

Юмагулов М.Г., Сухоруков А.В.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

**АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК
ЛИБРАЦИИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MAPLE**

АННОТАЦИЯ

В статье приводятся основные этапы алгоритма построения областей устойчивости точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. Алгоритм основан на методах теории нелинейных колебаний исследования устойчивости стационарных решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, зависящих от малого параметра. Алгоритм реализован с помощью математического пакета Maple.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Задача трех тел; точки либрации; устойчивость; область устойчивости; бифуркация; периодические решения; параметр.

Yumagulov M.G., Sukhorukov A.V.

Bashkir State University, Ufa, Russia

**THE ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING THE BOUNDARIES OF THE STABILITY
REGIONS OF LIBRATION POINTS IN THE THREE-BODY PROBLEM WITH THE HELP
OF PACKAGE MAPLE**

ABSTRACT

The article presents the main stages of the algorithm for constructing the stability regions of libration points of a flat elliptic restricted three-body problem. The algorithm is based on methods of the theory of nonlinear oscillations, of studying the stability of stationary solutions of linear differential equations with periodic coefficients depending on a small parameter. The algorithm is implemented with the help of mathematical package Maple.

KEYWORDS

The three-body problem; the libration points; stability; the stability region; bifurcation; periodic solutions; parameter.

Введение

Одной из наиболее интересных в небесной механике и ее приложениях является ограниченная эллиптическая задача трех тел и различные ее модификации (см., например, [1, 4, 6, 7] и имеющуюся там библиографию). Дифференциальные уравнения этой задачи занимают одно из центральных мест в математике и механике. Несмотря на относительную простоту формулировок и прозрачность основных формул эти уравнения представляют собой чрезвычайно сложный объект исследования, привлекающий повышенное внимание многих поколений ученых - математиков, механиков, физиков и др. Здесь разработан ряд методов исследования, нашедших многочисленные приложения в математике, небесной механике, астрономии и других науках. Неугасающее внимание к исследованию дифференциальных уравнений задач небесной механики связано не только с тем, что они находят свое применение при изучении движения небесных тел. Эти уравнения демонстрируют огромное многообразие качественного поведения решений, от самых простых до сложных хаотических движений. Дифференциальные уравнения задач небесной механики зависят от различных параметров, что может приводить к тем или иным сценариям бифуркационного поведения.

В настоящей статье рассматривается плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел, уравнения движения которой в координатах Невилла имеют вид (см., например, [4, 6]):

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \rho \left(x - \mu + \frac{\mu - 1}{u^3} x - \frac{\mu}{v^3} (x - 1) \right), \\ y'' + 2x' = \rho \left(y + \frac{\mu - 1}{u^3} y - \frac{\mu}{v^3} y \right), \end{cases} \quad (1)$$

здесь $u = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $v = [(x - 1)^2 + y^2]^{1/2}$, $\rho = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos t}$, μ - параметр масс ($0 < \mu < 1$), ε - эксцентриситет кеплеровской орбиты ($0 \leq \varepsilon < 1$).

Система (1) имеет пять постоянных решений - точек либрации: прямолинейных L_1, L_2 и L_3 и треугольных L_4 и L_5 . В плоскости (x, y) прямолинейные точки либрации лежат на прямой $y = 0$, а треугольные точки либрации имеют координаты $L_4(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ и $L_5(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Координаты прямолинейных точек либрации, в отличие от треугольных, зависят от параметра μ и явно не выписываются; найти их можно лишь приближенно.

Динамические свойства точек либрации важны как в теоретическом, так и в практическом плане. Здесь особо интересны и важны вопросы об устойчивости по Ляпунову точек либрации и, в частности, зависимости свойств устойчивости от параметров μ и ε , вопросы о существовании в окрестностях точек либрации ограниченных и периодических решений, о качественных перестройках (бифуркациях) поведения решений системы (1). Отметим, что прямолинейные точки либрации неустойчивы при всех μ и малых ε . В то же время треугольные точки либрации могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми (более детально это обсуждается ниже) и, следовательно, в их окрестностях возможны различные бифуркации.

Нас будут интересовать как вопросы об устойчивости треугольных точек либрации, так и вопросы о бифуркациях в окрестностях этих точек. С этой целью в плоскости параметров (μ, ε) системы (1) определим прямоугольник $\Pi = \{(\mu, \varepsilon) : 0 < \mu < 1, 0 \leq \varepsilon < 1\}$. Множество $G \subset \Pi$ будем называть *областью устойчивости системы (1)*, если для любого $(\mu, \varepsilon) \in G$ треугольные точки либрации системы (1) устойчивы в линейном приближении, а для любого $(\mu, \varepsilon) \in F = \Pi \setminus G$ эти точки неустойчивы в линейном приближении. При этом множество F будем называть *областью неустойчивости системы (1)*. Точку (μ, ε) будем называть *границей области устойчивости системы (1)*, если в каждой ее окрестности имеются точки из G и F . Множество Γ граничных точек будем называть *границей области устойчивости системы (1)*.

Обратим внимание на то, что в приведенных здесь понятиях термины «устойчивость» и «неустойчивость» понимаются как устойчивость и неустойчивость точек либрации в линейном приближении. Вопросам построения областей устойчивости системы (1) и их границ посвящены многочисленные исследования. Известные здесь наиболее полные результаты были получены во второй половине прошлого столетия (см. [6] и имеющуюся там библиографию). Исследования в указанном направлении активно продолжаются (см., например, [2, 5, 11, 12]). На Рис. 1. изображены области устойчивости и неустойчивости системы (1) для малых значений μ .

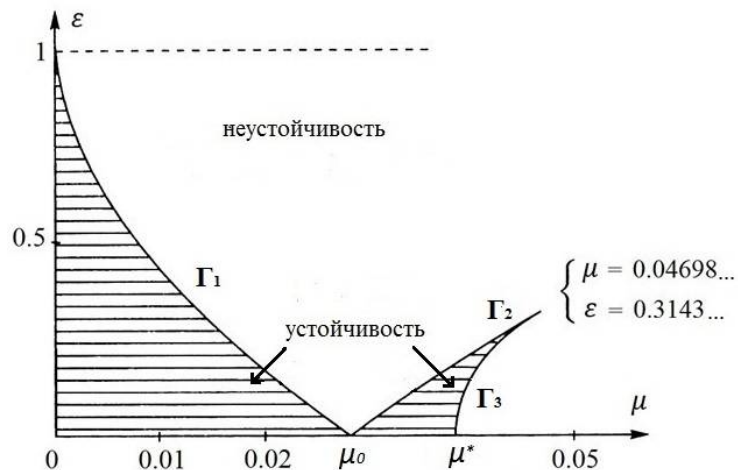


Рис. 1. Области устойчивости и неустойчивости треугольных точек либрации.

Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,028595 \dots, \quad \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0,038520 \dots \quad (2)$$

Заштрихованная область соответствует устойчивости. Граница области устойчивости образована тремя непрерывными линиями Γ_1, Γ_2 и Γ_3 . При переходе параметров (μ, ε) через границы области устойчивости возможны различные бифуркации в окрестностях треугольных точек либрации системы (1), в том числе возникновение периодических и квазипериодических решений (см., например, [1, 3, 9, 10]).

Вопросы построения границ областей устойчивости системы (1) являются сложными как в теоретическом плане, так и с вычислительной точки зрения, так как они приводят к необходимости чрезвычайно сложных расчетов, вызванных, в первую очередь, неавтономностью основных уравнений задачи. Известные алгоритмы основаны на сложных конструкциях и соответствующих компьютерных вычислениях (см., например, [6, 11, 12]). В настоящей работе предлагается новая схема определения границ областей устойчивости системы (1). Предлагаемая схема построения областей устойчивости использует систему компьютерной математики Maple.

Основные результаты

Приведем сначала основные результаты работы относительно исследования областей устойчивости системы (1).

Теорема 1. Для любого $\mu \in (\mu^*, 1 - \mu^*)$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \leq \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (1) неустойчивы.

Теорема 2. Для любого $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1 - \mu^*, 1)$, $\mu \neq \mu_0, \mu \neq 1 - \mu_0$, существует $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \leq \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (1) устойчивы в линейном приближении.

Теорема 3. При $\mu \in (0, \mu^*)$ и малых ε граница области устойчивости системы (1) состоит в точности из трех гладких кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3 , первые две из которых выходят на ось μ в плоскости параметров (μ, ε) в точке $\mu = \mu_0$, а третья - в точке $\mu = \mu^*$.

Аналогичное утверждение имеет место и для значений $\mu \in (1 - \mu^*, 1)$ и малых ε . Рассмотрим теперь задачу построения границы областей устойчивости системы (1) при $\mu \in (0, \mu^*)$. С целью построения кривых Γ_1 и Γ_2 положим $\delta = \mu - \mu_0$. Тогда кривые Γ_1 и Γ_2 естественно строить в виде функций $\varepsilon = f_1(\delta)$ и $\varepsilon = f_2(\delta)$, определенных и монотонных на промежутках $(-\mu_0, 0]$ и $[0, \mu_3 - \mu_0)$ (здесь $\mu_3 = 0,04698\dots$) соответственно, при этом $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Теорема 4. Функции $f_1(\delta)$ и $f_2(\delta)$ представимы в виде:

$$f_1(\delta) = -\varepsilon_1 \delta + \psi_1(\delta), \quad f_2(\delta) = \varepsilon_1 \delta + \psi_2(\delta), \quad (3)$$

в котором

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3456}{11}} = 17,725174\dots, \quad (4)$$

а нелинейности $\psi_j(\delta)$ удовлетворяют соотношениям: $\psi_j(\delta) = O(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Кривую Γ_3 также можно строить в виде функции $\varepsilon = f_3(\delta)$, где $\delta = \mu - \mu^*$; эта функция определена и монотонна на промежутке $[0, \mu_3 - \mu^*)$, при этом $f_3(0) = 0$.

Теорема 5. Функция $f_3(\delta)$ представима в виде:

$$f_3(\delta) = \zeta_1 \sqrt{\delta} + \psi_3(\delta), \quad (5)$$

в котором

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{\frac{621}{4}} = 3,529863\dots, \quad (6)$$

а нелинейность $\psi_3(\delta)$ удовлетворяет соотношению: $\psi_3(\delta) = O(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Отметим, что приводимая ниже схема построения границ областей устойчивости системы (1) позволяет получить более полные чем (3) и (5) формулы для представления функций $f_j(\delta)$, в частности, формулы вида:

$$f_1(\delta) = -\varepsilon_1 \delta + \varepsilon_2 \delta^2 + O(\delta^2), \quad f_2(\delta) = \varepsilon_1 \delta + \varepsilon_2 \delta^2 + O(\delta^2), \quad f_3(\delta) = \zeta_1 \sqrt{\delta} + \zeta_2 \delta + O(\delta) \quad (7)$$

при этом указывается алгоритм вычисления значений коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \zeta_1$ и ζ_2 .

Отметим также, что аналогичные теоремам 1-5 утверждения (в явной или неявной форме) были получены и в работах других авторов (см., например, [4, 6, 7]). В настоящей работе теоремы 1-5 получены с использованием предлагаемой ниже новой схемы построения границы областей устойчивости треугольных точек либрации системы (1) в линейном приближении.

Построение областей устойчивости

В этом параграфе приводится схема построения границ областей устойчивости системы (1).

Предварительные преобразования

На первом этапе предлагаемой схемы проведем некоторые предварительные

преобразования исходной системы (1). Путем введения новых переменных $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = x', u_4 = y'$, перейдем от (1) к равносильной системе:

$$\begin{cases} u_1' = u_3, \\ u_2' = u_4, \\ u_3' = 2u_4 + \rho \left(u_1 - \mu + \frac{\mu-1}{(u_1^2+u_2^2)^{3/2}} u_1 - \frac{\mu}{((u_1-1)^2+u_2^2)^{3/2}} (u_1-1) \right), \\ u_4' = -2u_3 + \rho \left(u_2 + \frac{\mu-1}{(u_1^2+u_2^2)^{3/2}} u_2 - \frac{\mu}{((u_1-1)^2+u_2^2)^{3/2}} u_2 \right), \end{cases} \quad (8)$$

т.е. к системе вида

$$u' = F(u, \varepsilon, \mu, t), \quad u \in R^4, \quad (9)$$

где $F(u, \varepsilon, \mu, t)$ – вектор-функция, определяемая правой частью системы (8).

Точки либрации системы (1) соответствуют постоянным решениям системы (9). В частности, треугольные точки либрации L_4 и L_5 соответствуют следующим постоянным решениям системы (9):

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поведение системы (9) одинаково в окрестностях точек либрации v_4 и v_5 . Для определенности будем изучать поведение системы (9) в окрестности точки либрации v_4 . Так как нас интересуют вопросы устойчивости точки либрации v_4 в линейном приближении, то перейдем от (9) к линеаризованному (в точке v_4) уравнению

$$h' = A(\varepsilon, \mu, t)h, \quad h \in R^4, \quad (10)$$

где $A(\varepsilon, \mu, t) = F_u'(v_4, \varepsilon, \mu, t)$ – матрица Якоби вектор-функции $F(u, \varepsilon, \mu, t)$, вычисленная в точке $u = v_4$; матрица $A(\varepsilon, \mu, t)$ равна:

$$A(\varepsilon, \mu, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4}\rho & \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & \frac{9}{4}\rho & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

В силу равенства $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon \cos t}$ система (10) при $0 \leq \varepsilon < 1$ представима в виде

$$h' = A_0(\mu)h + (-\varepsilon \cos t + \varepsilon^2 \cos^2 t)A_1(\mu)h + \varepsilon^3 A_3(\varepsilon, \mu, t)h, \quad h \in R^4 \quad (11)$$

где

$$A_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3(\varepsilon, \mu, t) = -\frac{\cos^2 t}{1+\varepsilon \cos t} A_1(\mu).$$

Ниже ограничимся построением только кривых Γ_1 и Γ_2 , при этом для удобства (там, где это не вызывает путаницы) соответствующие искомые функции из (7) будем обозначать одинаково: $f(\delta) = \varepsilon_1 \delta + \varepsilon_2 \delta^2 + \psi(\delta)$, в котором коэффициенты ε_1 и ε_2 требуют определения, а нелинейность $\psi(\delta)$ удовлетворяет соотношению $\psi(\delta) = O(\delta^3)$ при $\delta \rightarrow 0$. По сути, речь идет о вычислении производных $f'(0) = \varepsilon_1$ и $f''(0) = 2\varepsilon_2$.

Подставим в (11) функции $\varepsilon = f(\delta)$ и $\mu = \mu_0 + \delta$, где μ_0 – число из (2), и перейдем к зависящему от малого параметра δ уравнению

$$\frac{dh}{dt} = [A_0 + \delta P_1(t, \varepsilon_1) + \delta^2 P_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)]h + \delta^3 P_3(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta)h, \quad (12)$$

где $A_0 = A_0(\mu_0)$, $P_1(t, \varepsilon_1) = B_0 - \varepsilon_1 \cos t A_1$, $P_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1^2 \cos^2 t A_1 - \varepsilon_1 \cos t B_0 - \varepsilon_2 \cos t A_1$,

$$B_0 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = A_1(\mu_0),$$

а матрица $P_3(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta)$ является 2π -периодической по t и непрерывной.

3.2. Основные этапы предлагаемого алгоритма

Приведем основные этапы предлагаемого алгоритма компьютерного моделирования границ области устойчивости системы (1) с использованием пакета Maple. Приводимые ниже формулы получены с помощью аппарата символьных вычислений этого пакета, т.е. являются точными.

1. **Первый этап.** Найдем собственные векторы матрицы A_0 , соответствующие ее собственным значениям $\lambda_1 = \frac{1}{2}i, \lambda_2 = -\frac{1}{2}i, \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Получим:

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} - i \\ 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{2}i \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} + i \\ 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}i \\ 1 \\ 1 - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_4 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i \\ 1 \\ 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}.$$

2. **Второй этап.** Перейдем в уравнении (12) к базису из векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$. Для этого составим из этих векторов матрицу Q и произведем в (12) замену $h = Qy$.

$$Q = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} - i & -\sqrt{\frac{3}{2}} + i & -\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}i & -\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i & 1 - \frac{i}{\sqrt{2}} & 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}.$$

Тогда получим равносильное уравнение

$$y' = [\tilde{A}_0 + \delta \tilde{P}_1(t, \varepsilon_1) + \delta^2 \tilde{P}_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)]y + \delta^3 \tilde{P}_3(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta)y, \quad y \in C^4, \quad (13)$$

где

$$\tilde{A}_0 = Q^{-1}A_0Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}_1(t, \varepsilon_1) = \tilde{B}_0 - \varepsilon_1 \cos t \tilde{A}_1, \quad \tilde{P}_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1^2 \cos^2 t \tilde{A}_1 - \varepsilon_1 \cos t \tilde{B}_0 - \varepsilon_2 \cos t \tilde{A}_1;$$

здесь $\tilde{B}_0 = Q^{-1}B_0Q$ и $\tilde{A}_1 = Q^{-1}A_1Q$. Подсчет показывает, что верны равенства:

$$\tilde{B}_0 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} -2i\sqrt{6} & -2i\sqrt{6} - 4 & -\frac{5\sqrt{6}}{3}i + \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 & -\frac{5\sqrt{6}}{3}i - \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \\ 2i\sqrt{6} - 4 & 2i\sqrt{6} & \frac{5\sqrt{6}}{3}i - \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 & \frac{5\sqrt{6}}{3}i + \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \\ \frac{5\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{3} + 2 & \frac{5\sqrt{2}}{2}i + \sqrt{3} + 2 & 2i\sqrt{2} & 2i\sqrt{2} + 4 \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}i + \sqrt{3} + 2 & -\frac{5\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{3} + 2 & -2i\sqrt{2} + 4 & -2i\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{4}i & -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3}{4}i & i\sqrt{3} + i - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\sqrt{3} + i - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3}{4}i & -\frac{9}{4}i & i\sqrt{3} - i - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\sqrt{3} - i - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{7\sqrt{3}}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}i + \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}i + \sqrt{6} & \frac{7\sqrt{3}}{4}i \end{bmatrix}.$$

Далее для преобразования системы (13) будем использовать метод М.Розо [8] исследования устойчивости стационарных решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, зависящих от малого параметра. При этом без специальных ссылок будем использовать соответствующие термины и понятия из указанного источника.

3. **Третий этап.** Учитывая, что для системы (13) не выполняется условие отсутствия T -резонанса при $T = 2\pi$, произведем в этой системе замену $y = e^{iP_1 t} z$, где

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим систему

$$z' = [\hat{A} + \delta \hat{P}_1(t, \varepsilon_1) + \delta^2 \hat{P}_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)]z + \delta^3 \hat{P}_3(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta)z, \quad (14)$$

где $\hat{P}_j = e^{-iP_1 t} \tilde{P}_j e^{iP_1 t}$,

$$\hat{A} = \tilde{A}_0 - iP_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}.$$

Для системы (14) условие отсутствия 2π -резонанса выполнено.

Обозначим элементы матриц \tilde{B}_0 и \tilde{A}_1 через k_{ij} и l_{ij} соответственно. Положим $\hat{B}_0 = e^{-iP_1 t} \tilde{B}_0 e^{iP_1 t}$ и $\hat{A}_1 = e^{-iP_1 t} \tilde{A}_1 e^{iP_1 t}$. Тогда

$$\hat{B}_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & e^{-it}k_{12} & e^{-it}k_{13} & e^{-it}k_{14} \\ e^{it}k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ e^{it}k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ e^{it}k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} l_{11} & e^{-it}l_{12} & e^{-it}l_{13} & e^{-it}l_{14} \\ e^{it}l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ e^{it}l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ e^{it}l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы \hat{P}_1 и \hat{P}_2 в правой части системы (14) могут быть определены равенствами

$$\hat{P}_1(t, \varepsilon_1) = \hat{B}_0 - \varepsilon_1 \text{cost} \hat{A}_1, \quad \hat{P}_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1^2 \cos^2 t \hat{A}_1 - \varepsilon_1 \text{cost} \hat{B}_0 - \varepsilon_2 \text{cost} \hat{A}_1.$$

В соответствии с методом М.Розо от (14) перейдем к системе

$$y' = [\hat{A} + \delta S_1(\varepsilon_1) + \delta^2 S_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \delta^3 S_3(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)]y \quad (15)$$

с постоянными матрицами S_1 и S_2 и непрерывной 2π -периодической матрицей S_3 . Тем самым свойства устойчивости системы (14) (а значит, и свойства устойчивости треугольных точек либрации в линейном приближении исходной системы (1)) можно определить с помощью постоянной матрицы $\hat{A} + \delta S_1(\varepsilon_1) + \delta^2 S_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

4. **Четвертый этап.** Матрица S_1 находится как решение матричного уравнения

$$\int_0^{2\pi} e^{-\hat{A}t} S e^{\hat{A}t} dt = \int_0^{2\pi} e^{-\hat{A}t} \hat{P}_1(t, \varepsilon_1) e^{\hat{A}t} dt.$$

Применяя пакет Maple, по элементам находим единственное решение этого уравнения:

$$S_1^*(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 9i\sqrt{2} & \varepsilon_1\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{8}i\right) & \frac{k_{13}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} - \frac{\varepsilon_1 l_{13}(\sqrt{3}-3)}{3(\sqrt{3}-1)} & -\frac{k_{14}(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} - \frac{\varepsilon_1 l_{14}(\sqrt{3}+3)}{3(\sqrt{3}+1)} \\ \varepsilon_1\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{8}i\right) & -9i\sqrt{2} & k_{23} - \frac{\varepsilon_1 l_{23}(\sqrt{3}+3)}{3(\sqrt{3}-1)} & k_{24} - \frac{\varepsilon_1 l_{24}(\sqrt{3}-3)}{3(\sqrt{3}+1)} \\ \frac{k_{31}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} - \frac{\varepsilon_1 l_{31}(\sqrt{3}-3)}{3(\sqrt{3}-1)} & k_{32} - \frac{\varepsilon_1 l_{32}(\sqrt{3}+3)}{3(\sqrt{3}-1)} & -3i\sqrt{6} & k_{34} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 l_{34} \\ \frac{k_{41}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} - \frac{\varepsilon_1 l_{41}(\sqrt{3}+3)}{3(\sqrt{3}+1)} & k_{42} - \frac{\varepsilon_1 l_{42}(\sqrt{3}-3)}{3(\sqrt{3}+1)} & k_{43} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 l_{43} & 3i\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Наряду с этой матрицей определим также матрицу $S_1 = S_1^* + \hat{A}C_0 - C_0\hat{A}$, где

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица C_0 подбирается так, чтобы выполнялось равенство:

$$S_1(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 9i\sqrt{2} & \varepsilon_1\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{8}i\right) & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{8}i\right) & -9i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3i\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с методом М.Розо собственные значения первого блока матрицы $S_1(\varepsilon_1)$ и определяют касательную к границе области устойчивости. Найдем собственные значения этого блока:

$$(9i\sqrt{2} - \lambda)(-9i\sqrt{2} - \lambda) - \varepsilon_1^2\left(\frac{6}{16} + \frac{9}{64}\right) = 0, \text{ т.е. } \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{8}\sqrt{33\varepsilon_1^2 - 10368}.$$

Отсюда получим число (4), при переходе через которое изменяется топологический тип матрицы $S_1(\varepsilon_1)$.

Применяя аналогичным способом к системе (15) второй шаг метода М.Розо, найдем матрицу $S_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, а затем и коэффициент ε_2 . Предлагаемый алгоритм нахождения границ областей устойчивости системы (1) позволяет построить эти границы в виде функций вида (7). При этом использование пакета Maple позволяет точно вычислять соответствующие коэффициенты.

Свойства спектра линеаризованной задачи

Использование символьных вычислений при построении граничных кривых Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 и, следовательно, получение точных значений коэффициентов ε_1 и ζ_1 в формулах (3) и (5) позволяют определить те свойства спектра линеаризованной задачи на указанных граничных кривых, которые важны, например, при изучении задач о бифуркациях в системе (1). Рассмотрим линейную систему (10). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Для всех точек (μ, ε) граничных кривых Γ_1 и Γ_2 линейная система (10) имеет мультипликатор -1 кратности 2. Для всех точек (μ, ε) граничной кривой Γ_3 линейная система (10) имеет пару мультипликаторов вида $e^{\pm 2\pi\varphi i}$ кратности 2, где $1-1/\sqrt{2} \leq \varphi \leq 1/2$.

Заключение

В статье рассмотрены задачи о построении областей устойчивости в линейном приближении треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. Предложена новая схема и разработан алгоритм построения границ областей устойчивости, получены приближенные формулы, описывающие эти границы. Определены свойства спектра линеаризованной задачи на границе областей устойчивости. Разработанный алгоритм реализован с помощью системы компьютерной математики Maple.

Литература

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
2. Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. ПММ. 2012. Т. 76. № 1. С. 80-133.
3. Брюно А.Д., Варин В.П. О семействе периодических решений ограниченной задачи трех тел. Астрон. вестник. 2008. Т. 42. № 3. С. 163-185.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1978. 456 с.
5. Куницын А.Л. О построении областей устойчивости в задаче трех тел методом исключения параметра // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 886-892.
6. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
7. Маршал К. Задача трех тел. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 640 с.
8. Розо~М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука. 1971. 288~с.

9. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркация 4π -периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. // *Астрономический журнал*. 2009. Т. 86, № 2. С. 170-174.
10. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел. // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2010. № 6. С. 82-89.
11. Gareth E. Roberts Linear Stability of the Elliptic Lagrangian Triangle Solutions in the Three-Body Problem. // *Journal of Differential Equations*, 2002. 182. Pp. 191-218.
12. Kovacs T. Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2013. V. 430. Issue 4. Pp. 2755-2760.

References

1. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoy i nebesnoy mekhaniki*. М.: VINITI, 1985. 304 s.
2. Batkhin A.B., Bryuno A.D., Varin V.P. Mnozhestva ustoychivosti mnogoparametricheskikh gamil'tonovykh sistem. *PMM*. 2012. Т. 76. № 1. S. 80-133.
3. Bryuno A.D., Varin V.P. O semeystve periodicheskikh resheniy ogranichennoy zadachi trekh tel. *Astron. vestnik*. 2008. Т. 42. № 3. S. 163-185.
4. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody*. М.: Nauka. 1978. 456 s.
5. Kunitsyn A.L. O postroenii oblastey ustoychivosti v zadache trekh tel metodom isklyucheniya parametra // *PMM*. 2009. Т. 73. Vyp. 6. S. 886-892.
6. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike*. М.: Nauka. 1978. 312 s.
7. Marshal K. *Zadacha trekh tel*. М.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy. 2004. 640 s.
8. Rozo~M. *Nelineynye kolebaniya i teoriya ustoychivosti*. М.: Nauka. 1971. 288~с.
9. Yumagulov M.G., Belikova O.N. Bifurkatsiya 4π -periodicheskikh resheniy ploskoy ogranichennoy ellipticheskoy zadachi trekh tel. // *Astronomicheskij zhurnal*. 2009. Т. 86, № 2. С. 170-174.
10. Yumagulov M.G., Belikova O.N. Bifurkatsii periodicheskikh resheniy v okrestnostyakh treugol'nykh tochek libratsii zadachi trekh tel. // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*. 2010. № 6. S. 82-89.
11. E. Gareth, Roberts Linear Stability of the Elliptic Lagrangian Triangle Solutions in the Three-Body Problem. // *Journal of Differential Equations*, 2002. 182. Pp. 191-218.
12. Kovacs T. Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2013. V. 430. Issue 4. Pp. 2755-2760.

Поступила 15.10.2016

Об авторах:

Юмагулов Марат Гаязович, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, yum_mg@mail.ru;

Сухоруков Артем Валерьевич, магистрант факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета, soohoy@bk.ru.