней на основе опубликованных и неопубликованных рукописей ученого освещены математика в классификации аль-Фараби, геометрия, тригонометрия и ее применение в астрономии, арифметика, алгебра аль-Фараби, учение о вероятностях и математической теории музыки, и др., краткой обзор которых приведен в статье [5].

А. Кубесовым был обнаружен до него неизвестный геометрический трактат аль-Фараби, который называется «Книга духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур».

Данный труд аль-Фараби, целиком посвященный геометрическим построениям, важным в землемерии, архитектуре, технике и геодезии, состоит из введения и 10 книг (макалат). Он был создан, как видно из названия «духовные искусные приемы», для приложений геометрии к различным вопросам практики и других наук, что соответствует общей характеристике математики средневекового Востока, которая, в основном, была прикладно-вычислительной.

Так, в первой книге им рассматриваются элементарные построения с помощью циркуля и линейки. Вторая книга трактата посвящена правильным многоугольникам, строящимся на данном отрезке, а третья книга – правильным многоугольникам, вписанным в круг.

В четвертой книге решаются задачи построения круга, описанного около треугольника и правильных многоугольников, а в пятой книге – построения круга, вписанного в треугольник. Шестая книга посвящена построению правильных многоугольников, вписанных друг в друга. Построение треугольников в некоторых задачах основаны на применении метода гомотетии.

В седьмой книге рассматриваются задачи разделения треугольника на равные части, увеличения и уменьшения его в несколько раз; применяется метод гомотетии.

Восьмая книга посвящена разделению параллелограммов и трапеций прямыми, удовлетворяющими различным условиям. Здесь также применяется метод гомотетии.

В девятой книге решен ряд задач на преобразование квадрата из n^2 квадратов, построение квадрата из $2n^2$ и $n^2 + m^2$ квадратов и обратные задачи, различные способы построения квадрата из трех равных квадратов. В этой же книге приводится критика аль-Фараби решения ремесленниками задачи утроения квадратов.

Десятая книга посвящена различным построениям на сфере, в том числе разделению сферы на правильные сферические многоугольники, равносильные построению вписанных правильных многогранников, вершинами которых являются вершины многоугольников.

Вопросам геометрических построений придавалось большое значение и многими предшественниками аль-Фараби. Самая древняя книга, где специально рассматривались задачи на построение – это сочинение индийских математиков VII-V вв. до нашей эры, посвященное, в основном, правилам постройки алтарей. Имелось значительное количество сочинений о геометрических построениях и у древних греков, и у ряда ученых средневекового Востока. Поэтому, естественно, при составлении указанного труда по геометрическим построениям аль-Фараби в значительной степени опирался на достижения своих предшественников. Многие идеи, высказанные в этом труде, были развиты в дальнейшем в трудах математиков, как средневекового Востока, так и Европы эпохи Возрождения.

Геометрический трактат аль-Фараби сыграл большую роль в развитии конструктивной геометрии. Более того, алгоритмы геометрических построений, как известно, рассматриваются и в вычислительной геометрии, которая является разделом современной информатики. Так что есть основание считать, что в трактате рассматривается начало современной вычислительной геометрии.

Геометрические задачи на построение, составляя одну из содержательных линий школьного курса геометрии, и сегодня являются весьма существенным элементом в обучении геометрии, неотъемлемой ее частью.

В трактатах аль-Фараби предлагаются уникальные алгоритмы огромного количества геометрических задач на построение с помощью циркуля и линейки даже для задач, в которых точное построение сделать просто невозможно. Для них приводится алгоритм, позволяющий осуществить построение только лишь приближенно. Особый интерес среди них вызывают классические задачи древности: о трисекции угла, построении правильных многоугольников, вписанных в круг и ряд других задач, неразрешимых точно с помощью циркуля и линейки.

Правильные многоугольники всегда привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Алгоритмы построения некоторых из них рассмотрены еще Евклидом, но большой вклад в решение задач построения подобных многоугольников внес немецкий математик Гаусс (1801 г). Он указал все значения n, при которых возможно построение правильного n-угольника с помощью только циркуля и линейки. Этими многоугольниками оказались лишь такие многоугольники, у которых количество сторон является простым числом вида $2^{2^k}+1$, а также те, которые получаются из них удвоением числа сторон.

С помощью циркуля и линейки оказалось невозможным построение правильного 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 28….- угольников и т.д.

Отметим, что Евклидом построение правильных многоугольников при n=7,8,9,10 вообще не рассматривалось.

А у аль-Фараби в трактате приведены уникальные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки и семи, и девятиугольников, благодаря которым достаточно просто, но с некоторой сравнительно малой погрешностью осуществляется их построение.

К примеру, алгоритм построения правильного вписанного семиугольника он описывает так: «Если он сказал: как построить на линии *AB* равносторонний семиугольник, то сделаем линию *BC*, равной линии *AB*, построим на линии *AC* равносторонний треугольник *DAC* и опишем около треугольника *ADC* круг. Проведем в нем хорду - линию *AE*, равную линии *AB*, и разделим *AE* пополам в точке *G*, восставим перпендикуляр *GH* и продолжим его до окружности круга [рис.1].

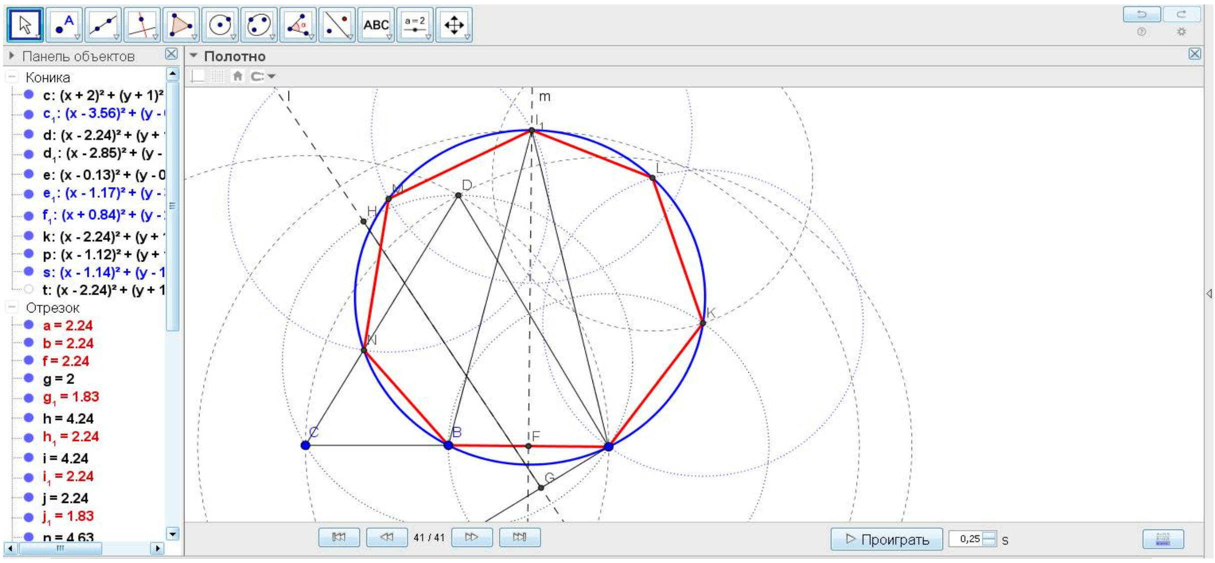

Рис.1. Построение семиугольника по алгоритму аль-Фараби

Разделим *AB* пополам в точке *F*, восставим в ней перпендикуляр *FI*, равный перпендикуляру *GH*. Проведем через точки *A*, *B* и *I* круг *ABI* и отложим [на нем] дуги *AK, KL, LI, IM, MN* и *NB*, равные дуге *AB*. Проведем линии *AK, KL, LI, IM, MN* и *NB*; это — равносторонний и равноугольный семиугольник» [3, стр. 110—111].

Данное построение, впрочем, как и все остальные, у аль-Фараби приведено без доказательства.

Обоснование ее с опорой на современные знания в области школьной математики и с использованием современных вычислительных средств, позволяет приближенно, с любой заданной точностью, определить значение стороны правильного вписанного семиугольника. С точностью до трех десятичных знаков оно равно: *2·R·sin(360⁰/14)≈2·R·sin25⁰71'≈R*0,868.* $\frac{360°}{14} \approx 2R\sin 25°43' \approx R \cdot 0.868$По алгоритму построения аль-Фараби сторона правильного семиугольника с точностью до тысячных равна $(R\cdot\sqrt{3})/2 \approx R\cdot 0{,}866$. Эта точность не улучшаема. Для остальных *n* – от 3 до 10 - предложенные аль-Фараби алгоритмы построения многоугольников не вызывают затруднений и точны.

Обоснование подобных задач на построение требует привлечения огромного количества сведений из геометрии, что должно способствовать закреплению и более глубокому, осознанному усвоению учащимися теоретического материала, обобщению и систематизации их знаний. Безусловно, все они достойны внедрения в математическое образование сегодняшних школьников. Знакомство с ними, включая многочисленные искусные приемы, предлагаемые ученым для их решения, позволит повысить и теоретический, и практический уровень обучения геометрии.

Обращение к научному наследию аль-Фараби важно еще и потому, что перед педагогической наукой Казахстана сегодня стоит ответственная миссия, связанная с реализацией

Государственной программы « Культурное наследие», которая ставит на повестку дня вопрос об изучении наследия выдающихся мыслителей прошлого, источников и документов, имеющих историческое значение в культурном наследии казахского народа [8]. Использование при изложении материала урока исторических сведений подчеркнет практическое его значение, поднимет интерес учащихся к изучаемому материалу и будет способствовать прочному его усвоению.

А использование при этом современных информационных технологий позволит усилить мотивацию учения, обеспечить формирование интереса учащихся к ним и, что очень важно, повысить эффективность и качество их обучения. Возможность их применения обусловлена, прежде всего, уникальностью исследования аль-Фараби, заключающейся в использовании алгоритмического подхода при решении математических проблем и прикладной направленностью проведенных им исследований.

Одним из современных средств информационных технологий, специально предназначенных для применения в обучении геометрии, безусловно, являются интерактивные геометрические среды, позволяющие создавать качественные планиметрические и стереометрические чертежи. Здесь можно создавать конструкции с точками, векторами, линиями, коническими сечениями, а также математическими функциями, а затем динамически изменять их, строить анимации. В них можно напрямую вводить уравнения и манипулировать координатами. Программы динамической геометрии позволяют выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными.

Наибольшей популярностью среди подобных программ пользуется GeoGebra. Обладая огромными возможностями, она позволяет не только осуществлять геометрические построения, демонстрировать доказательства утверждений, строить анимации, что позволяет совместно с учащимися устанавливать, открывать заново те или иные свойства рассматриваемой фигуры. В отличие от других программ для динамического манипулирования объектами в ней имеется возможность интерактивного сочетания геометрического, алгебраического и числового представления. Созданный в ней анимированный файл можно использовать не только в самой среде, но и во многих других средах в виде видео файла, анимированного gif-файла, web-страницы и т.д.

Представление всех алгоритмов в трактате аль-Фараби в виде четкой последовательности действий существенно облегчает их компьютерную реализацию. Принимая это во внимание, а также учитывая возможности данной программной среды, на кафедре информатики и информатизации образования Казахского национального педагогического университета имени Абая проводимой под эгидой научно-исследовательской работы по теме «Математическое наследие аль-Фараби в современном образовании» в экспериментальном порядке разработан и внедрен в подшефной школе курс «Задачи на геометрические построения аль-Фараби в среде GeoGebra» в рамках внеклассных мероприятий [6]. Основными развивающими его целями явились:

- повышение уровня математической подготовки школьников, а именно развитие логического, эвристического, алгоритмического, пространственного мышления;
- личностное развитие, выраженное в выработке навыков самоконтроля, рефлексии, изменения роли в учебном процессе от пассивного наблюдателя до активного исследователя.

Остановимся более подробно на решении в среде GeoGebra нескольких примеров из данного курса.

Интересной представляется задача построения правильного девятиугольника, которая относится к категории задач на геометрические построения, неразрешимых с помощью циркуля и линейки. В основе алгоритма его решения, предложенного аль-Фараби [3], лежит задача о делении угла на три равные части.

Следует отметить, что и задача о трисекции угла, сводящаяся к кубическому уравнению $sin(\beta)=3\cdot x-4\cdot x^3$, $sin(\beta/3)=x$, где β рассматриваемый угол, за исключением случая трисекции прямого угла, не может быть решена точно с помощью только линейки и циркуля постоянного раствора. Неразрешимость данной задачи в общем случае показана в работе [11, стр.164.].

Аль-Фараби же в своих трактатах приводит два способа ее решения. Решения эти, разумеется, приближенные с незначительной погрешностью. Но в работе он не отмечает приближенного характера своих построений.

Один из этих алгоритмов описан им следующим образом:

«Если он сказал: как разделить угол *ABC* на три равные части, то если угол прямой, построим на линии *BC* равносторонний треугольник *DBC*. Тогда угол *ABD* – треть прямого угла. Разделим угол *DBC* пополам. Вот рисунок этого (рис.2)».

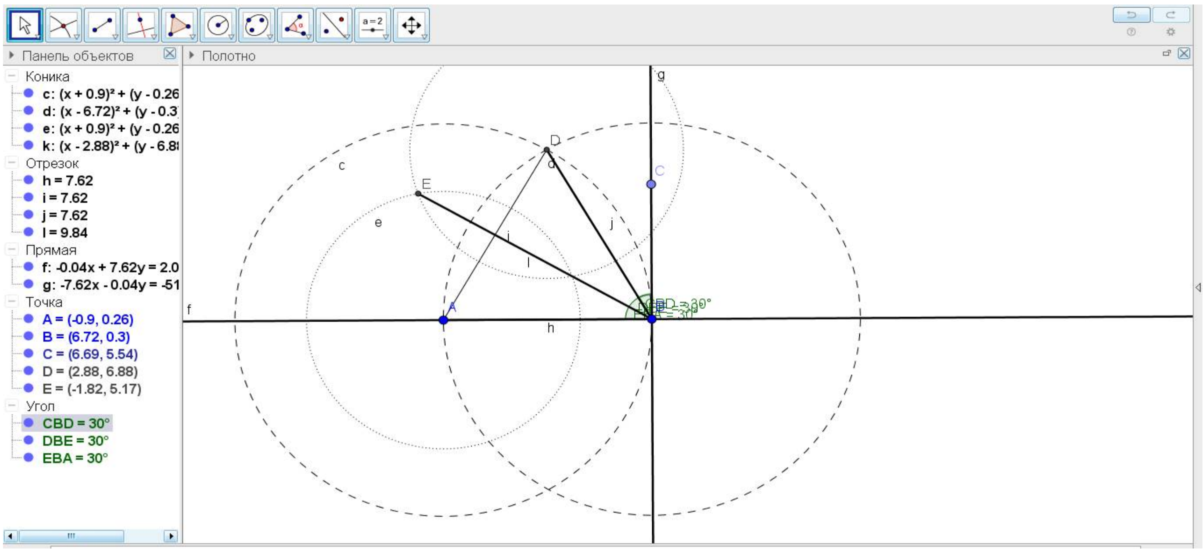

Рис.2. Построение трисекции прямого угла по алгоритму аль-Фараби

Если угол меньше прямого угла, то «построим острый угол – угол ABC и, если мы хотим разделить его на три равные части, опустим из точки A перпендикуляр AH на линию BC и проведем из точки A линию AD параллельно BC. Приложим линейку к точке B и будем двигать ее по линиям AD и AH до тех пор, пока линия, которая находится между линиями AD и AH, не станет равной удвоенной линии AB. Это, например, линия DEB, так что линия DE – удвоенная линия AB. Тогда угол DBC треть угла ABC. Вот рисунок этого (рис.3)».

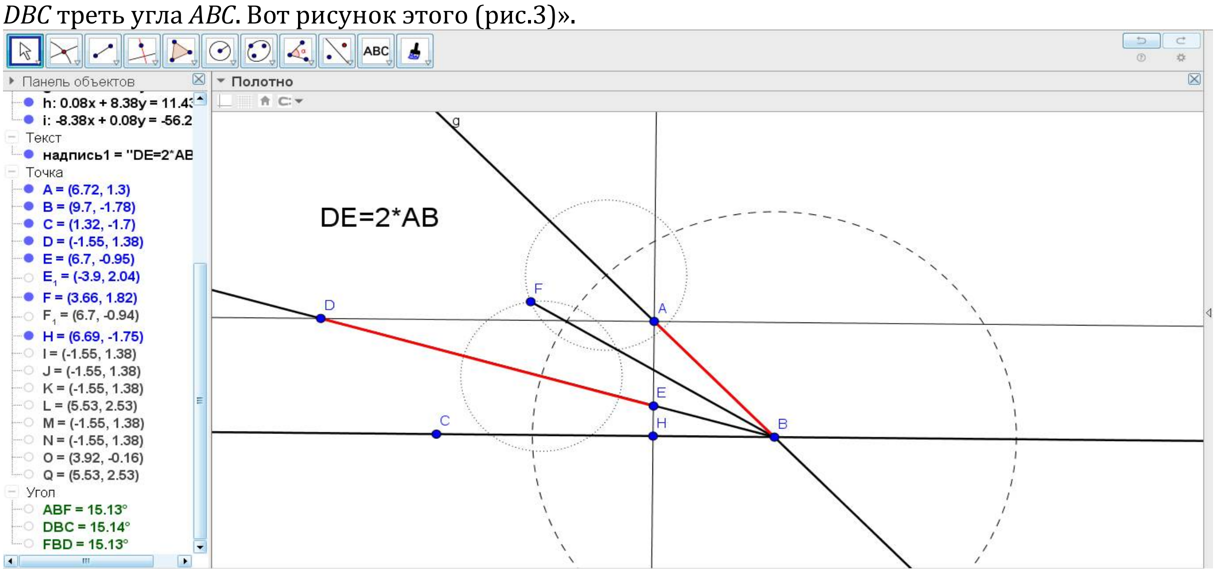

Рис.3. Построение трисекции острого угла по алгоритму аль-Фараби

Это построение у аль-Фараби также приведено без доказательства.

Алгоритм построения правильного девятиугольника, основанный на построении трисекции угла, аль-Фараби описывает так: «Если он сказал: как построить на линии AB равносторонний и равноугольный девятиугольник, то опишем круг CDE произвольного размера с центром в точке G, отметим на нем точку C, примем ее за центр и на расстоянии полудиаметра круга отметим [точки] E и D. Разделим дугу DE на три равные части [рис. 4]. Пусть одна такая дуга - EH. Проведем линии EG, EH и HG. Проведем между линиями EG и HG линию FI, равную линии AB и параллельную линии EH. Примем точки A и B за центры и на расстоянии FG опишем круги, которые пересекутся в точке K. Примем точку K за центр и на расстоянии KA [опишем] круг ABL. Разделим дугу ALB на восемь равных частей и соединим эти точки деления хордами. Получится равносторонний и равноугольный девятиугольник на линии AB» [3, стр. 113-114].

Данный алгоритм аккуратно, с математической точностью несложно реализовать в описанной выше программной среде GeoGebra (рис.4).

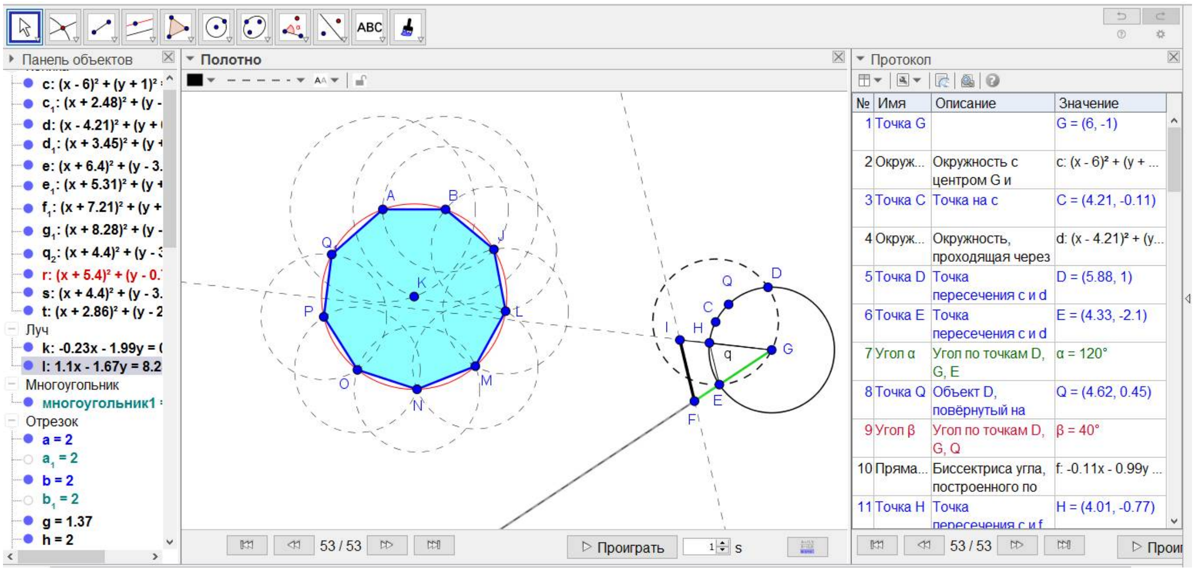

Рис.4. Построение девятиугольника по алгоритму аль-Фараби

Видно, что полученный в результате построений по описанному алгоритму компьютерный чертеж в среде GeoGebra выглядит не просто аккуратно и математически точно, но и представляет собой совершенно новое явление. Его можно сохранять и видоизменять. Элементы чертежа легко измерить, выделить палитрой цвета, сопровождать надписями. От учащихся требуется осуществление не только соответствующих построений в данной программной среде, но и обоснование алгоритма с опорой на современные знания в области школьной геометрии.

Построение девятиугольника по алгоритму аль-Фараби, как было отмечено выше, является приближенным и допускает некоторую достаточно маленькую погрешность, которую на чертеже заметить очень сложно, но необходимо ее показать при обосновании. Сторону правильного девятиугольника аль-Фараби определяет с помощью трисекции дуги, равной одной трети окружности. Если обозначить $\sin(\beta/3)=x$, то $\sin(\beta)=3\cdot x-4\cdot x^3$, где $\beta=\alpha/2$, $\alpha=120^0$. Отсюда значение стороны определяется с точностью до тысячных и равно $2\cdot R\cdot \sin(360^0/18)\approx R\cdot 0{,}684$, чем и объясняется погрешность в построении.

Подобные задания увлекают школьников. Они позволяют не только углубить знания учащихся по программе, но и способствуют развитию их мышления и ключевых компетентностей.

Большой интерес у учащихся вызывают и, представленные в трактатах, задачи на построение в пространстве. В их числе задачи по разделению сферы на некоторое число сферических многоугольников, что равносильно построению правильных вписанных многогранников типа октаэдра, тетраэдра, куба, икосаэдра. Сферические многоугольники являются соответственно проекциями их граней на поверхности сферы, проведенными из ее центра.

Одной из таких задач является задача разделения сферы на четыре равные части, являющиеся правильными сферическими треугольниками. Аль-Фараби предлагает следующий способ ее решения: «Если он сказал: как разделить сферу на четыре равных треугольника с равными сторонами и углами, если известен диаметр сферы, то если диаметр сферы равен линии *AB*, построим на линии *AB* полукруг, отложим линию *AC*, равную трети *AB*, проведем линию *CD* перпендикулярно к линии *AB*; она встретит полукруг *ADB* в точке *D*. Возьмем на круге произвольную точку *E*, примем ее за полюс и на расстоянии *BD* опишем круг *FGH*, разделим его на три равные части в точках *G, H, F* и проведем через полюс и через каждую точку *G, H* и *F* дуги большого круга, пересекающиеся в точке *J*, а через каждые две из точек *G, H* и *F* – дугу большого круга. Тогда получим сферу, разделенную на четыре равносторонних и равноугольных треугольника. Это треугольники *JHF, JHG, FJG* и *GHF*».

Использование среды GeoGebra при реализации данного алгоритма значительно упрощает построение, предоставляет возможность более наглядного оформления и динамического манипулирования частями чертежа для лучшего понимания, как алгоритма, так и полученных результатов, способствует вовлечению учащихся в активную познавательную деятельность, путем выдвижения различных гипотез и поиска ответов (рис. 5-6).

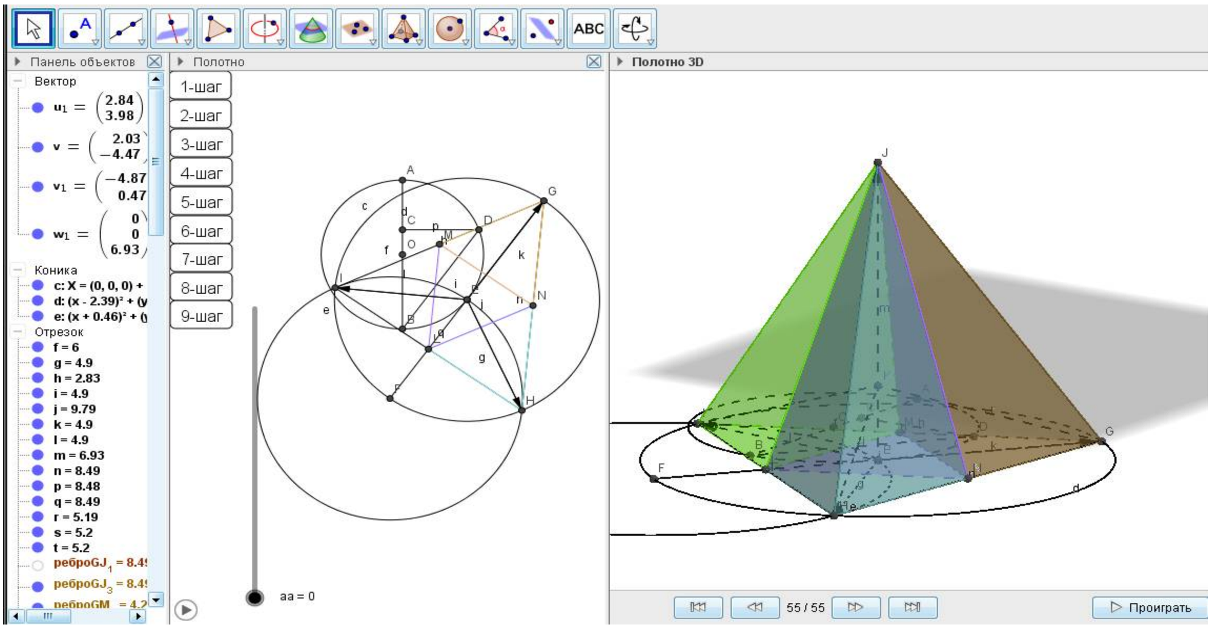

Рис.5. Разделение сферы на четыре равные части по алгоритму аль-Фараби

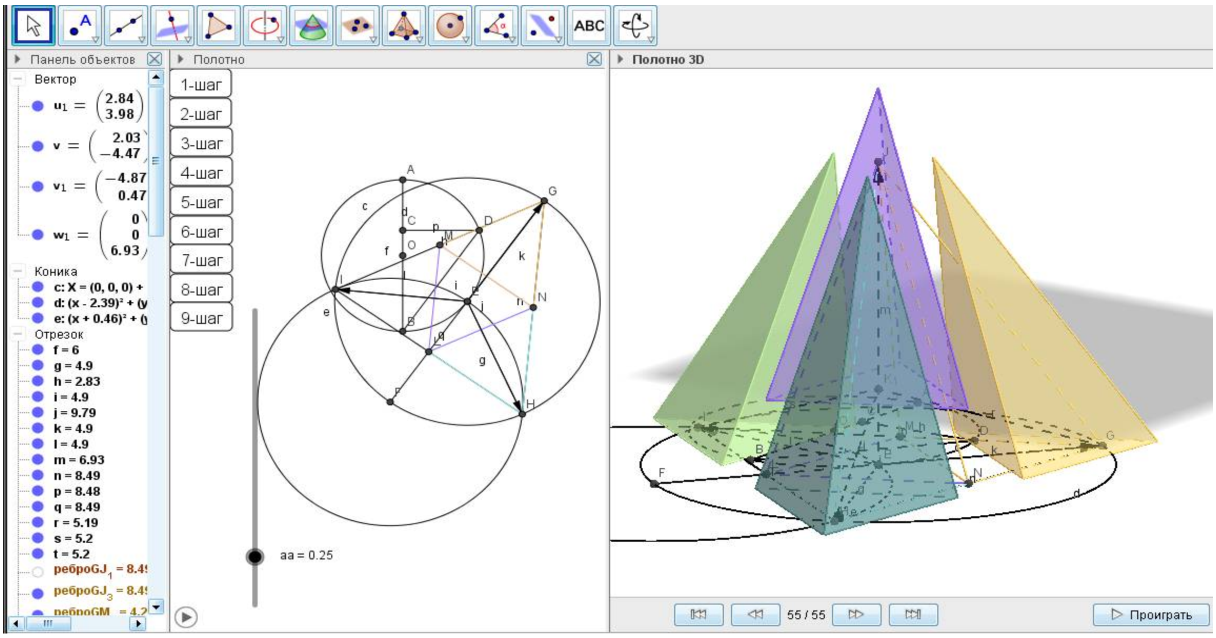

Рис.6. Анимирование частей сферы, разделенной по алгоритму аль-Фараби

Достаточно увлекательными являются и алгоритмы решения задач на разделение квадратов, их составление и построение фигур, вписанных в них, которые часто встречаются на практике.

В их числе следующий алгоритм: «Если даны квадраты, число которых состоит из двух неравных квадратов, то построим два прямоугольника, длина каждого из них равна стороне большого квадрата, а ширина равна стороне меньшего квадрата. Рассечем каждый из них пополам диагональю; получатся четыре равных треугольника со сторонами, равными сторонам квадратов, их диагональ равна стороне искомого квадрата. Если мы расположим в середине квадрат, сторона которого равна разности сторон двух данных квадратов, и расположим стороны треугольников на его сторонах, получится один квадрат, построенный из квадратов», сформулированный для общего случая.

Здесь же им дано его применение в конкретном случае: «если мы хотим построить квадрат из тринадцати квадратов с равными сторонами и диагоналями, то один квадрат состоит из единичных квадратов, их девять, сторона этого квадрата равна трем; другой составлен из четырех единичных квадратов, его сторона равна двум. Построим два прямоугольника, одна сторона которых – три, а другая – два. Получатся два прямоугольника, каждый из которых состоит из шести квадратов. Рассечем их по диагонали; получатся четыре треугольника, длинный катет каждого из которых – три, короткий – два, а гипотенуза – корень из тринадцати. Выделим из квадратов единичный, поместим его в середине и приложим к нему треугольники большими катетами к стороне квадрата. Из них составится квадрат, каждая сторона которого – гипотенуза треугольников, т.е. корень из тринадцати» [3].

И в этом случае при реализации алгоритма очень кстати использование интерактивной среды GeoGebra, которая позволяет подготовить необходимые чертежи, осуществить их разделение и перетаскивание (рис.7).

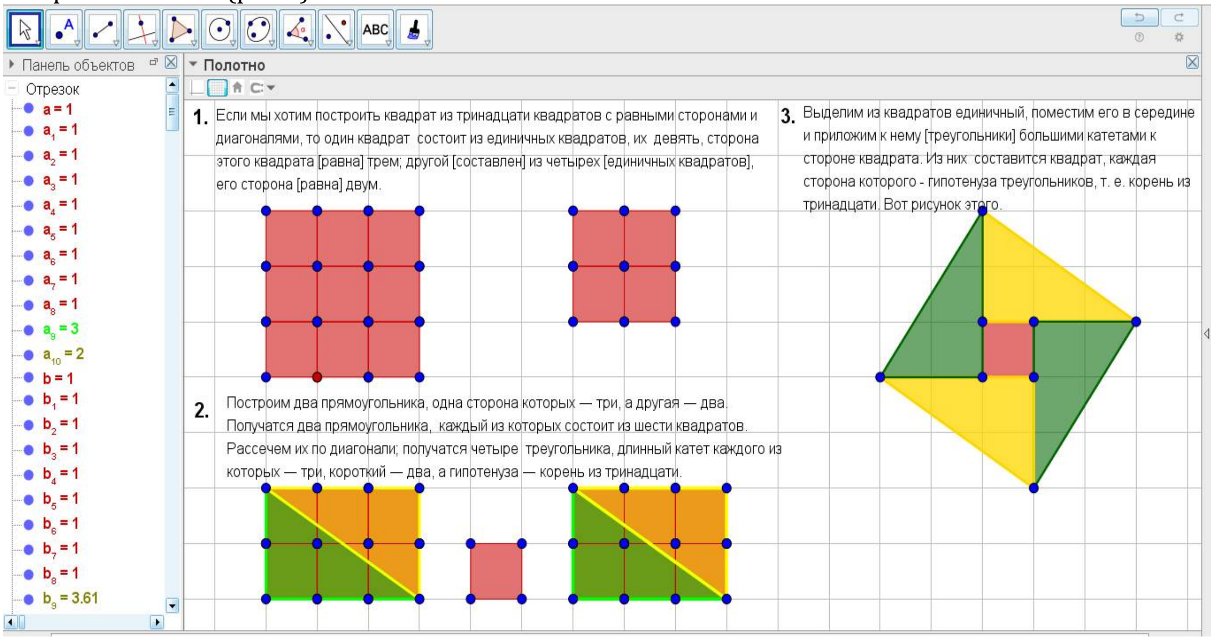

Рис.7. Разделение квадратов по диагонали и составление на их основе нового квадрата

Подобных задач на построение, описанных аль-Фараби в трактатах и включенных в программу разработанного для школьников элективного курса множество. Знакомство с ними, включая многочисленные искусные приемы, предлагаемые ученым для их решения, позволит расширить представления учащихся как о самих задачах на построение, так и возможных способах их решения, систематизировать знания учащихся. И, несомненно, будет способствовать развитию познавательных интересов, пространственного и логического мышления учащихся, развитию навыков построения фигур, исследовательских их навыков, повышению уровня их графической культуры.

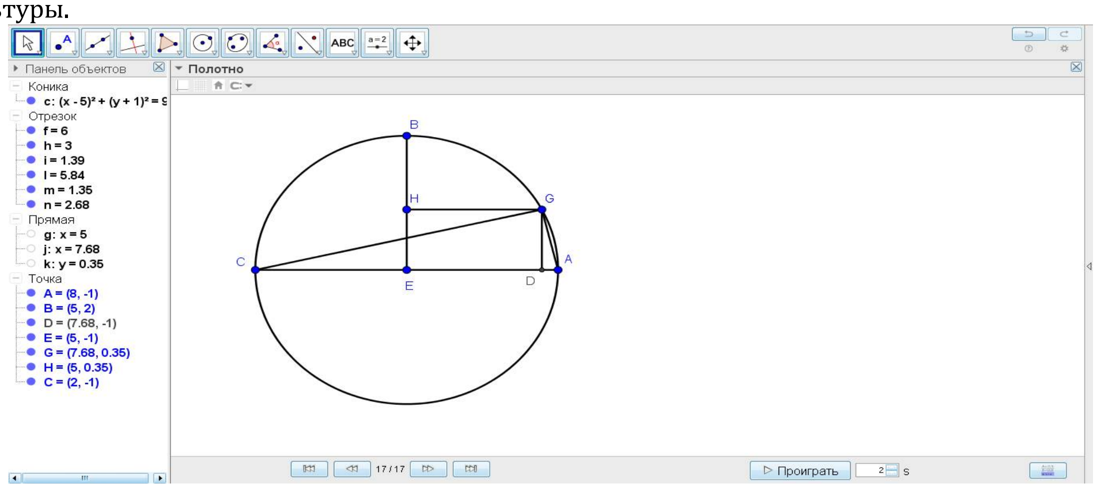

Рис. 8. Основные тригонометрические линии по аль-Фараби

Исторический контекст учебного материала значительно усилит доказательность и убедительность важности полученных результатов, позволит расширить и обогатить систему предметных знаний учащихся, повысит их прочность за счет анализа и повторения учебного материала в новом - историческом - контексте, интересном и эмоционально насыщенном для восприятия учащимися.

Среди математических трудов аль-Фараби наряду с геометрией особое место занимает довольно развитая тригонометрия, созданная им в связи с применением математических методов для решения разнообразных задач математической астрономии и географии.

В начале своих тригонометрических глав аль-Фараби дает разъяснение основных тригонометрических линий – хорды, синуса, косинуса и др. Он пишет «ABC – круг, его центр – E, его диаметр – AC (рис. 8). Проведем EB под прямым углом из точки E. Зададимся дугой AG, проведем линию AG, опустим GD перпендикулярно к AC и GH – перпендикулярно к BE, соединим G и C. Тогда линия AG – хорда дуги AG, GC –хорда ее дополнения, GD – синус дуги AG, GH – ее косинус, равный линии DE, AD – стрела дуги $AG; BH$ – стрела дуги GB, дуга GB – дополнение дуги AG до четверти круга, дуга GBC - дополнение AC до половины круга» [10].

Как видно из текста, синусы и косинусы он рассматривает в первой четверти, а хорды, как и Птолемей, на верхней полуплоскости. Более того, из текста и рисунка легко можно установить основное тригонометрическое тождество $sin^2\alpha + cos^2\alpha = R^2$ и следующие формулы приведения

90

90

$sin(\;|0 - \alpha)$, а также то, что величина линии синуса в первой четверти возрастает, а линии $cos(\;|0 - \alpha), cos\alpha =$

$sin\alpha =$

косинуса убывает.

Далее он дает определение синуса «как половины хорды удвоенной дуги», т.е. если $BD = chd2\alpha$ (рис.9), то BC – линия синуса дуги $AB = \alpha$, и

$$sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot chd2\alpha. \qquad (1)$$

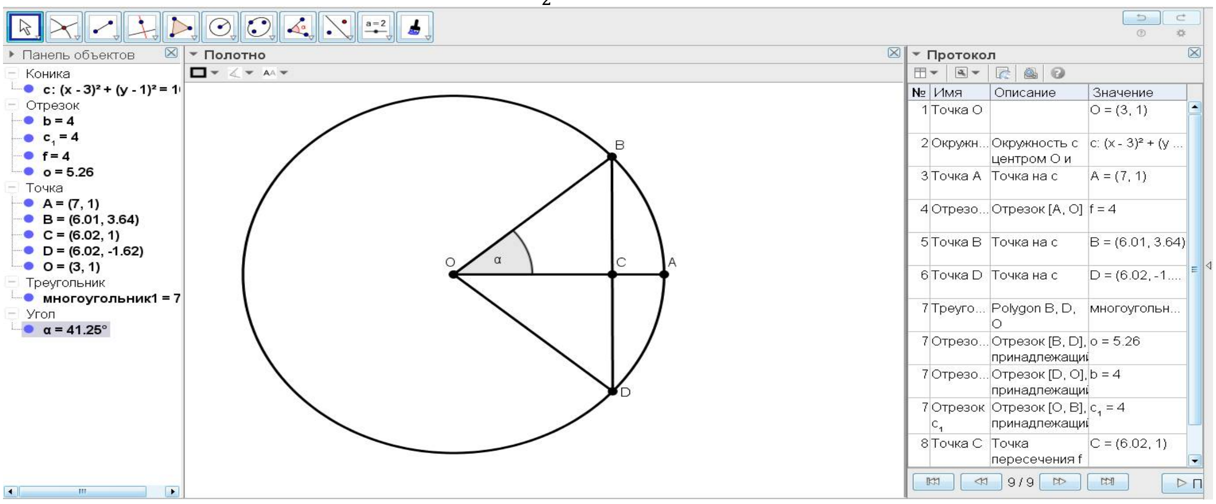

Рис.9. Определение синуса по аль-Фараби

Это одно из первых известных нам введений синуса при комментировании Птолемея. Аль-Фараби в дальнейшем всюду хорду дуги 2α заменяет синусом углаα. Хотя такая замена сама по себе кажется не столь существенной, однако переход от хорды к полухорде благоприятствовал широкому внедрению в астрономии различных тригонометрических функций, связанных со сторонами и углами прямоугольного треугольника в круге.

В своих тригонометрических главах аль-Фараби приводит серию задач по определению величины хорды четверти, трети круга, одной десятой и пятой круга, задачу определения по известной хорде дуги величины хорды ее дополнения, а также задачи определения величины хорды суммы и разности двух дуг и ряд других задач. Каждая из них изложена в отдельной главе его «Книги приложений», примыкающей к «Комментариям к «Алмагесту»» и представляет собой, как отдельную, самостоятельную задачу, так и служит подготовительным материалом для доказательства последующих задач, необходимых для составления таблиц тригонометрических функций.

Отдельная глава посвящена доказательству известной теоремы Птолемея, которую аль-Фараби формулирует следующим образом: «В каждом четырехугольнике, вокруг которого описан круг, произведение каждой из противоположных сторон на другую, если сложить их, равно произведению диагоналей четырехугольника». Она также нужна для доказательства дальнейших его предложений.

Безусловно, все эти задачи, так же как и задачи на геометрические построения, достойны изучения в современном математическом образовании, как в рамках обязательного курса алгебры и геометрии, так и в виде самостоятельного элективного курса. Школьники должны иметь прочные знания по тригонометрии, так как они имеют огромную практическую направленность и играют большое значение в реализации межпредметных связей.

Отметим, что первичные тригонометрические знания учащихся зачастую представлены фрагментарно. Связано это с высоким уровнем абстракции понятий, сложной логической структурой их определений, недостаточностью учебного времени для осмысления сложности вопросов и др. Нынешнее отношение школьников к тригонометрии вызвано также и непониманием ее роли в общечеловеческой культуре. Знакомство с задачами аль-Фараби, прежде всего, будет способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, предусмотренного программой, осознанному пониманию тригонометрических формул, позволит расширить их представления, как о тригонометрических задачах в целом, так и возможных способах их решения, систематизировать знания учащихся. И, несомненно, будет способствовать развитию логического мышления учащихся, развитию познавательных и исследовательских их навыков, повышению уровня их математической и информационной культуры. Использование же при их обучении современных математических пакетов, цифровых образовательных ресурсов сделает процесс обучения тригонометрии более увлекательным, позволит усилить мотивацию учения, и, что очень важно, позволит повысить эффективность и качество их обучения.

Одним из целесообразных средств при этом является программная среда GeoGebra, позволяющая не только готовить геометрические иллюстрации ко всем этим задачам в качестве наглядности для лучшего их понимания, но и, главное, обеспечить широкое и целенаправленное использование познавательной функции этой наглядности, что является одним из главных положений когнитивно-визуального подхода к формированию знаний, умений и навыков учащихся. Эффективность использования такого подхода в обучении математике не вызывает сомнения.

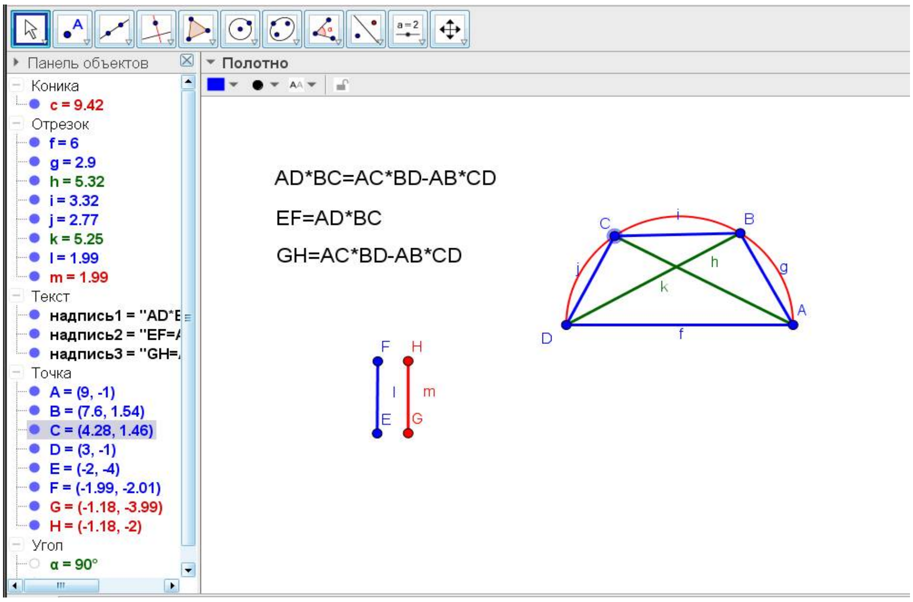

Рис.10. Определение величины хорды разности двух дуг, хорды которых известны

Использование среды GeoGebra, в частности, при решении задачи «О нахождении величины хорды разности двух дуг, хорды которых известны» облегчает понимание доказательства правила вычисления хорды, стягивающей разность двух дуг, когда известны хорды, стягивающие эти дуги, описанного аль-Фараби:

«Пусть *ABCD* – полукруг, диаметр его - *AD* и его хорды *AB* и *AC* известны. Соединим *B* и *C* (рис.10). Я утверждаю, что *BC* известна.

Доказательство этого. Проведем *BD* и *CD*, которые известны, так как они хорды дополнений *AB* и *AC*. Тогда по тому, что доказано в предпосылке (т.е. по теореме Птолемея), произведение *AC* на *BD* равно сумме произведений *AB* на *CD* и *AD* на *BC*; но произведение *AC* и *BD* известно; известно и произведение *AB* и *CD*; следовательно, оставшееся произведение *AD* и *BC* известно. Диаметр *AD* известен, поэтому известна и хорда *BC*. Это и есть то, что мы хотели доказать. [3, стр.64-65].

Динамичность созданного в среде объекта, возможность визуализации всех утверждений, получаемых в процессе доказательства, облегчает его понимание.

Если воспользоваться соотношением (1), полученным аль-Фараби для осуществления перехода от хорды к синусу, то легко доказывается равносильность этого правила известной нам формуле синуса разности аргументов:

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - sin\beta \cdot cos\alpha$$

Действительно, по доказанному предположению имеем

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD - AB \cdot CD \qquad (2)$$

Пусть данные дуги AC и AB соответственно равны 2α и 2β, тогда по соотношению (1), заменяя хорды синусами, получим:

$AD = chd180^0 = 2sin90^0 = 2$,

$BC = chd2(\alpha - \beta) = 2sin(\alpha - \beta)$,

$AC = chd2\alpha = 2sin\alpha$,

$BD = chd(180^0 - 2\beta) = 2sin(90^0 - \beta) = 2cos\beta$,

$AB = chd2\beta = 2sin\beta$,

$CD = chd(180^0 - 2\alpha) = 2sin(90^0 - \alpha) = 2cos\alpha$

Подставляя эти значения хорд в равенство (2), получим указанную формулу

$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - sin\beta \cdot cos\alpha$.

В главе «О нахождении величины хорды половины дуги с известной хордой» аналогичным
$1 - cos\alpha$
образом доказывается формула синуса половинного аргумента $sin^2\frac{\alpha}{2} =$.

А в главе «О нахождении величины хорды суммы двух дуг, хорды которых известны» доказывается правило нахождения хорды суммы двух дуг, которое в силу соотношения (1) принимает вид $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + sin\beta \cdot cos\alpha$.

Именно эти формулы считаются основными и наиболее важными формулами преобразования тригонометрических выражений, поскольку из этих формул без особого труда выводятся практически все формулы тригонометрии. Кроме того, используются они для преобразования заданного тригонометрического выражения к виду, позволяющему облегчить нахождение его решения.

Доказательство формул синуса и косинуса суммы (разности) аргументов в силу сложности, как правило, не включено в базовый курс обучения. Однако доказательство, вытекающее из рассуждений аль-Фараби и приведенное выше, достаточно простое и посильно для учащихся. Рассмотрение его позволит прояснить суть этих формул, обеспечит сознательное их усвоение. Использование при этом программной среды GeoGebra, безусловно, будет способствовать повышению интереса учащихся к изучаемому материалу.

Заметим, что в задачах по определению величины хорды четверти, трети круга, одной десятой и пятой круга описаны способы вычисления хорды *90⁰*, *120⁰*, *36⁰* и *72⁰*. Доказывается, что $chd90^0 = R\sqrt{2}$, $chd120^0 = R\sqrt{3}$, $chd72^0 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ и $chd36^0 = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, откуда по формуле (1) легко получить $sin45^0 = \frac{chd90^0}{2}$, $sin60^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $sin36^0 = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ и $sin18^0 = \frac{R}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, которые точно измеримы.

Для широкого применения тригонометрических функций в теоретических и практических целях этих значений, конечно, недостаточно. Необходимы специальные таблицы значений тригонометрических функций, важным этапом при составлении которых является нахождение числового значения синуса одного градуса. Поэтому математики средневекового Востока придавали большое значение разработке различных методов решения этой задачи. В своей «Книге приложений к «Алмагесту»» аль-Фараби, насколько нам известно, первым на Востоке определяет значение синуса и косинуса одного градуса. Хотя метод вычисления хорды одного градуса, примененный им, по существу, совпадает с методом Птолемея, аль-Фараби значительно улучшает точность вычислений Птолемея путем совершенствования приемов вычислений над шестидесятеричными дробями.

Предварительно им доказывается лемма, играющая особую роль при вычислении хорды и синуса одного градуса: если $\alpha < \beta$, то $\frac{chd\alpha}{chd\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$. На ее основе далее строятся таблицы хорды, синусов и косинусов. Следуя Птолемею, аль-Фараби сначала находит хорду дуги разности *72⁰-60⁰=12⁰*, а затем последовательно определяет ее для *6⁰*, *3⁰*, *0.5⁰* и $\frac{3^0}{4}$, достаточно близко приближаясь к 10. С помощью доказанной леммы получает неравенства $chd1^0 : chd\frac{3^0}{4} < 1 : \frac{3}{4}$, $chd1^0 < \frac{4}{3} \cdot chd\frac{3^0}{4} < 1 : \frac{3}{4} \approx 1^p2'49''52'''$ и $chd\frac{3^0}{2} : chd1^0 < \frac{3}{4} : 1, chd1^0 > \frac{2}{3} \cdot chd\frac{3^0}{2} \approx 1^p2'49''48'''$. Из которых следует, что $1^p2'49''48''' < chd1^0 < 1^p2'49''48'''$.

За приближенное значение хорды одного градуса он принимает среднее арифметическое двух найденных значений $chd1^0 \approx 1^p2'49''50'''$.

И если значение хорды одного градуса, найденное Птолемеем, точно до пяти десятичных знаков, то у аль-Фараби оно точно до шести десятичных знаков включительно. Эта точность обеспечена им путем совершенствования приемов вычислений над шестидесятеричными дробями. Указанное достижение аль-Фараби по улучшению точности вычислений синуса одного градуса в дальнейшем было развито другими математиками средневекового Востока.

Далее аль-Фараби по значению $chd1^0$ находит значение $chd179^0$ (как хорды его дополнения), и по доказанному им утверждению об определении величины хорды суммы двух дуг, хорды которых известны, определяет все хорды дуг от одного до 180^0, откуда получает $sin1^0$ и $cos1^0$. В десятичных дробях приближение аль-Фараби для $sin1^0$ равно 0,017452389 вместо правильного 0,017452406.

Значение косинуса одного градуса необходимо ему для вычисления тангенса и котангенса одного градуса. Они, в свою очередь, необходимы для составления таблиц этих функций.

Авторами статьи разработано электронное средство для вычисления значений тригонометрических функций по алгоритму аль-Фараби, которое доступно на специально созданном научно-образовательном портале [7]. Главное его назначение – понять идею вычисления значений синуса одного градуса и других тригонометрических функций, но, при необходимости, оно может быть использовано и как online калькулятор. Убедиться в правильности вычислений значений тригонометрических функций по алгоритму аль-Фараби, которое точно до шести десятичных знаков, позволят и реализованные в нем алгоритмы вычислений тригонометрических функций через разложение в ряд с некоторой наперед задаваемой точностью (рис.11).

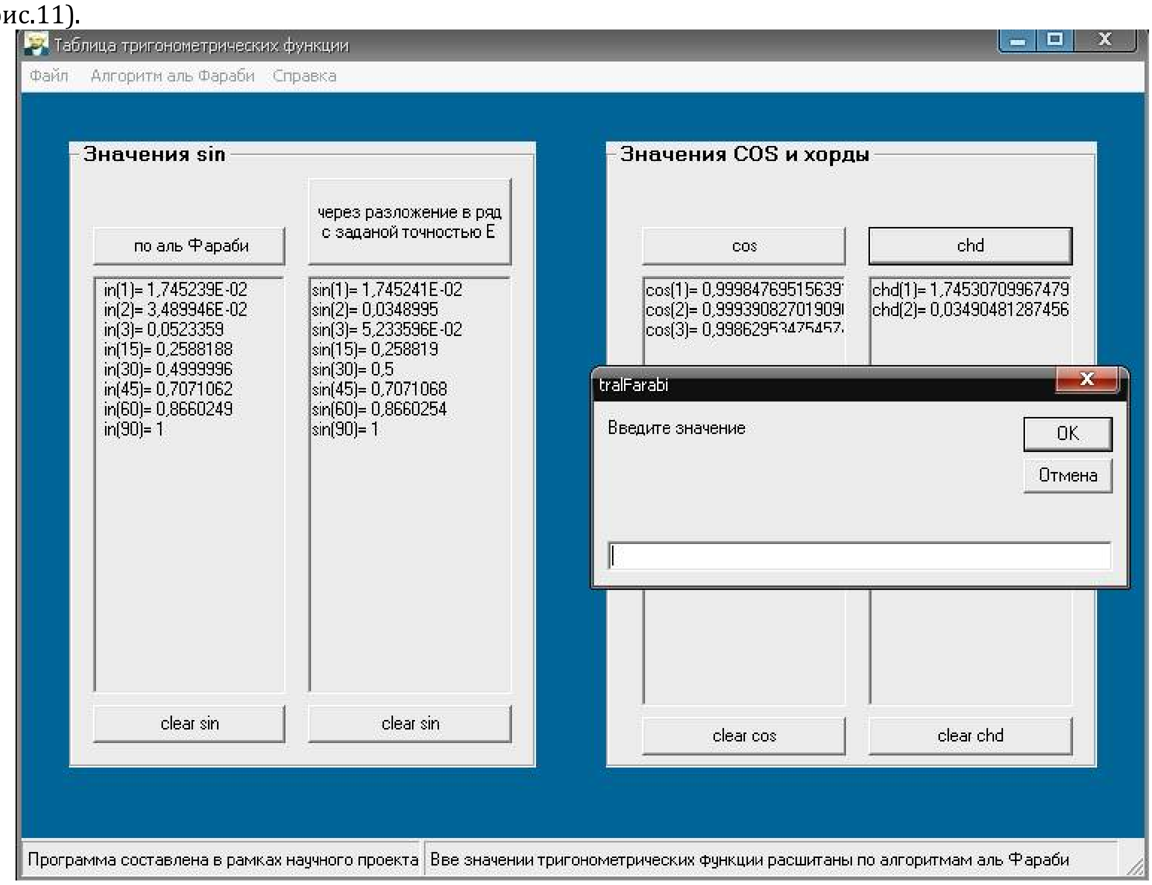

Рис.11. Электронное средство для вычисления значений тригонометрических функций по алгоритму аль-Фараби

Научно-образовательный портал наряду с данным электронным средством содержит и все необходимые для обучения математическому наследию аль-Фараби материалы, включая математические трактаты аль-Фараби и методические рекомендации по решению задач, представленных в них, а также чертежи ко всем задачам, выполненные в результате соответствующих построений в программе GeoGebra, в виде анимированных файлов. Дизайн портала адаптивный, рассчитанный, в первую очередь, на мобильные устройства [9, 12].

Безусловно, и все задачи аль-Фараби по тригонометрии, так же как и его задачи на геометрические построения, достойны изучения в современном математическом образовании, как в рамках обязательного курса алгебры и геометрии, так и в виде самостоятельного элективного курса. Возможно их изучение и в рамках внеклассных занятий. Школьники должны иметь прочные знания по тригонометрии, так как они имеют огромную практическую направленность, являются звеном огромной цепи понятий и имеют большое значение в реализации межпредметных связей.

Отметим, что первичные тригонометрические знания учащихся зачастую представлены фрагментарно. Связано это с высоким уровнем абстракции понятий, сложной логической структурой их определений, недостаточностью учебного времени для осмысления сложности вопросов и др. Нынешнее отношение школьников к тригонометрии вызвано также и непониманием ее роли в общечеловеческой культуре. Знакомство с задачами аль-Фараби, прежде всего, будет способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, предусмотренного программой, осознанному пониманию тригонометрических формул, позволит расширить их представления, как о тригонометрических задачах в целом, так и возможных способах их решения, систематизировать знания учащихся. И, несомненно, будет способствовать развитию логического мышления учащихся, развитию познавательных и исследовательских их навыков, повышению уровня их математической и информационной культуры. Использование же при их обучении современных математических пакетов, цифровых образовательных ресурсов сделает процесс обучения тригонометрии более увлекательным, позволит усилить мотивацию учения, и, что очень важно, позволит повысить эффективность и качество их обучения.

На основании вышеизложенного следует отметить, что внедрение в систему современного образования математического наследия аль-Фараби на основе информационных технологий окажет значительное влияние на качество предметной подготовки учащихся в ее обучающем, развивающем и воспитательном аспектах. Будет способствовать формированию и развитию научного мировоззрения, чувства патриотизма и интернационализма, а также других социально-ценных мотивов учения за счет осознания общественной значимости богатого математического наследия великого ученого. Полученные при этом знания станут более осознанными и прочными. Использование при этом современных средств информационно-коммуникационных технологий способствует повышению интереса учащихся, увлеченности предметом, а также мотивирует, стимулирует и активизирует их поисково-познавательную деятельность.

Работа поддержана грантом МОН РК (договор №274 от 03 мая 2016 г. №5736/ГФ-15-ОТ).

Литература

1. Carry J. Tee (University of Aucland), Kubesov A.K. The Mathematical Heritage of al-Farabi(in Russian). Journal for the history of Arabic science. -No.1 (1978), pp. 150–153.
2. Rescher N. Al-Farabi: An Annotated Bibliography. University of Pittsburgh, 1962.
3. Аль-Фараби Математические трактаты. Алма-Ата, «Наука», 1972 г. - 318 с.
4. Бидайбеков Е.Ы., Бостанов Б.Г., Камалова Г.Б. The mathematical heritage of Al-Farabi by A.Kubesov in modern conditions of educations // Материалы IX международного математического конгресса ISAAC. г. Краков, Польша, 5-9 августа 2013 г. - С. 33-34.
5. Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Джанабердиева С.А. Әл Фәрәбидің математикалық мұралары заманауи білім беру аясында // ҚазҰУ Хабаршысы. Саясаттану, философия, мәдениеттану сериясы. №2(51), Алматы. - 2015. - 50-57 б.
6. Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Салгожа И.Т., Торебекова Р.К. Формирование ИКТ - компетенции во внеклассной работе математическому наследию аль-Фараби // Мат-лы I Международной научно-практической конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения - 2016». - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 27-30 сентября 2016. - С.172-176
7. Бидайбеков Е.Ы., Гриншкун В.В., Бостанов Б.Г., Умбетбаев К.У. О разработке и использовании образовательного портала по геометрическому наследию Аль-Фараби в качестве средства информатизации обучения истории математики // Вестник Московского городского педагогического университета №4(34), Москва, 2015
8. Государственная программа «Мәденимұра» - Культурное наследие Казахстана:- http://www.madenimura.kz/ru /government-program-madenimura/programs-madenimura/
9. Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Умбетбаев К.У. Об использовании компьютерной программы Geogebra при обучении математическому наследию аль-Фараби // Мат-лы I Международной научно-практической конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения - 2016». - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 27-30 сентября 2016. - С.199-204.
10. Кубесов А.К. Математическое наследие аль-Фараби. Алма-Ата, «Наука», 1974 г., 246 с.
11. Курант Р., РоббинсГ. Что такое математика? (Элементарный очерк идей и методов) – 3-е изд., испр. и доп. – М.:МЦМНО, 2001. -586 с.
12. Математическое наследие аль-Фараби. Научно-образовательный портал. – http://alfarabi.kaznpu.kz

References

1. Carry J. Tee (University of Aucland), Kubesov A.K. The Mathematical Heritage of al-Farabi(in Russian). Journal for the history of Arabic science. -No.1 (1978), pp. 150–153.
2. Rescher N. Al-Farabi: An Annotated Bibliography. University of Pittsburgh, 1962.
3. Al'-Farabi Matematicheskie traktaty. Alma-Ata, «Nauka», 1972 g. - 318 s.

4. Bidajbekov E.Y., Bostanov B.G., Kamalova G.B. The mathematical heritage of Al-Farabi by A.Kubesov in modern conditions of educations // Materialy IX mezhdunarodnogo matematicheskogo kongressa ISAAC. g. Krakov, Pol'sha, 5-9 avgusta 2013 g. - С. 33-34.
5. Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G., Dzhanaberdieva S.A. Al Farabidin matematikalyk mұralary zamanaui bilim beru ajasynda // ҚazҰU Habarshysy. Sajasattanu, filosofija, madeniettanu serijasy. №2(51), Almaty. - 2015. - 50-57 b.
6. Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G., Salgozha I.T., Torebekova R.K. Formirovanie IKT - kompetencii vo vneklassnoj rabote matematicheskomu naslediju al'-Farabi // Mat-ly I Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Informatizacija obrazovanija i metodika jelektronnogo obuchenija - 2016». - Krasnojarsk: Sib. feder. un-t, 27-30 sentjabrja 2016. - S.172-176
7. Bidajbekov E.Y., Grinshkun V.V., Bostanov B.G., Umbetbaev K.U. O razrabotke i ispol'zovanii obrazovatel'nogo portala po geometricheskomu naslediju Al'-Farabi v kachestve sredstva informatizacii obuchenija istorii matematiki // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta №4(34), Moskva, 2015.
8. Gosudarstvennaja programma «Madenimura» - Kul'turnoe nasledie Kazahstana:- http://www.madenimura.kz/ru /government-program-madenimura/programs-madenimura/.
9. Kamalova G.B., Bostanov B.G., Umbetbaev K.U. Ob ispol'zovanii komp'juternoj programmy Geogebra pri obuchenii matematicheskomu naslediju al'-Farabi // Mat-ly I Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Informatizacija obrazovanija i metodika jelektronnogo obuchenija - 2016». - Krasnojarsk: Sib. feder. un-t, 27-30 sentjabrja 2016. - S.199-204.
10. Kubesov A.K. Matematicheskoe nasledie al'-Farabi. Alma-Ata, «Nauka», 1974 g., 246 s.
11. Kurant R., RobbinsG. Chto takoe matematika? (Jelementarnyj ocherk idej i metodov) – 3-e izd., ispr. i dop. – M.:MCMNO, 2001. -586s.
12. Matematicheskoe nasledie al'-Farabi. Nauchno-obrazovatel'nyj portal. – http://alfarabi.kaznpu.kz

Поступила: 10.09.2016

Об авторах:

Бидайбеков Есен Ыкласович, д.п.н., профессор, заведующий кафедрой Информатики и информатизации образования Казахского национального педагогического университета имени Абая, email: esen_bidaibekov@mail.ru;

Камалова Гульдина Большевиковна, д.п.н., профессор кафедры Информатики и информатизации образования Казахского национального педагогического университета имени Абая, email: g_kamalova@mail.ru;

Бостанов Бектас Ганиевич, к.п.н., старший преподаватель, заместитель заведующего кафедры Информатики и информатизации образования Казахского национального педагогического университета имени Абая, email: bbgu@mail.ru;

Умбетбаев Кайрат Усенбаевич, докторант 3-курса по специальности 6D011100-информатика, email: kairatuu@mail.ru.