

УДК 519.854.2

**Головешкин В.А.<sup>1</sup>, Жукова Г.Н.<sup>2</sup>, Ульянов М.В.<sup>3</sup>, Фомичев М.И.<sup>4</sup>**<sup>1</sup>Московский технологический университет МИРЭА, г. Москва, Россия<sup>2</sup>Московский политехнический университет, г. Москва, Россия<sup>3</sup>Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия<sup>4</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОГАРИФМА СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

### Аннотация

Проведен статистический анализ сложности индивидуальных задач коммивояжера, определяемой как число вершин дерева решений, порожденного алгоритмом ветвей и границ. Получены приближенные представления зависимости параметров вероятностного распределения натурального логарифма сложности от размерности задачи. Линейная зависимость используется для построения оценки сверху квантилей натурального логарифма сложности уровня больше 0.5 и снизу для квантилей уровня меньше 0.5. Нелинейная зависимость параметра  $\sigma$  нормального распределения, аппроксимирующего распределение натурального логарифма сложности, и линейная зависимость параметра  $\mu$  позволяют получить оценку снизу для квантилей натурального логарифма сложности уровня 0.95. Проведен экспериментальный анализ качества полученных оценок, показано, что относительное отклонение предполагаемых значений квантилей натурального логарифма сложности уровня 0.95 от выборочных не превышает 0.3% в случае размерности задачи от 45 до 50.

### Ключевые слова

Задача коммивояжера; TSP; метод ветвей и границ; MBG; сложность индивидуальной задачи коммивояжера; прогноз.

**Goloveshkin V.A.<sup>1</sup>, Zhukova G.N.<sup>2</sup>, Ulyanov M.V.<sup>3</sup>, Fomichev M.I.<sup>4</sup>**<sup>1</sup>Moscow Technological University MIREA, Moscow, Russia<sup>2</sup>Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia<sup>3</sup>Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia<sup>4</sup>National Research University – Higher School of Economics, Moscow, Russia

## THE ESTIMATIONS OF THE PARAMETERS OF THE DISTRIBUTION OF THE LOGARITHM OF THE COMPLEXITY OF TSP

### Abstract

The complexity of the individual traveling salesman problem was analyzed by means of mathematical statistics. The complexity is defined as a number of nodes of the decision tree created by the branch and bound algorithm. We obtained approximate representations for parameters of probability distribution of the natural logarithm of the complexity. These representations are functions of the dimension of the problem. The linear function is used to construct the upper estimation for the quantiles of the natural logarithm of the complexity, in cases when the level of the quantile is more than 0.5. We also applied this formula for the lower bound of the quantiles of levels less than 0.5. Then we used the normal distribution with the parameters  $\mu$  and  $\sigma$  as an approximation of the distribution of the natural logarithm of the complexity. We combined a nonlinear function for the parameter  $\mu$  and linear function for  $\sigma$  and obtained a lower bound for the quantiles of the level 0.95 of the natural logarithm of the complexity. The quality of the estimations was analyzed by the experiment. In our experiment the sample's quantiles of the level 0.95 differ from the estimation less than 0.3% in the case when the dimension of the problem in range from 45 to 50.

### Keywords

Traveling salesman problem; TSP; branch and bound method; B&B; complexity; prediction.

**Введение**

Исследуется сложность индивидуальной задачи коммивояжера (TSP, traveling salesman problem), т.е. число порожденных вершин поискового дерева решений [1] в классическом алгоритме, реализующем метод ветвей и границ [2-8]. Эта характеристика TSP не зависит от параметров ЭВМ, на которой решается задача, сложность является свойством платежной матрицы задачи.

Сложность рассматривается как случайная величина, для определения ее вероятностного распределения используется статистическая обработка результатов вычислительного эксперимента, состоящего в решении TSP с матрицами стоимостей размерности  $n$  от 25 до 50. В качестве элементов матрицы стоимостей индивидуальной TSP использовались округленные до целых нормально распределенные псевдослучайные числа с параметрами  $\mu=10^4$  и  $\sigma=100$ . Для каждого  $n$  от 25 до 50 объем выборки (число экспериментов) для получения статистически значимых результатов был выбран равным  $10^5$ .

Для определения возможного типа распределения сложности были использованы квантильные коэффициенты асимметрии  $S$  и эксцесса  $T$ :

$$S = (E_6 - 2E_4 + E_2) / (E_6 - E_2),$$

$$T = (E_7 - E_5 + E_3 - E_1) / (E_6 - E_2),$$

где  $E_i = p_{i/8} = F^{-1}(i/8)$ ,  $i=1,2,\dots,7$  октили непрерывной функции распределения  $F(x)$  [9-11]. Выборочные квантильные коэффициенты асимметрии и эксцесса вычисляются по аналогичным формулам, вместо  $E_i$  используются выборочные квантили. На рис. 1 в системе координат  $ST$  (горизонтальная ось – квантильный коэффициент асимметрии, вертикальная – квантильный коэффициент эксцесса) изображены кривые, соответствующие гамма, обратному гамма и логнормальному распределениям, а также звездочки, соответствующие экспериментальным данным. Звездочки расположены вблизи линии логнормального распределения, поэтому в качестве приближения распределения сложности будем использовать логнормальное распределение. Более того, поскольку натуральный логарифм логнормальной случайной величины распределен нормально [12], то будем аппроксимировать распределение натурального логарифма сложности нормальным распределением, аналогично тому, как это было сделано в [13]. Выборочные квантильные коэффициенты асимметрии и эксцесса натурального логарифма сложности принимают значения из области, близкой к точке, соответствующей нормальному распределению,

что также свидетельствует о сходстве распределения натурального логарифма сложности с нормальным распределением.

Отметим, что квантильные коэффициенты асимметрии и эксцесса позволяют подобрать распределение, более точно описывающее распределение выборки, чем традиционные коэффициенты асимметрии и эксцесса [14-17].

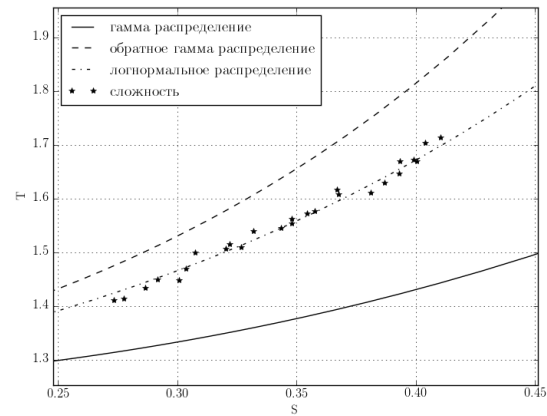


Рис. 1. Квантильные коэффициенты асимметрии и эксцесса

Приближение распределения натурального логарифма сложности нормальным распределением.

В первом приближении будем считать, что распределение натурального логарифма сложности является линейным преобразованием стандартного нормального распределения:

$$\ln C_n \approx Y = kN(0,1) + b \tag{1}$$

При этом преобразовании квантили случайной величины  $Y$  вычисляются по аналогичной формуле

$$q_p^Y = kq_p^{N(0,1)} + b. \tag{2}$$

Найдем  $k$  и  $b$  с помощью метода наименьших квадратов. Значения этих параметров выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений квантилей логарифма сложности от соответствующих квантилей линейного преобразования стандартной нормальной случайной величины была минимальна:

$$\sum \left( q_p^* - \left( kq_p^{N(0,1)} + b \right) \right)^2 \rightarrow \min,$$

здесь  $q_p^*$  – выборочные квантили уровня  $p$  натурального логарифма сложности,  $q_p^{N(0,1)}$  – квантили уровня  $p$  стандартного нормального распределения.

Приравнявая к нулю производные левой части по параметрам и решая полученную систему уравнений, имеем

$$b = \bar{q}^* = \frac{\sum q_{p_i}^*}{N}, \quad k = \frac{\overline{q^{N(0,1)}}^*}{\left( \overline{q^{N(0,1)}} \right)^2},$$

здесь  $\frac{q^{N(0,1)}}{q^*} = \frac{\sum q_{p_i}^{N(0,1)} q_{p_i}^*}{N}$ ,  
 $\frac{(q^{N(0,1)})^2}{N} = \frac{\sum (q_{p_i}^{N(0,1)})^2}{N}$ ,  $\frac{q^{N(0,1)}}{N} = \frac{\sum q_{p_i}^{N(0,1)}}{N} = 0$ .

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле  $r = \frac{q^{N(0,1)} q^*}{\sigma_1 \sigma_2}$ , где  $\sigma_1 = \sqrt{(q^*)^2 - (\overline{q^*})^2}$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{(q^{N(0,1)})^2 - (\overline{q^{N(0,1)}})^2} = \sqrt{(q^{N(0,1)})^2}$ , в нашем эксперименте  $r > 0.99$ , что свидетельствует о тесной линейной стохастической зависимости.

Значения параметров  $k$  и  $b$ , а также выборочных среднего и среднеквадратического отклонения (СКО) приведены в табл. 1.

Табл. 1 Параметры  $k$  и  $b$  в сравнении со средним и СКО

$n$	параметр сдвига $b$	выборочное среднее	коэффициент масштаба $k$	СКО
25	6.024	6.023	0.832	0.831
30	6.917	6.917	0.928	0.930
35	7.794	7.796	1.026	1.027
40	8.673	8.674	1.110	1.111
45	9.538	9.540	1.200	1.202
50	10.412	10.414	1.281	1.280

Построенная по формуле (1) случайная величина  $Y$  распределена нормально с параметрами  $\mu = b$  и  $\sigma = k$ , поэтому в качестве приближенных значений параметров  $k$  и  $b$  можно использовать выборочные среднее и среднеквадратическое отклонение. Относительное отклонение параметра  $k$  от выборочного СКО в нашем вычислительном эксперименте при  $n$  от 25 до 50 не превышает 0.5%, а относительное отклонение параметра  $b$  от выборочного среднего не более 0.05%.

Поскольку распределение логарифма сложности в первом приближении можно считать нормальным с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ , построим доверительные интервалы для  $\mu$  и  $\sigma$ . В табл. 2 приведены доверительные интервалы для математического ожидания и среднеквадратического отклонения, построенные по выборкам объема 100000, 10000, 1000 и 500. При каждом  $n$  от 25 до 50 выборка натурального логарифма сложности была разбита на серии по 10000, 1000 и 500 соответственно. Для каждой серии вычислялись границы доверительных интервалов. В табл. 2 приведены для выборок объема 10000, 1000 и 500, наименьшие из вычисленных левых границ и наибольшие из правых.

Отношение длины доверительного интервала к точечной оценке параметра (середина интервала)

$$\delta_x = \frac{x_{прав} - x_{лев}}{(x_{прав} + x_{лев})/2} 100\% \text{ при } n \text{ от } 25 \text{ до } 50$$

принимает значения, не превосходящие указанных в таблице 3.

Табл. 2 (Часть 1) Доверительные интервалы математического ожидания и СКО

объем выборки	100000				10000			
	доверительный интервал среднего		доверительный интервал СКО		доверительный интервал среднего		доверительный интервал СКО	
25	6.02	6.03	0.83	0.83	5.99	6.06	0.81	0.85
30	6.91	6.92	0.93	0.93	6.89	6.95	0.91	0.95
35	7.79	7.80	1.02	1.03	7.76	7.82	1.01	1.05
40	8.67	8.68	1.11	1.11	8.64	8.71	1.09	1.14
45	9.53	9.55	1.20	1.21	9.51	9.57	1.18	1.23
50	10.41	10.42	1.28	1.28	10.37	10.46	1.25	1.31

Табл. 2 (Часть 2) Доверительные интервалы математического ожидания и СКО

$n$	доверительный интервал среднего		доверительный интервал СКО		доверительный интервал среднего		доверительный интервал СКО	
	25	5.88	6.13	0.76	0.90	5.86	6.17	0.72
30	6.79	7.07	0.86	1.03	6.69	7.11	0.78	1.06
35	7.68	7.95	0.93	1.16	7.62	7.99	0.90	1.21
40	8.52	8.81	1.02	1.25	8.46	8.88	0.96	1.28
45	9.41	9.71	1.10	1.31	9.30	9.81	1.05	1.37
50	10.22	10.59	1.16	1.39	10.16	10.66	1.12	1.47

Табл. 3 Отношение длины доверительного интервала к его середине

$n$	$\delta_\mu, \%$	$\delta_\sigma, \%$
100000	0.2	0.7
10000	1	6
1000	4	20
500	6	30

Доверительные интервалы будем использовать для построения двусторонних оценок квантилей распределения сложности. Так, для построения оценки сверху квантилей уровня более 0.5 возьмем правые границы доверительных интервалов  $\mu$  и  $\sigma$ , а для нижней оценки применим левые границы. Ввиду того что точность интервальных оценок быстро ухудшается с уменьшением объема выборки, будем использовать интервальные оценки для выборки объема 100000.

**Зависимость параметров  $\mu$  и  $\sigma$  от размерности задачи. Прогноз квантилей**

Построим приближение зависимости от размерности TSP параметров нормального распределения, аппроксимирующего натуральный логарифм сложности. В первом приближении будем считать зависимость обоих параметров от

$n$  линейной:

$$\sigma \approx an + b \quad \mu \approx dn + f, \quad (3)$$

что в соответствии с (1) приводит к такому представлению натурального логарифма сложности:

$$\ln C_n \approx dn + f + (an + b)N(0,1), \quad (4)$$

где  $N(0,1)$  стандартное нормальное распределение.

Значения параметров  $a, b, d$  и  $f$ , полученные методом наименьших квадратов, приведены в табл. 4.

Табл. 4 Параметры  $a, b, d$  и  $f$

$n$	$a$	$b$	$d$	$f$
25-35	0.020	0.341	0.177	1.604
25-40	0.019	0.358	0.176	1.621
25-45	0.018	0.377	0.176	1.631
25-50	0.018	0.392	0.176	1.644

Здесь для определения параметров использованы выборочные среднее и среднеквадратическое отклонение, вычисленные для выборок натурального логарифма сложности при  $n$  от 25 до  $m$ , где  $m$  от 35 до 50.

Как видно из таблицы, значения параметров  $a, b, d$  и  $f$  зависят от диапазона используемых размерностей задачи, так что прогноз получится не очень точным, но его можно использовать для приблизительной оценки квантилей натурального логарифма сложности.

Воспользуемся представлением (4) для прогноза квантилей логарифма сложности:

$$q_p^{\ln C_n} \approx dn + f + (an + b)q_p^{N(0,1)} \quad (5)$$

здесь  $q_p^{N(0,1)}$  — квантили уровня  $p$  стандартного нормального распределения,  $q_p^{\ln C_n}$  — выборочные квантили логарифма сложности.

Табл. 5 (Часть 1) Квантили натурального логарифма сложности

N	уровень квантилей							
	0.5			0.25			0.5	
тип	в	т1	т2	в	т1	т2	в	т1
41	6.99	6.97	6.98	8.09	8.07	8.07	8.84	8.84
42	7.12	7.11	7.13	8.25	8.23	8.24	9.02	9.01
43	7.30	7.26	7.28	8.41	8.40	8.40	9.19	9.19
44	7.43	7.40	7.42	8.57	8.56	8.57	9.36	9.36
45	7.58	7.54	7.57	8.73	8.72	8.73	9.53	9.54
46	7.73	7.69	7.72	8.90	8.89	8.90	9.71	9.72
47	7.88	7.83	7.87	9.07	9.05	9.06	9.89	9.89
48	8.02	7.98	8.02	9.22	9.21	9.23	10.05	10.07
49	8.19	8.12	8.17	9.39	9.37	9.39	10.24	10.24
50	8.32	8.27	8.32	9.54	9.54	9.56	10.40	10.42

Оценим качество прогноза, вычисляя квантили натурального логарифма сложности по (5) с

параметрами, вычисленными по данным эксперимента при  $n$  от 25 до 40, и сравнивая предполагаемые значения квантилей при  $n$  от 41 до 50 с полученными экспериментально (см. табл. 5).

Табл. 5 (Часть 2) Квантили натурального логарифма сложности

N	уровень квантилей							
	0,5		0.75			0.95		
тип	т1	т2	в	т1	т2	в	т1	т2
41	8.84	8.84	9.61	9.60	9.60	10.72	10.71	10.69
42	9.01	9.01	9.79	9.79	9.78	10.92	10.91	10.90
43	9.19	9.19	9.98	9.98	9.97	11.11	11.12	11.10
44	9.36	9.36	10.17	10.17	10.16	11.32	11.33	11.30
45	9.54	9.54	10.35	10.36	10.35	11.54	11.54	11.51
46	9.72	9.72	10.54	10.55	10.53	11.74	11.74	11.71
47	9.89	9.89	10.73	10.74	10.72	11.94	11.95	11.91
48	10.07	10.07	10.90	10.92	10.91	12.12	12.16	12.12
49	10.24	10.24	11.09	11.11	11.10	12.33	12.36	12.32
50	10.42	10.42	11.27	11.30	11.28	12.54	12.57	12.52

В таблице строка «тип» показывает, как вычислено значение квантилей, «в» обозначает выборочные квантили, «т1» — квантили, полученные по формуле (5).

Заметим, что представление (5) с параметрами, вычисленными по выборкам натурального логарифма сложности TSP размерностей  $n$  от 25 до 40, дает несколько завышенное значение квантилей уровня 0.95 при  $n$  больше 47. В связи с этим рассмотрим альтернативное представление зависимости параметра  $\sigma$  от  $n$ , для этого получим методом наименьших квадратов параметры линейной зависимости натурального логарифма  $\sigma$  от натурального логарифма  $n$ :

$$\ln \sigma \approx \bar{a} \ln n + \bar{b},$$

откуда

$$\sigma \approx e^{\bar{b}} n^{\bar{a}} = hn^{\bar{a}}, \quad (6)$$

что приводит к такому представлению натурального логарифма сложности:

$$\ln C_n \approx dn + f + hn^{\bar{a}} N(0,1), \quad (7)$$

откуда

$$C_n \approx e^{dn+f+hn^{\bar{a}}N(0,1)}.$$

Этому представлению можно придать такой вид:

$$C_n \approx Ae^{dn+\theta(n)}, \quad \theta(n) = hn^{\bar{a}} N(0,1), \quad A = e^f,$$

где значения параметров, найденные методом наименьших квадратов, равны соответственно  $\bar{a} = 0.627$ ,  $h = 0.11$ ,  $d = 0.175$ ,  $f = 1.658$ ,  $A = 5.25$ .

Воспользуемся представлением (7) для прогноза квантилей логарифма сложности:

$$q_p^{\ln C_n} \approx dn + f + hn^{\bar{a}} q_p^{N(0,1)}. \quad (8)$$

При фиксированном  $n$  от 40 до 50 квантиль

уровня 0.95 по формуле (8) несколько меньше, чем по (5), при этом выборочные квантили оказываются ближе к квантилям (8) (см. табл. 5, квантили, вычисленные по формуле (7) находятся в столбцах, помеченных «т2»).

Из табл. 5 видно, что при  $n$  больше 45 по формуле (5) получаются завышенные оценки (столбцы «т1»), поэтому предлагается для прогноза сложности при больших  $n$  использовать формулу (8) как нижнюю оценку квантилей логарифма сложности, а (5) считать оценкой сверху. Разность этих оценок увеличивается с ростом  $n$ , так, при  $n=50$  эта разность составляет около 0.4% от полусуммы нижней и верхней оценок, а при  $n=100$  достигает 2%.

### Результаты

Получены приближенные представления (3) и (6) зависимости параметров вероятностного распределения сложности от размерности задачи, на их основе построены оценки (5) и (8) квантилей

вероятностного распределения, аппроксимирующего распределение натурального логарифма сложности. Относительное отклонение предполагаемых значений квантилей уровня 0.95 от выборочных не превышает 0.3% в случае размерности задачи от 45 до 50.

### Заключение

На основе статистического анализа сложности индивидуальных задач коммивояжера получены оценки (5) и (8) квантилей натурального логарифма сложности. Эти представления позволяют делать двусторонние оценки квантилей уровня 0.95 для задач размерности больше 50, которые, в свою очередь, могут быть использованы для прогнозирования машинного времени, требующегося для решения TSP размерности больше 50.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-07-160.*

### Литература

1. Knuth, D. E. «Estimating the efficiency of backtracking programs» // Mathematics of Computing, 1975. Vol. 29, pp. 121–136.
2. Dantzig G. B., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large scale traveling salesman problem. Technical Report P-510. RAND Corporation, Santa Monica, California, USA. – 1954.
3. Dantzig, G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M. «On a linear programming, combinatorial approach to the traveling-salesman problem» // Operations Research 1959. №7, pp. 58–66.
4. Eastman, W. L. Linear Programming with Pattern Constraints. Ph.D. Thesis. Department of Economics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, USA. – 1958.
5. Land, A. H., Doig A. G. «An automatic method of solving discrete programming problems» // Econometrica 1960. №28, pp. 497–520.
6. Little, J. D. C., Murty K. G., Sweeney D.W., Karel C. «An algorithm for the traveling salesman problem» // Operations Research, 1963. №11, pp. 972–989.
7. Ульянов М.В. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 304 с.
8. Ульянов М.В., Фомичев М.И. «Ресурсные характеристики способов организации дерева решений в методе ветвей и границ для задачи коммивояжера» // Бизнес – информатика, 2015. № 4 (34). С. 38–46.
9. Moors J. J. A. A quantile alternative for kurtosis // The Statistician, 1988. Vol. 37, pp. 25–32.
10. Moors J. J. A., Coenen V. M. J., Heuts R. M. J. «Limiting distributions of moment- and quantile-based measures for skewness and kurtosis». School of Economics and Management, Tilburg University, Res. Mem. FEW 620, 1993.
11. Moors J. J. A., Wagemakers R. Th. A., Coenen V. M. J., Heuts R. M. J., Janssens M. J. B. T. «Characterizing systems of distributions by quantile measures» // Statistica Neerlandica, 1996. Vol. 50, № 3, pp. 417–430.
12. Johnson N.L., Kotz S., and Balakrishnan N. Continuous Univariate Distributions. Vol. 2, Wiley, 1995.
13. Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичёв М.И. Использование квантильных коэффициентов асимметрии и эксцесса для оценки сложности решения задачи коммивояжера. International Journal of Open Information Technologies. 2016. Т. 4. № 12. С. 7-12.
14. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.
15. Pearson, K. «Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. III. Regression, Heredity and Panmixia» // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1896. 187, pp. 253–318.
16. Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичев М.И. «Сравнение ресурсных характеристик традиционного и модифицированного метода ветвей и границ для TSP» // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2015. Т. 2, № 11. С. 151-159.
17. Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичёв М.И. Об одном обобщённом представлении классов индивидуальных задач коммивояжера // Автоматизация. Современные технологии. 2016. № 10. С. 22-29.

### References

1. Knuth, D. E. «Estimating the efficiency of backtracking programs» // Mathematics of Computing, 1975. Vol. 29, pp. 121–136.
2. Dantzig G. B., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large scale traveling salesman problem. Technical Report P-510. RAND Corporation, Santa Monica, California, USA. – 1954.
3. Dantzig, G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M. «On a linear programming, combinatorial approach to the traveling-salesman problem» // Operations Research 1959. №7, pp. 58–66.
4. Eastman, W. L. Linear Programming with Pattern Constraints. Ph.D. Thesis. Department of Economics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, USA. – 1958.
5. Land, A. H., Doig A. G. «An automatic method of solving discrete programming problems» // Econometrica 1960. №28, pp. 497–520.
6. Little, J. D. C., Murty K. G., Sweeney D.W., Karel C. «An algorithm for the traveling salesman problem» // Operations Research, 1963. №11, pp. 972–989.

7. Ul'janov M.V. Resursno-jeffektivnye komp'yuternye algoritmy. Razrabotka i analiz. — M.: FIZMATLIT, 2008. — 304 s.
8. Ul'janov M.V., Fomichev M.I. «Resursnye harakteristiki sposobov organizacii dereva reshenij v metode vetvej i granic dlja zadachi kommivojazhera» // *Biznes – informatika*, 2015. № 4 (34). S. 38–46.
9. Moors J. J. A. A quantile alternative for kurtosis// *The Statistician*, 1988. Vol. 37, pp. 25–32.
10. Moors J. J. A., Coenen V. M. J., Heuts R. M. J. «Limiting distributions of moment- and quantile-based measures for skewness and kurtosis». School of Economics and Management, Tilburg University, Res. Mem. FEW 620, 1993.
11. Moors J. J. A., Wagemakers R. Th. A., Coenen V. M. J., Heuts R. M. J., Janssens M. J. B. T. «Characterizing systems of distributions by quantile measures» // *Statistica Neerlandica*, 1996. Vol. 50, № 3, pp. 417–430.
12. Johnson N.L., Kotz S., and Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 2, Wiley, 1995.
13. Goloveshkin V.A., Zhukova G.N., Ul'janov M.V., Fomichev M.I. Ispol'zovanie kvantil'nyh koeficientov asimmetrii i jekscessa dlja ocenki slozhnosti reshenija zadachi kommivojazhera. *International Journal of Open Information Technologies*. 2016. T. 4. № 12. S. 7-12.
14. Kramer G. *Matematicheskie metody statistiki*. — M.: Mir, 1975. — 648 s.
15. Pearson, K. «Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. III. Regression, Heredity and Panmixia» // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1896. 187, pp. 253–318.
16. Goloveshkin V.A., Zhukova G.N., Ul'janov M.V., Fomichev M.I. «Sravnenie resursnyh harakteristik tradicionnogo i modifirovannogo metoda vetvej i granic dlja TSP» // *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie*, 2015. T. 2, № 11. S. 151-159.
17. Goloveshkin V.A., Zhukova G.N., Ul'janov M.V., Fomichev M.I. Ob odnom obobshhjonnom predstavlenii klassov individual'nyh zadach kommivojazhjera // *Avtomatizacija. Sovremennye tehnologii*. 2016. № 10. S. 22-29.

Поступила: 2.03.2017

#### Об авторах:

**Головешкин Василий Адамович**, доктор технических наук, профессор, Московский технологический университет МИРЭА, [nikshevolog@yandex.ru](mailto:nikshevolog@yandex.ru)

**Жукова Галина Николаевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский политехнический университет, [galinanzhukova@gmail.com](mailto:galinanzhukova@gmail.com)

**Ульянов Михаил Васильевич**, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, [muljanov@mail.ru](mailto:muljanov@mail.ru)

**Фомичев Михаил Игоревич**, магистрант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», [michan94@yandex.ru](mailto:michan94@yandex.ru)

#### Note on the authors:

**Goloveshkin Vasily**, doctor of technical sciences, professor, Moscow Technological University MIREA, [nikshevolog@yandex.ru](mailto:nikshevolog@yandex.ru)

**Zhukova Galina**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow Polytechnic University, [galinanzhukova@gmail.com](mailto:galinanzhukova@gmail.com)

**Ulyanov Mikhail**, doctor of technical sciences, professor, Leading Researcher, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, [muljanov@mail.ru](mailto:muljanov@mail.ru)

**Fomichev Mikhail**, Graduate student, National Research University – Higher School of Economics, [michan94@yandex.ru](mailto:michan94@yandex.ru)