УДК 330.47

**Власов Д.А., Синчуков А.В.**

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва, Россия

# РАВНОВЕСИЕ НЭША В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ: ТЕХНОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ WOLFRAM DEMONSTRATION PROJECT

**АННОТАЦИЯ**

*В центре внимания статьи – моделирование и визуализация равновесных состояний в теоретико-игровых моделях средствами Wolfram demonstration project. Представленные девять результатов практической реализации биматричных игр снабжены содержательными комментариями, раскрывающими сущность равновесия Нэша в каждой конкретной ситуации. Выделенные примеры множеств равновесных состояний описывают полный набор случаев проявления равновесия Нэша в биматричных играх.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**

*Теория игр; платежная матрица; стратегия; оптимальная стратегия; биматричная игра; равновесие; визуализация; моделирование; математическая экономика; Wolfram.*

**Vlasov D.A., Sinchukov A.V.**

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

# NASH EQUILIBRIUM IN BIMATRIX GAMES: WOLFRAM DEMONSTRATION PROJECT TECHNOLOGY OF MODELING AND VISUALIZATION

**ABSTRACT**

*The article concentrates on the modeling and visualization of equilibrium conditions in game-theoretical models with Wolfram demonstration project technologies. Nine main results of practical realization of bimatrix games are presented. Detailed comments which show the core of Nash's equilibrium in each case are presented. In a lot of examples different cases of Nash's equilibrium in bimatrix games are demonstrated.*

**KEYWORDS**

*Game theory; payoff matrix; strategy; optimal strategy; bimatrix game; balance; visualization; modeling; mathematical economics; Wolfram.*

Теоретико-игровые модели занимают особое место в системе математических методов моделирования и прогнозирования экономики. Благодаря их возникновению в начале XX века и последующему развитию у исследователей появился специфический инструмент, позволяющий анализировать ситуации, характеризующиеся конкурентным взаимодействием нескольких субъектов, неполнотой информацией, активизацией рисков различной природы [11]. Такие ситуации часто встречаются в экономике, финансах, политике. Ретроспективный анализ возникновения и развития методов и моделей теории игр представлен в статье [3]. Теория игр, представляющая особый интерес благодаря своими культурно-историческим и философским аспектами (Йохан Хейзинг, Ойген Финк), ставшая неотъемлемой частью современной экономической кибернетики [6], стимулирует развитие методов и моделей экономической информатики.

Равновесие Нэша («*Nash equilibrium*») является фундаментальной закономерностью классических (некооперативных) игр. Его сущность заключается в том, что при определённых и заранее известных правилах игры, в ситуации отсутствия коммуникаций игроки приходят к **седловой точке – точке устойчивого равновесия**, которая может существенно отличаться от оптимальной точки, достижимой при согласованных действиях [9]. В рамках теоретико–игровой концепции взаимодействия экономических субъектов, рынок развивается в направлении сговора олигополий, так как желание получать ещё больше и больше никуда не исчезает, а без предварительных договоренностей из равновесия по Нэшу выйти невозможно. Понятие «*Nash equilibrium*» является не просто абстрактным термином, а важным теоретическим обобщением множества реально существующих экономических закономерностей.

Классический пример моделирования взаимодействия «*Prisoners dilemma*» и его экономические аналоги [4] (игроки, действуя исключительно в собственных интересах, с большой вероятностью стремятся увеличить собственные выигрыши и таким образом не получат ничего или даже приобретут убытки) соответствуют стратегической тенденции. Чем более специфическими являются соотношения значений элементов платежных матриц конкретной биматричной игры, тем наиболее вероятнее система игрового взаимодействия будет приводить участников игры к наихудшим вариантам. Таким образом проявляется «невидимая рука рынка», однако направлением является не всеобщее благо, а кризисная ситуация. Если в матричной игре с двумя с игроками и двумя матрицами выигрышей существует состояние, такое что при выборе не соответствующей ему стратегии любым из игроков в отдельности его выигрыш уменьшится, то это состояние является «равновесным» для данной игры [7]. Важно отметить, что при многократном повторении биматричной игры в одних и тех же условиях последовательность стратегий участников игры приобретают тенденцию стремления к этому состоянию, даже если в этой модели присутствуют и другие множества комбинаций стратегии (состояния), в рамках которых выигрыш игроков в целом или по отдельности выше.

С математической точки социально-экономические ситуации, приводящие к биматричным играм, формализуются в виде двух платежных матриц, первая из которых содержит возможные выигрыши первого игрока, вторая матрица соответствует выигрышам второго игрока. Для рассматриваемо случая платежные матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы данных платежных матриц имеют содержательный экономический смысл – это выигрыши игроков, при этом отрицательное значение элемента матрицы означает «проигрыш», нулевое значение – «ничью» как результат игрового взаимодействия. Множества стратегий игроков

$$A = \{A_1, A_2\}, \; B = \{B_1, B_2\}.$$

Существует два подхода к определению оптимальных (равновесных) стратегий игроков. Каждый из подходов дополняет друг друга. Первый, классический подход – **определение ситуации равновесия в виде чистых стратегий**. Второй подход, разработанный в математической экономике гораздо позднее первого, подразумевает **определение ситуации равновесия в виде смешанных стратегий**. Смешанные стратегии являются обобщение чистых стратегий и реализуются, как правило, в условиях многократного повторения игры в одних и тех же условиях (условие применения аппарата теории вероятностей). Смешанные стратегии для рассматриваемой игры имеют вид

$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, где $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ для первого игрока,

$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, где $y_1 + y_2 = 1$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ для второго игрока.

В случае, если одно из значений вероятностей равно единице, получаем частный случай – чистую стратегию игрока. Обратимся к результату моделирования и визуализации равновесия Нэша, представленного на рис. 1. Полученным результатам моделирования предшествовала реализация соответствующего вычислительного процесса [10].

Множество $M = \left\{(0; 1), \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right), (1; 0)\right\}$ следует интерпретировать следующим образом:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что рассматриваемая ситуация имеет три ситуации равновесия Нэша.

Ситуация, представленная на рис. 2 демонстрирует, что в зависимости от начальных данных (элементов платежных матриц), множество равновесных ситуаций может содержать разное число элементов. В данном случае $M = \{(1; 0)\}$, т.е. имеем единственное состояние равновесия, что соответствует следующим чистым стратегиям игроков $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

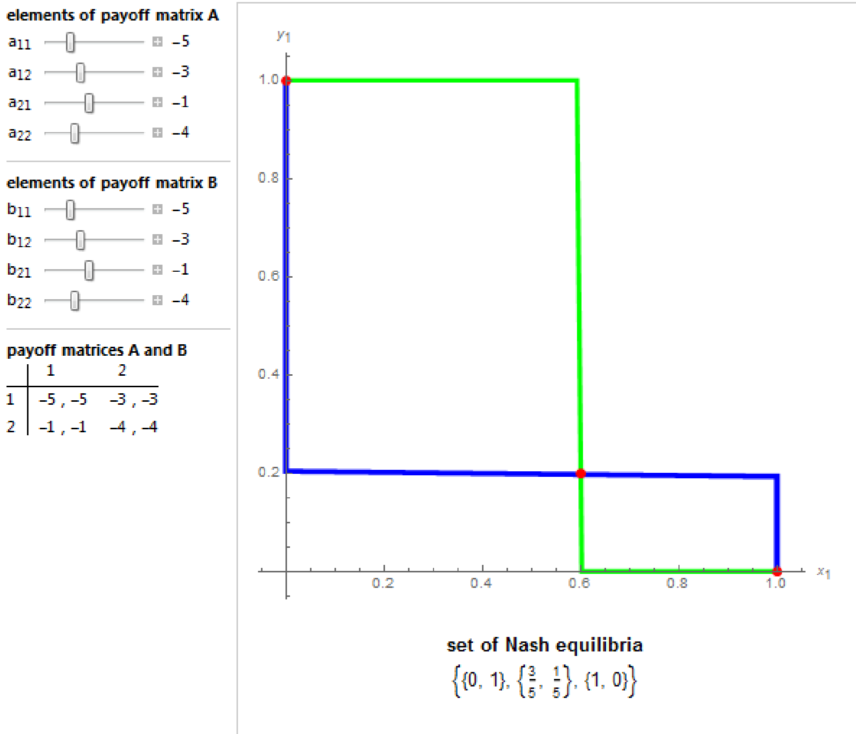


*Рис.1. Визуализация равновесия Нэша № 1*

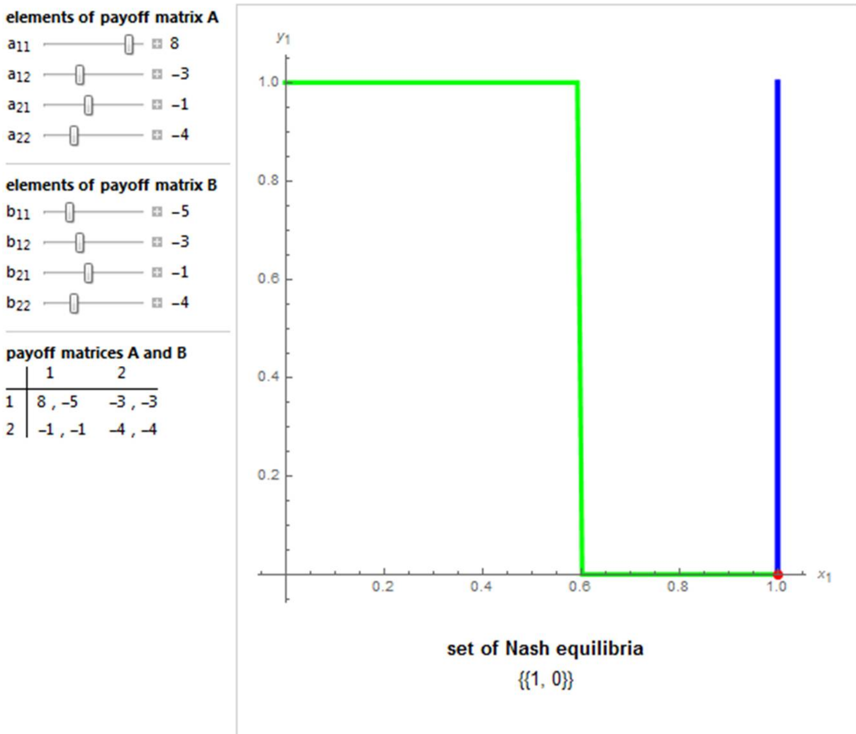


*Рис.2. Визуализация равновесия Нэша № 2*

Множество $M = \left\{ (0;1), \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{2}\right), (1;0) \right\}$, представленное на рис. 3 следует интерпретировать следующим образом $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

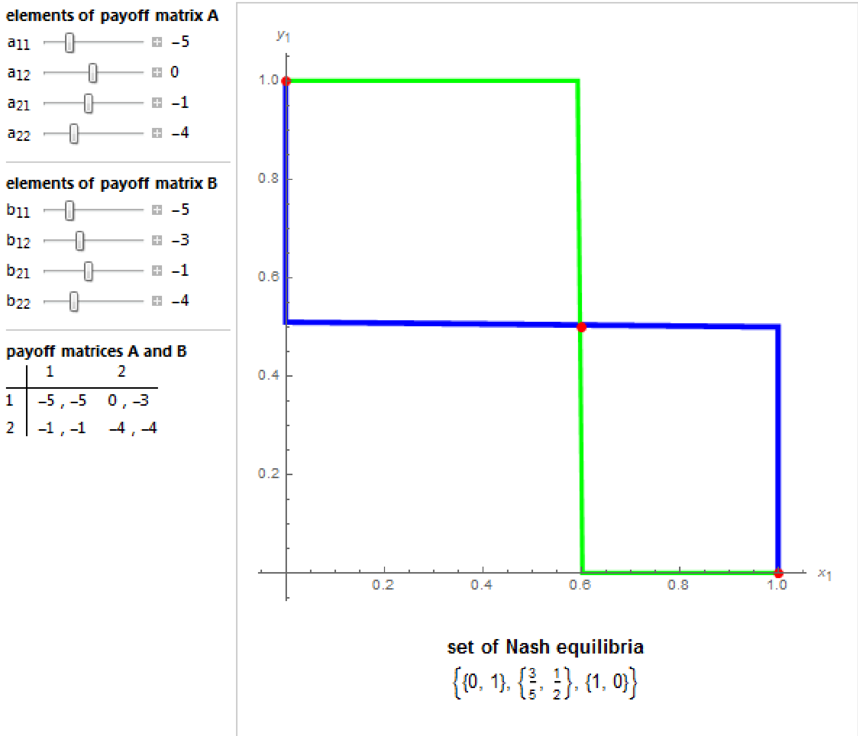


*Рис.3. Визуализация равновесия Нэша № 3*

Анализируя вторую пару стратегий $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ - следует обратить внимание на интересный результат: в этом случае стратегии $B_1$ и $B_2$ второго игрока являются равновероятными и $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В результате рассмотрения следующего четвертого случая получено множество $M = \left\{(0; 1), \left(\frac{3}{5}; 1\right), (1; 0)\right\}$ Его следует интерпретировать следующим образом

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одноэлементное множество $M = \{(0; 1)\}$ следует интерпретировать следующим образом $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - это единственное возможное равновесное состояние в рассматриваемой ситуации.

Интересно, что изменение матриц игры $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ на пару матриц $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ не оказало влияние на множества состояний равновесия биматричной игры.

Множество $M = \left\{\left(0; \frac{1}{5}\right), (0; 1), (1; 0)\right\}$ следует интерпретировать следующим образом

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{и}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество $M = \{(1; 0)\}$, представленное на рис. 9 содержит только одно равновесное состояние, что соответствует следующим смешанным стратегиям игроков $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

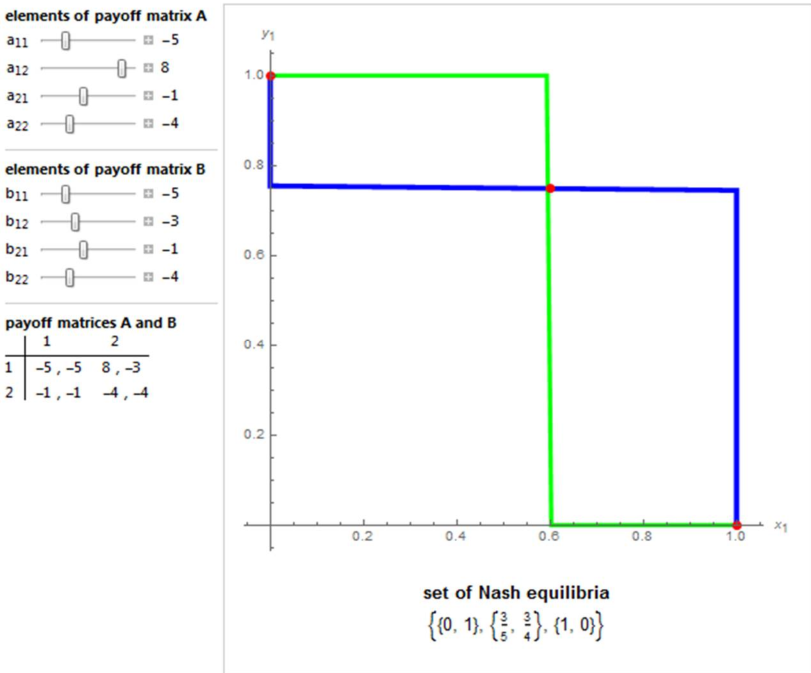


*Рис.4. Визуализация равновесия Нэша № 4*

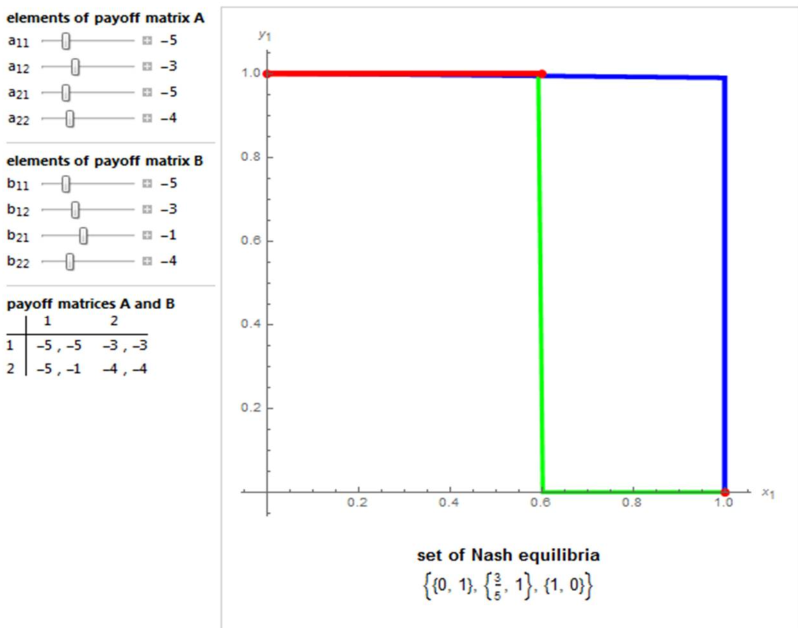


*Рис.5. Визуализация равновесия Нэша № 5*

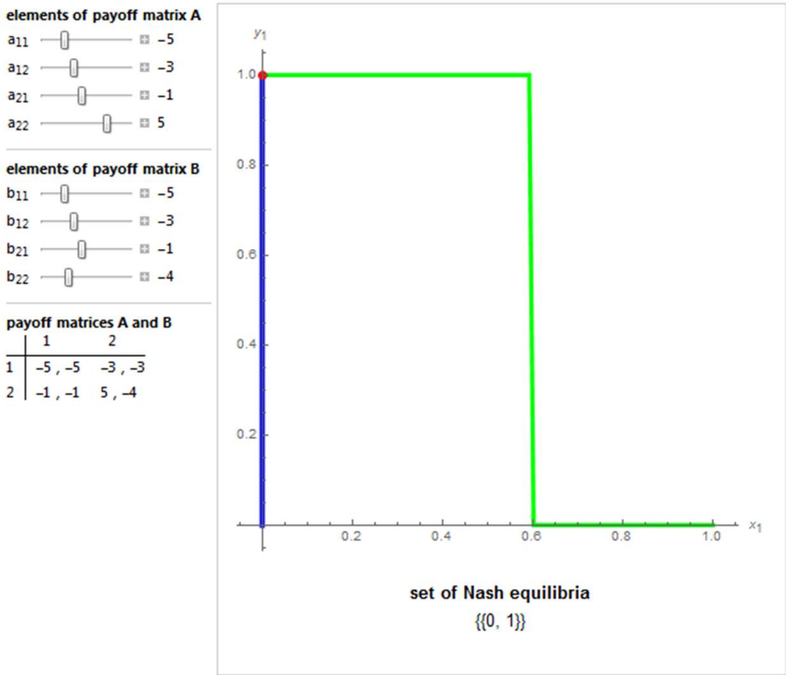


*Рис.6. Визуализация равновесия Нэша № 6*

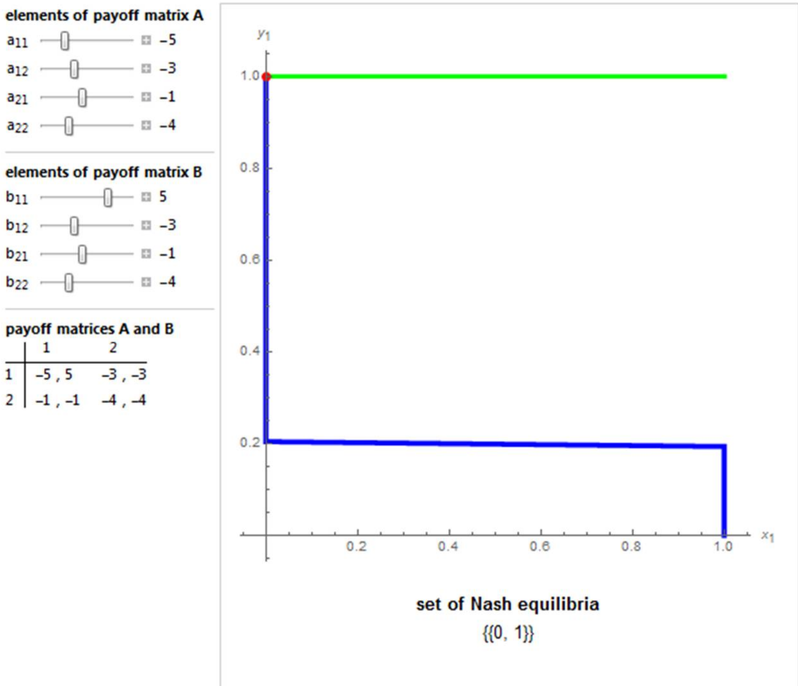


*Рис7. Визуализация равновесия Нэша № 7*

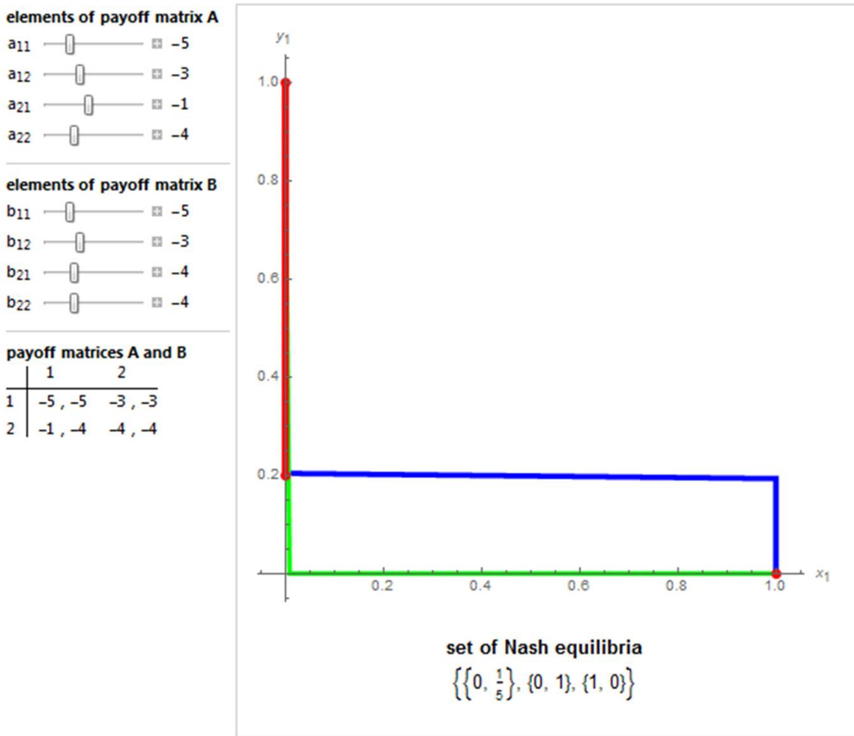


*Рис.8. Визуализация равновесия Нэша № 8*

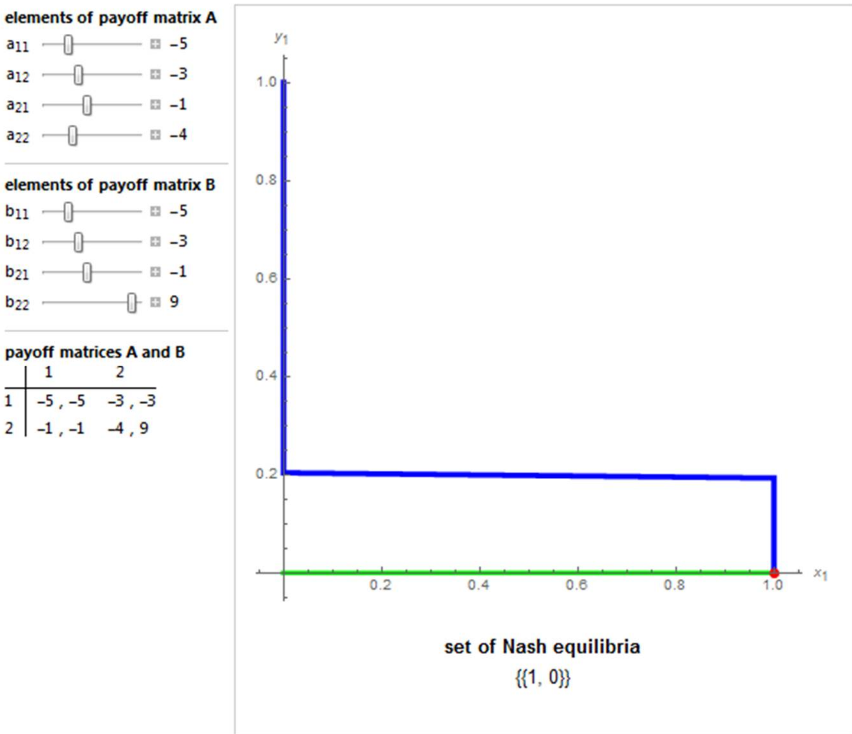


*Рис.9. Визуализация равновесия Нэша № 9*

**Выводы**

1. Технология *Wolfram demonstration project* предоставляет широкие возможности по моделированию экономических ситуаций в виде теоретико-игровых моделей, учитывающих специфику взаимодействия нескольких экономических субъектов.
2. Технологии *Wolfram, WolframAlpha, Wolfram demonstration project* предоставляют широкие возможности по визуализации экономических данных, проблем и ситуаций, что позволяет по-новому реализовать классический принцип наглядности обучения [5].
3. Технология *Wolfram demonstration project* позволяет разрабатывать уникальные

приложения под конкретные задачи математической экономики, обеспечивая современный уровень реализации информационных технологий в области экономики и финансов [2].

4. Технология *Wolfram demonstration project* успешно внедрена в учебный процесс на факультете математической экономики, статистики и информатики Российского экономического университета им. Г.В.Плеханова, характеризуется высокими дидактическими характеристиками, позволяет реализовать интеграцию информационных и педагогических технологий [1] в методической системе прикладной математической подготовки бакалавра экономики.

5. С методической точки зрения целесообразное использование технологии *Wolfram demonstration project* способствует инструментальной реализации системы педагогических технологий [8], что способствует повышению качества профессиональной подготовки студентов бакалавриата и магистратуры.

6. С исследовательской точки зрения реализация технологии *Wolfram demonstration project* восполняет дефицит инструментальных средств исследования современных экономических проблем и ситуаций, открывает возможности количественного анализа и последующей содержательной интерпретации экономической теории.

## Литература

1. Власов Д. А. Интеграция информационных и педагогических технологий в системе прикладной математической подготовки будущего специалиста // Сибирский педагогический журнал. – 2009. – № 2. С. 109-117.
2. Власов Д. А. Информационные технологии в системе математической подготовки бакалавров: опыт МГГУ им. М.А. Шолохова // Информатика и образование. – 2012. - № 3. – С. 93-94.
3. Власов Д. А. Ретроспективный анализ развития методов и моделей теории игр // Инновационная наука. – 2016. - № 8-1. – С. 42-43.
4. Власов Д. А., Монахов В. М., Монахов Н. В. Математические модели и методы внутримодельных исследований. – М.: МГГУ им. М.А.Шолохова. – 2007. – 345 с.
5. Власов Д. А., Синчуков А. В. Новые технологии WolframAlpha при изучении количественным методов студентами бакалавриата // Вестник Российского университета дружбы народов. – Серия: Информатизация образования. – 2012.- № 4. – С. 43-53.
6. Власов Д. А. Особенности и математические основы современной экономической кибернетики // Техника. Технологии. Инженерия. – 2016. – №2. – С. 4-7.
7. Зельтен Рейнхард, Харшаньи Джон Общая теория выбора равновесия в играх. – М.: Экономическая школа, 2001. – 424 с.
8. Монахов В. М. Введение в теорию педагогических технологий. – Волгоград: Перемена, 2006. – 318 с.
9. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. – 708 с.
10. Синчуков А. В., Пантина И. В. Вычислительная математика. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия». – 2012. – 176 с.
11. Тихомиров Н. П., Тихомирова Т. М. Риск-анализ в экономике. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2010. – 318 с.

## References

1. Vlasov, D.A. Integration of information and pedagogical technologies in the application of mathematical preparation of the future expert // Siberian Pedagogical Journal. - 2009. - № 2. S. 109-117.
2. Vlasov, D.A. Information technology in the system of mathematical preparation of bachelors: MGGU experience them. MA Sholokhov // Computer science and education. - 2012. - № 3. - S. 93-94.
3. Vlasov, D.A. A retrospective analysis of the development of methods and models of game theory // Innovative science. - 2016. - № 8-1. - S. 42-43.
4. Vlasov, D.A., VM Monakhov V.M., Monakhov N.V. Mathematical models and methods vnutrimodelnyh research. - M .: MGGU them. Sholokhov. - 2007. - 345 p.
5. Vlasov, D.A., Sinchukov A.V. WolframAlpha New technology in the study of quantitative methods for undergraduate students // Bulletin of Russian Peoples Friendship University. - Series: Informatization of Education. - 2012.- № 4. - S. 43-53.
6. Vlasov D.A. Features and mathematical foundations of modern economic cybernetics // Technique. Technologies. Engineering. - 2016. - №2. - P. 4-7.
7. Reinhard Selten, Harsanyi, John The general theory of equilibrium selection in games. - M.: The School of Economics, 2001. - 424 p.
8. Monakhov V.M. Introduction to the theory of educational technology. - Volgograd: Change, 2006. - 318 p.
9. J. von Neumann. Background, O. Morgenstern Theory of Games and Economic Behavior. M.: Nauka, 1970 - 708 p.
10. Sinchukov A.V., Pantina I.V. Computational Mathematics. – M.: Moscow Financial-Industrial University "Synergy". - 2012. - 176 p.
11. Tikhomirov N.P., Tikhomirov T.M. Risk analysis in economics. – M.: JSC "" Economy "Publishing House, 2010. - 318 p.

Поступила 14.10.2016

**Об авторах:**

**Власов Дмитрий Анатольевич**, доцент кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, кандидат педагогических наук, DAV495@gmail.com;

**Синчуков Александр Валерьевич**, доцент кафедры высшей математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, кандидат педагогических наук, AVSinchukov@gmail.com.