

УДК 517.955.2

Тихомиров В.В., Бобылева О.Н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**Аннотация**

В работе содержатся новые результаты по спектральным методам решения некорректно поставленных задач на примере задачи Коши для параболического уравнения. В работе предложен метод регуляризации решения обратной задачи. Регуляризованное уравнение получается за счет введения в уравнение теплопроводности биквадратного лапласиана с коэффициентом, равным параметру регуляризации. Это позволяет получить регуляризованное решение данной задачи в виде спектрального ряда, который хорошо сходится. Показано, что если решение исходной задачи существует, то разность между спектральными разложениями исходного и регуляризованного решений стремится к нулю при стремлении параметра регуляризации к нулю в пространстве функций, суммируемых с квадратом. Используя результаты по спектральной теории В.А. Ильина [4], [5]. Получены некоторые оценки для разности точного и регуляризованного решений.

Ключевые слова

Регуляризация; задача Коши; некорректные задачи; спектральная теория; уравнение теплопроводности; преобразование Фурье.

Tikhomirov V.V., Bobyleva O.N.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ON REGULARIZATION OF INVERSE PROBLEM FOR HEAT EQUATION**Abstract**

The paper contains new results on spectral methods for solving ill-posed problems using the example of the Cauchy problem for a parabolic equation. A method for regularizing the solution of the inverse problem is proposed. We obtain regularized equation by introducing into the heat equation a biquadratic Laplacian with a coefficient equal to the regularization parameter. This allows us to obtain a regularized solution as a well converging spectral series. It is shown that if the solution of the original problem exists, then the difference between the spectral expansions of the initial and regularized solutions tends to zero when the regularization parameter tends to zero in the space of square summable functions. Using the results of the spectral theory of V.A. Ilyin [4], [5]. Some estimates are obtained for the difference between the exact and regularized solutions.

Keywords

Regularization; Cauchy problem; ill-posed problem; spectral theory; heat equation; Fourier transform.

Введение

В классическом труде И. Ньютона «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» были разработаны математические методы, позволяющие не только объяснять физические явления, но и предсказывать их.

После появления этой монографии сложилось убеждение, что все физические проблемы, записанные в математической форме, могут быть решены путем прямых вычислений.

Двумя столетиями позже стало ясно, что существуют проблемы, решение которых прямыми

математическими методами встречает серьезные затруднения.

В 1917 г. Жак Адамар, выступая в Цюрихе на конгрессе Швейцарского математического общества, утверждал, что граничная задача для дифференциального уравнения с частными производными правильно поставлена, если решение этой задачи существует и является единственным (см. [1]). В качестве неправильно (некорректно) поставленной задачи он привел свой знаменитый пример задачи Коши для уравнения Лапласа (см. [6], [12]): решение может

не существовать даже для сколь угодно гладких граничных данных. Как следствие, в случае, когда это решение существует, оно не может непрерывно зависеть от граничных данных, в то время как решение каждой правильно поставленной физической задачи должно непрерывно зависеть от результатов измерений (см. [3], [9], [14]).

1. Рассмотрим обратную задачу для уравнения теплопроводности в произвольной области Ω пространства \mathbb{R}^n . Для этого в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t < 0 \quad (1)$$

с начальными условиями (задача Коши)

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \Omega \quad (2)$$

и каким-либо самосопряженным граничным условием.

Пусть $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа, удовлетворяющих задаче

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega$$

и соответствующим самосопряженным граничным условием.

Тогда решение задачи (1) – (2) имеет вид (см. [6])

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k t} v_k(x),$$

где $\phi_k = (\phi, v_k)$.

Как указывалось во введении, эта задача является некорректно поставленной. Поэтому для решения этой задачи мы применим метод регуляризации. Основная идея метода регуляризации заключается в подходящей замене уравнения путем введения малого параметра α (т.е. за счет увеличения гладкости решения). С этой целью рассмотрим для малых значений параметра $\alpha > 0$ следующее регуляризованное уравнение:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \alpha \Delta^2 u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t < 0 \quad (3)$$

Регуляризованная задача уже является корректно поставленной для любого $\alpha > 0$. Следовательно, для любого $\alpha > 0$ решение u_α этой задачи может быть найдено с использованием стандартных вычислительных процедур. Вопрос заключается в том, насколько u_α отличается от точного решения. Для ответа на этот вопрос следует рассмотреть два случая.

Если точное решение исходной задачи существует, то регуляризованное решение u_α для подходящего $\alpha > 0$ представляет собой приемлемую аппроксимацию точного решения.

Если исходная задача не имеет решения (возможно, из-за неточных граничных или

начальных данных), то u_α аппроксимирует функцию, которая могла бы быть решением в случае уточнения граничных или начальных данных путем их малого изменения.

В обоих случаях u_α может дать полезную информацию о физических явлениях, математические модели которых изучаются (см. [6], [7]).

Решение уравнения (3) можно представить в следующем виде (с помощью ряда Фурье):

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi, v_k) e^{(\alpha \lambda_k^2 - \lambda_k)t} v_k(x).$$

Следовательно, в силу равенства Парсеваля

$$\int_{\Omega} |u_\alpha(x,t) - u(x,t)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|}]^2.$$

При определенных условиях можно ожидать выполнения равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\Omega} |u_\alpha(x,t) - u(x,t)|^2 dx = 0. \quad (4)$$

Требуется доказать справедливость равенства (4) для функций ϕ , коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} < +\infty \quad (5)$$

при некотором значении $-T \leq t < 0$ (см. [2]).

Доказательство. Фиксируем $-T \leq t < 0$, тогда предполагаем, что условия (5) выполняются. По теореме Вейерштрасса

$$|(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 t}]^2 \leq |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T}.$$

Ясно, что

$$0 \leq [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|}]^2 < [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}]^2 < 1$$

и получаем справедливость неравенства (5).

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|}]^2 = \\ & = \sum_{k=1}^N |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|}]^2 + \\ & = \sum_{k=N+1}^{\infty} |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|}]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ мы выберем число N так, чтобы при $n > N$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |(\phi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} [1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|}]^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку по абсолютной величине вторая сумма будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, и ряд сходится равномерно по α и по t , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|} \right]^2 < \sum_{k=1}^N |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|} \right]^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

А для первой суммы в (6) того же можно добиться за счет малости параметра $\alpha (\alpha \rightarrow 0)$, так как число слагаемых в этой сумме равно N и потому вся сумма стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. Таким образом

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\Omega} |u_{\alpha}(x, t) - u(x, t)|^2 dx \leq \sum_{k=1}^N \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 |t|} \right]^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и сумма равна 0 при $\alpha \rightarrow 0+0$.

Так как

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\Omega} |u_{\alpha}(x, t) - u(x, t)|^2 dx \leq \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\Omega} |u_{\alpha}(x, t) - u(x, t)|^2 dx < \varepsilon,$$

то, если решение задачи (1) – (3) существует, и при определенных условиях можно ожидать выполнения равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\Omega} |u_{\alpha}(x, t) - u(x, t)|^2 dx = 0.$$

Следовательно, справедливость равенства (4) доказана.

2. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ограниченная область и пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{v_k(x)\}$ собственные значения и собственные функции следующей краевой задачи: $-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x), x \in \Omega, v_k|_{\partial\Omega} = 0$.

Рассмотрим для $T > 0$ уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u \in \Omega, -T \leq t < 0, \quad (7)$$

с начальным и граничным условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

Решение

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{-\lambda_k t} v_k(x). \quad (9)$$

Регуляризованное решение имеет вид

$$u_{\alpha}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{-\lambda_k t + \alpha \lambda_k^2 t} v_k(x). \quad (10)$$

Задача состоит в том, чтобы оценить при $-T \leq t \leq 0$ следующие суммы:

$$R_{\alpha}(x, t, \varphi) \equiv u(x, t) - u_{\alpha}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{-\lambda_k t} \left[1 - e^{\alpha \lambda_k^2 t} \right] v_k(x). \quad (11)$$

Можем переписать (11) в следующем виде:

$$R_{\alpha}(x, t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{\lambda_k T} e^{-(T+t)\lambda_k} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 t} \right] v_k(x). \quad (12)$$

Предположим, что решение $u(x, t)$ существует для $-T \leq t \leq 0$ и положим

$$f(x) = u(x, -T).$$

Таким образом, в соответствии с (9),

$$(f, v_k) = (\varphi, v_k) e^{\lambda_k T}.$$

Предположим, что $f \in W_2^{l,0}(\Omega)$, т.е. $f \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$ и $f(x) = 0$ для $x \notin \Omega$. Хорошо известно (В.А. Ильин [4, 5]), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, v_k)|^2 \lambda_k^l \leq \text{const} \|f\|_{W_2^l}^2. \quad (13)$$

Таким образом, если $f \in W_2^{l,0}(\Omega)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \lambda_k^l \leq C \|f\|_{W_2^l}^2. \quad (14)$$

Следовательно, что при $t = -T$

$$R_{\alpha}(x, -T, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \right] v_k(x). \quad (15)$$

Таким образом, в силу равенство Парсеваля,

$$\|R_{\alpha}(x, -T, \varphi)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \right]^2. \quad (16)$$

Понятно, что для любого $\tau, 0 \leq \tau \leq 1$,

$$1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \leq C_{\tau} (\alpha \lambda_k^2 T)^{\tau}.$$

Таким образом,

$$\|R_{\alpha}(x, -T, \varphi)\|^2 \leq C^2 \alpha^{2\tau} \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \lambda_k^{4\tau}, \quad (17)$$

и, согласно (14),

$$\|R_{\alpha}(x, -T, \varphi)\| \leq C \alpha^{\tau} \|f\|_{W_2^{4\tau}}. \quad (18)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $0 \leq \tau \leq 1$. Если $u(x, -T) \in W_2^{4\tau,0}(\Omega)$, то существует константа $C > 0$, такая что

$$\|u(x, -T) - u_{\alpha}(x, -T)\|_{L_2} \leq C \alpha^{\tau} \|u(x, -T)\|_{W_2^{4\tau}}. \quad (19)$$

3. Отметим, что в **теореме 1** можно считать $\tau \leq 1$. В случае, если $\tau > 1$, то из оценки (19) следует, что $f \equiv 0$ в Ω . Это явление называется насыщением. Справедлива

Теорема 2. Предположим, что оценка (19) справедлива для некоторого $\tau > 1$. Тогда $u(x, t) \equiv 0$ для $x \in \Omega$ и $-T \leq t \leq 0$.

Доказательство. Пусть оценка (19) справедлива для некоторого $\tau > 1$. Тогда, согласно (16), мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \right]^2 \leq C \alpha^{2\tau}.$$

Таким образом, для любого натурального N имеем

$$\sum_{k=1}^N |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \leq C \alpha^{2\tau}$$

и

$$\sum_{k=1}^N |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[\frac{1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}}{\alpha}\right]^2 \leq C \alpha^{2(\tau-1)}. \quad (20)$$

Следует отметить, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}}{\alpha} = \lambda_k^2 T$.

Тогда, в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ получаем из оценки (20) неравенство

$$T^2 \sum_{k=1}^N |(\varphi, v_k)|^2 e^{2T\lambda_k} \lambda_k^4 \leq 0.$$

Таким образом,

$$(\varphi, v_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Так как N произвольно, то

$$(\varphi, v_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (21)$$

Поскольку система ортонормированных функций $\{v_k(x)\}$ полна, то в силу (21) получаем, что $\varphi(x) \equiv 0$, и, в соответствии с (9), $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 2 доказана.

4. Если функция

$$f(x) = u(x, -T) \quad (22)$$

принадлежит классу Соболева с более высоким показателем гладкости, то можно получить равномерную оценку разности между точным решением и регуляризованным.

Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $0 < \tau < 1$. Если функция f , определенная равенством (22), принадлежит пространству $W_2^{l,0}(\Omega)$, где

$$l \geq \frac{n}{2} + 4\tau, \quad (23)$$

то выполняется равномерная на каждом компакте $K \subset \Omega$ оценка:

$$u_\alpha(x, -T) = u(x, -T) + O(\alpha^\tau). \quad (24)$$

Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $0 \leq \tau \leq 1$ и пусть $l = n/2 + 4\tau$.

Тогда равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega$ выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \leq C_K \alpha^{2\tau}. \quad (25)$$

Доказательство. Воспользуемся следующими равномерными на любом компакте $K \subset \Omega$ оценками (см. В. А. Ильин, [4], [5]):

$$\sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2-\varepsilon}} \leq C_K \lambda^\varepsilon \quad (26)$$

и

$$\sum_{\lambda_k \geq \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2+\varepsilon}} \leq C_K \lambda^{-\varepsilon}, \quad (27)$$

справедливыми при $\varepsilon > 0$ для любого $\lambda \geq 1$.

Положим

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Заметим, что при $\alpha > 0$ и $\lambda_k > 0$ выполняются следующие оценки:

$$1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \leq \alpha \lambda_k^2 T$$

и

$$1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \leq 1.$$

Воспользовавшись при $\lambda_k \leq \lambda$ первой из этих оценок, а при $\lambda_k > \lambda$ второй, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 = \\ & = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 + \\ & + \sum_{\lambda_k > \lambda} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \leq \\ & \leq \sum_{\lambda_k \leq \lambda} (\alpha \lambda_k^2 T)^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 + \sum_{\lambda_k > \lambda} \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Для оценки суммы S_1 применим (26) при $\varepsilon = 4 - 4\tau > 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha^2 T^2 \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2+4-4\tau}} \leq C \alpha^2 \lambda^{4-4\tau} = \\ &= C \alpha^2 \alpha^{2\tau-2} = C \alpha^{2\tau}. \end{aligned}$$

Для оценки суммы S_2 применим (27) при $\varepsilon = 4\tau > 0$. В результате получим

$$S_2 = \sum_{\lambda_k > \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2+4\tau}} \leq C \lambda^{-4\tau} = C \alpha^{2\tau}.$$

Отсюда следует требуемая оценка (25).

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Согласно равенству (15), мы можем записать

$$\begin{aligned} & u(x, -T) - u_\alpha(x, -T) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right] v_k(x). \quad (28) \end{aligned}$$

Применим к сумме в правой части неравенство Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} & |u(x, -T) - u_\alpha(x, -T)| \leq \quad (29) \\ & \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \lambda_k^l \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся оценкой (14), в результате получим

$$\begin{aligned} & |u(x, -T) - u_\alpha(x, -T)| \\ & \leq C \|f\|_{W_2^l} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \right)^{1/2}. \quad (30) \end{aligned}$$

Остается заметить, что, согласно лемме 1, выполняется оценка

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha \lambda_k^2 T} \right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \right)^{1/2} = O(\alpha^\tau). \quad (31)$$

В таком случае, из (30) и (31) следует требуемая оценка (24).

Теорема 3 доказана.

References

1. Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations // New York, Dover Phoenix editions, Dover Publications, 1923.
2. Tychonoff A. N. On the stability of inverse problems // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1943. – Vol. 39, no 5. – P. 195 – 198.
3. Lavrentyev M. M. On Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl. Akad. Nauk. – 1955. – Vol. 102, no 2. – P. 205 – 206.
4. Ilyin V. A. Selected papers. Volume 1. // Moscow, Max Press. – 2008. – 728 p.
5. Ilyin V. A. Spectral theory of differential operators. // Moscow, Nayka. – 1991. – 368 p.
6. Tychonoff A. N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1943. – Vol. 151. – P. 501 – 504.
7. Tikhomirov V.V., Bobyleva O.N., Ochilov N.N. On spectral method for solving inverse Cauchy problem for heat equation.// Abstracts of the international conference Voronezh summer school Pontryagin Readings – XXVI. – 2015. – P. 190 – 191.
8. Faddeev L. D. Increasing solutions of Schrödinger equation // Sov. Phys. Dokl. – 1966. – Vol. 10. – P. 1033 – 1035.
9. Tychonoff A. N., Arsenin V. Y. Solution of Ill-posed Problems. // Washington, Winston. – 1977.
10. Calderon A. P. Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics ed W. H. Meyer and M. A. Raupp // Rio de Janeiro: Brazilian Mathematical Society – 1980 – pp. 65 – 73.
11. Groetsch C.W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind // Pitman, Boston – 1984.
12. Hofmann B. Regularization of Applied Inverse and Ill-Posed Problems // Teubner, Leipzig – 1986.
13. Mukhamedzhanov A. M., Yarmukhamedov R., Yarmukhamedov S. Analytic continuation of reaction cross sections // Theor. Math. Phys. – 1988. – Vol. 74, no. 2. – P. 178 – 186.
14. Scherzer O., Engl H., Kunisch K. Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1993. – Vol. 30. – P. 1796 – 1838.
15. Ikehata M. Inverse conductivity problem in the infinite slab // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 437 – 454.
16. Vogel C. R. Computational Methods for Inverse Problems // SIAM, Philadelphia – 2002.
17. Tarantola A. Inverse Problem Theory (free PDF version) // Society for Industrial and Applied Mathematics – 2004.
18. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W.T., Flannery B.P. "Section 19.4. Linear Regularization Methods". Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.) // Cambridge University Press, New York – 2007.
19. Åkesson E. O., Daun K. J. Parameter selection methods for axisymmetric flame tomography through Tikhonov regularization // Appl. Opt. – 2008. – Vol. 47. – P. 407 – 416.

Поступила: 23.03.2017

Об авторах:

Тихомиров Василий Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, помощник декана факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, zedum@cs.msu.ru

Бобылева Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, o_bobyleva@mail.ru

Note on the authors:

Tikhomirov Vasily, candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Assistant dean of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, zedum@cs.msu.ru

Bobyleva Olga, candidate of Physical and Mathematical Science, Assistant of the Department of Nonlinear Dynamic Systems and Control Processes, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, o_bobyleva@mail.ru