УДК 519.62

**Синицын И.Н.**

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, г. Москва, Россия

# РАЗВИТИЕ МЕТОДИЧЕСКОГО И ИНСТРУМЕНТАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

**Аннотация**

*На основе приближенных методов нормальной аппроксимации (МНА) и статистической линеаризации (МСЛ) разработано методическое, алгоритмическое и экспериментальное программное обеспечение для аналитического моделирования нормальных (гауссовских) процессов в дифференциальных стохастических системах (СтС) с эллиптическими нелинейностями, описываемые функциями Якоби, Вейерштрасса и др. Создан банк коэффициентов МСЛ для типовых эллиптических нелинейностей (ЭН). Инструментальное программное обеспечение на базе МНА (МСЛ) выполнено в среде MATLAB-MAPLE. Приводится тестовый пример.*

**Ключевые слова**

*Метод аналитического моделирования (МАМ;, метод нормальной аппроксимации (МНА); метод статистической линеаризации (МСЛ); стохастическая система (СтС); эллиптическая нелинейность Вейерштрасса (ЭНВ); эллиптическая нелинейность Якоби (ЭНЯ).*

**Sinitsyn I.N.**

Federal Research Centre "Information and Management" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

# DEVELOPMENT OF METHODOLOGICAL AND SOFTWARE SUPPORT FOR ANALYTICAL MODELING OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH ELLIPTIC NONLINEARITIES

**Abstract**

*The article deals with methodical, algorithmic and experimental software developed on the basis of approximate methods of normal approximation and statistical linearization. The software is designed for analytical modeling of normal (Gaussian) processes in differential stochastic systems with elliptic nonlinearities described by Jacobian functions, Weierstrass functions etc. A bank of statistical linearization coefficients is created for typical elliptic nonlinearities. Software tools based on methods of normal approximation are designed in MATLAB-MAPLE. Test example is given.*

**Keywords**

*Elliptic Jacobi nonlinearity (EJN); elliptic Weierestrass nonlinearity (EWN); method of analytical modeling (MAM); method of normal approximation (MNA); method of statistical linearization (MSL); stochastic systems (StS).*

## Введение

В [1–3] начат цикл статей по методам и инструментальным программным средствам аналитического моделирования процессов в стохастических системах (СтС) со сложными нелинейностями, описываемыми такими специальными функциями, как Бесселевы целого и дробного порядка, а также связанными с ними функциями.

Рассмотрим развитие [4] на случай ЭН, описываемых функциями Якоби, Вейерштрасса и тэта–функциями. На основе расширенного методического обеспечения и программных средств [1–3] создадим банк данных коэффициентов МСЛ для типовых ЭН, далее разовьем экспериментальные программные средства в среде MATLAB-MAPLE и, наконец, проведем тестирование разработанных средств на примере эллиптического осциллятора Якоби в стохастической среде.

## Методическое обеспечение

*Эллиптические нелинейности Якоби и их статистическая линеаризация.* Как известно [5, 6], эллиптическая функция Якоби $Э=Э(u)$ определяется через эллиптический интеграл первого рода:

$$F(\phi,k^2)=\int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, \quad (1)$$

где $k$ – модуль интеграла; $\phi$ – амплитуда. Далее пусть

$$u=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt, \ \phi=\mathrm{am}\,u. \quad (2)$$

Тогда первые три из 12 эллиптических функций Якоби определяются следующими формулами:

$$\mathrm{sn}\,u=\sin\phi, \ \mathrm{cn}\,u=\cos\phi, \ \mathrm{dn}\,u=\Delta(\phi)=\sqrt{1-k^2\sin^2 t}. \quad (3)$$

Обозначим через $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ полные эллиптические интегралы, когда $\phi=\pi/2$:

$$\mathbf{K}(k)=F(\pi/2,k)=\mathbf{K}'(k'), \ k'=\sqrt{1-k^2},$$
$$\mathbf{K}'(k)=F(\pi/2,k')=\mathbf{K}(k') \quad (4)$$

и дополнительные параметры Якоби $q$ и $q'$:

$$q=q(k^2)=\exp\left(-\frac{\pi\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}\right), \ q'=q'(k^2)=\exp\left(-\frac{\pi\mathbf{K}}{\mathbf{K}'}\right). \quad (5)$$

Тогда разложение в ряд по параметру Якоби $q$ и аргументу $\upsilon$ $(\upsilon=\pi u/2\mathbf{K})$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{sn}(u|k^2)=\frac{2\pi}{k\mathbf{K}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\sin[(2n+1)\upsilon],$$
$$\mathrm{cn}(u|k^2)=\frac{2\pi}{k\mathbf{K}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos[(2n+1)\upsilon], \quad (6)$$
$$\mathrm{dn}(u|k^2)=\frac{\pi}{2\mathbf{K}}+\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos(2n\upsilon).$$

Рассмотрим скалярную ЭНЯ следующего вида:

$$Z=Э(Y,t). \quad (7)$$

Применим статистическую линеаризацию ЭНЯ по Казакову [6–8] при действительном несимметричном $(m_y\neq 0)$ гауссовском (нормальном) входном сигнале $Y_t$:

$$Y_t=Y(t)=m_y+Y_t^0, Y_t^0=Y_t-m_y, \quad (8)$$

где $m_y=Y_t$ – математическое ожидание; $D_y=(Y_t^0)^2$ – дисперсия; $Y_t^0$ – центрированная составляющая. В соответствии с МСЛ зависимость (7) аппроксимируется следующим выражением:

$$Z_t=Э_0(m_y,D_y,t)+k_1^э(m_y,D_y,t)Y_t^0. \quad (9)$$

Здесь $Э_0=Э_0(m_y,D_y,t)$ и $k_1^э=k_1^э(m_y,D_y,t)$ – коэффициенты МСЛ для (7), определяемые по формулам

$$Э_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}}\int_{-\infty}^{\infty}Э(\eta,t)\exp\left[-\frac{(\eta-m_y)^2}{2D_y}\right]d\eta,$$

$$k_1^э=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-m_y)Э(\eta,t)\exp\left[-\frac{(\eta-m_y)^2}{2D_y}\right]d\eta. \quad (10)$$

В случае векторных и матричных ЭНЯ полученные формулы имеют место для соответствующих компонент.

***Алгоритмы аналитического моделирования нормальных процессов в СтС с ЭНЯ.*** Уравнения конечномерных непрерывных нелинейных систем со стохастическими возмущениями путем расширения вектора состояния СтС могут быть записаны в виде следующего векторного стохастического дифференциального уравнения Ито [6–8]:

$$dY_t=a^э(Y_t,t)dt+b^э(Y_t,t)dW_0+\int_{R_0}c^э(Y_t,t,v)P^0(dt,dv), Y(t_0)=Y_0. \quad (11)$$

Здесь $Y_t$ – $(p\times 1)$-мерный вектор состояния, $Y_t\in\Delta_y$ ($\Delta_y$ – многообразие состояний); $a^э=a^э(Y_t,t)$ и $b^э=b^э(Y_t,t)$ – известные $(p\times 1)$-мерная и $(p\times m)$-мерная функции $Y_t$ и $t$; $W_0=W_0(t)$ – $(r\times 1)$-мерный винеровский стохастический процесс (СтП) интенсивности $v_0=v_0(t)$; $c^э=c^э(Y_t,t,\upsilon)$ – $(p\times 1)$-мерная функция $Y_t,t$ и вспомогательного $(q\times 1)$-мерного параметра $\upsilon$; $\int_{\Delta}dP^0(t,A)$ – центрированная пуассоновская мера, определяемая

$$\int_{\Delta}dP^0(t,A)=\int_{\Delta}dP(t,A)=\int_{\Delta}v_P(t,A)dt.$$

При этом принято: $\int_{\Delta}$ – число скачков пуассоновского СтП в интервале времени $\Delta=(t_1,t_2]$; $v_P(t,A)$ – интенсивность пуассоновского СтП $P(t,A)$; $A$ – некоторое борелевское множество пространства $R_0^q$ с выколотым началом. Начальное значение $Y_0$ представляет собой случайную величину, не зависящую от приращений $W_0(t)$ и $P(t,A)$ на интервалах времени, следующих за $t_0, t_0\le t_1\le t_2$, для любого множества $A$. Элементы векторно-матричных функций $a(Y_t,t)$, $b(Y_t,t)$ и $c(Y_t,t,v)$ являются ЭНЯ.

В случае аддитивных гауссовских (нормальных) и обобщенных пуассоновских возмущений уравнение (11) принимает вид [6–8]

$$\dot{Y}=a^{э}(Y_t,t)+b_0(t)V,V=\dot{W},Y(t_0)=Y_0. \quad (12)$$

Здесь $W$ – СтП с независимыми приращениями, представляющий собой смесь нормального и обобщенного пуассоновского СтП.

Как известно [6, 8], если существуют конечные вероятностные моменты второго порядка для моментов времени $t_1$ и $t_2$, то уравнения МНА для математических ожиданий $m_t$, ковариационной матрицы $K_t$ и матрицы ковариационных функций $K(t_1,t_2)$:

$$\dot{m}_t=a_1(m_t,K_t,t),m_0=m(t_0),$$
$$\dot{K}_t=a_2(m_t,K_t,t),K_0=K(t_0),$$
$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2}=K(t_1,t_2)a_{21}(m_{t_2},K_{t_2},t_2)^T,K(t_1,t_1)=K_{t_1}. \quad (13)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$m_t=M^N_{\Delta_y}Y_t,Y^0_t=Y_t-m_t,\ K_t=M^N_{\Delta_y}Y^0_tY^{0T}_t,$$
$$K(t_1,t_2)=M^N_{\Delta_y}Y^0_{t_1}Y^{0T}_{t_2},$$
$$a^э_1=a^э_1(m_t,K_t,t)=M^N_{\Delta_y}a^э(Y_t,t),$$
$$a^э_2=a^э_2(m_t,K_t,t)=a^э_{21}(m_t,K_t,t)+$$
$$+a^э_{21}(m_t,K_t,t)^T+a^э_{22}(m_t,K_t,t),$$
$$a^э_{21}=a^э_{21}(m_t,K_t,t)=M^N_{\Delta_y}a^э(Y_t,t)Y^{0T}_t,$$
$$a^э_{22}=a^э_{22}(m_t,K_t,t)=M^N_{\Delta_y}\bar{\sigma}^э(Y_t,t),$$
$$\sigma^э(Y_t,t)=b^э(Y_t,t)v_0(t)b^э(Y_t,t)^T, \quad (14)$$
$$\bar{\sigma}(Y_t,t)=\sigma^э(Y_t,t)+$$
$$\int_{R^q_0}c^э(Y_t,t,v)c^э(Y_t,t,v)^Tv_P(t,dv),$$

где $M^N_{\Delta_y}$ – символ вычисления математического ожидания для нормальных распределений на гладком многообразии $\Delta_y$.

В случае СтС (12) уравнения МНА переходят в известные уравнения МСЛ [6–8]:

$$\dot{m}_t=a^э_1(m_t,K_t,t),m_0=m(t_0),$$
$$\dot{K}_t=k^{эа}_1(m_t,K_t,t)K_t+K_tk^{эа}_1(m_t,K_t,t)^T+\sigma^э_0(t),K_0=K(t_0),$$
$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2}=K(t_1,t_2)K_{t_2}k^{эа}_1(m_{t_2},K_{t_2},t_2)^T,$$
$$K(t_1,t_2)=K_{t_1}, \quad (15)$$
$$a^э(Y_t,t)=a^э_0(m_t,K_t)+k^{эа}_1(m_t,K_t)Y^0_t,$$
$$k^{эа}_1(m_t,K_t,t)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial m_t}\right)a^э_0(m_t,K_t,t)^T\right]^T,$$

где

$$b^э(Y_t,t)=b^э_0(t),\ \sigma^э(Y_t,t)=b^э_0(t)v(t)b^э_0(t)^T=\sigma^э_0(t).$$

Таким образом, приходим к следующим алгоритмам аналитического моделирования на основе МНА и МСЛ.

Утверждения. *Если существуют интегралы (14), то уравнения (13) лежат в основе нестационарных алгоритмов МАМ для негауссовских СтС (11), а уравнения (15) – для негауссовских СтС (12). Для гауссовских СтС алгоритмы упрощаются, если принять* $c^э(Y_t,t,\upsilon)\equiv 0$ *в (11) и* $V=V_0$, $v^V=\upsilon^{V_0}$ *в (12).*

Для алгоритмизации МНА необходимо уметь вычислять следующие интегралы:

$$I^{эа}_0=I^{эа}_0(m_t,K_t,t)=a^э_1(m_t,K_t,t)=M^N_{\Delta_y}\left[a^э(Y_t,t)\right], \quad (16)$$
$$I^{эа}_1=I^{эа}_1(m_t,K_t,t)=a^э_{21}(m_t,K_t,t)=M^N_{\Delta_y}\left[a^э(Y_t,t)Y^{0T}_t\right], \quad (17)$$
$$I^{э\bar{\sigma}}_0=I^{э\bar{\sigma}}_0(m_t,K_t,t)=a^э_{22}(m_t,K_t,t)=M^N\left[\bar{\sigma}^э(Y_t,t)\right], \quad (18)$$

а для МСЛ достаточно вычислить первый интеграл в (16), причем интеграл $I^{эа}_1$ вычисляется по формуле [6–8]:

$$k^{эа}_1=k^{эа}_1(m_t,K_t,t)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial m_t}\right)I^{эа}_0(m_t,K_t,t)^T\right]^T. \quad (19)$$

Уравнения МНА (МСЛ) содержат интегралы $I^a_0,I^a_1,I_0$ в виде соответствующих коэффициентов. Поэтому процедура вычисления интегралов должна быть согласована с методом численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений для $m_t,K_t$ и $K(t_1,t_2)$. Эти коэффициенты допускают дифференцирование по $m_t$ и $K_t$, так как под интегралом стоит сглаживающая нормальная плотность.

В [10] изложены алгоритмы дискретного аналитического и статистического моделирования типовых распределений (в том числе нормальных) в нелинейных СтС на многообразиях. Алгоритмы дискретного аналитического и статистического моделирования для СтС с СЭН, а также смешанные алгоритмы различной степени точности относительно шага интегрирования также представлены в [10].

Трудоемкость алгоритмов МАМ для СтС с нелинейностями Вейерштрасса гораздо выше, чем трудоемкость для нелинейностей Якоби. Поэтому в таких случаях при использовании степенных разложений интегралов от сложных функций, основанных на интегралах Лапласа, целесообразно пользоваться выражениями эллиптических функций Вейерштрасса через эллиптические функции Якоби.

Для типовых ЭНЯ создан банк коэффициентов МСЛ.

**Инструментальное программное обеспечение**

Как известно [5, 6], в зависимости от

аналитической формы представления сложной эллиптической нелинейности (СЭН) различают следующие общие методы вычисления нелинейных функций:

– степенные разложения;
– многочленные разложения;
– дробно-рациональные приближения;
– асимптотические формулы и приближения;
– рекуррентные соотношения.

Для СЭН к числу эффективных специальных методов относятся методы разложений по параметру Якоби. Такие методы и алгоритмы описаны в разделе 1.

При разработке инструментального программного обеспечения были использованы как традиционные, так и символьные средства, подробно описанные в [2, 3, 10].

**Пример**

Рассмотрим нелинейную двумерную СтС, описываемую следующими уравнениями:

$$\dot{Y}_1=Y_2,\dot{Y}_2=-\omega_0^2Э(Y_1)+L_0-2\varepsilon\omega_0Y_2+$$
$$+h^2V,Y_1(t_0)=Y_{10},Y_2(t_0)=Y_{20}. \quad (20)$$

Здесь $Y_1,Y_2$ – координата и скорость; $Э(Y_1)=\mathrm{sn}Y_1$ – эллиптическая функция Якоби, определяющая эллиптический осциллятор Якоби (ЭОЯ); $L_0$ – постоянная или медленно меняющаяся на интервале времени $T=2\pi\omega_0^{-1}$ величина; $-2\varepsilon\omega_0Y_2$ – линейная диссипативная составляющая; $h^2V$ – стохастическая составляющая, представляющая собой нормальный белый шум интенсивности $h^2v$; $\varepsilon,h,\omega_0^2$ – постоянные параметры; $Y_{10},Y_{20}$ – нормальные независимые начальные координата и скорость.

Применяя уравнения МНА для $D_1=K_{11}$, $D_2=K_{22}$, $K_{12}$ и получим искомые уравнения аналитического моделирования ЭОЯ:

$$\dot{m}_1=0,\ m_1(t_0)=m_{10},\ \dot{m}_2=-\omega_0^2Э_0(m_1,D_1)+$$
$$+L_0-2\varepsilon\omega_0m_2,\ m_2(t_0)=m_{20}, \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{D}_1=2K\,r_{12},D_1(t_0)=D_{10},\\&\dot{D}_2=-2\left[\omega_0^2Э_0(m_1,D_1)K_{12}+2\varepsilon\omega_0D_2\right]+h^2v,\\&D_2(t_0)=D_{20},\\&\dot{K}_{12}=D_2-\omega_0^2k_1^3(m_1,D_1)D_1-2\varepsilon\omega_0K_{12},\ K_{12}(t_0)=K_{120}.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

В стационарном режиме при $L_0=0$, $v=v^*$ имеем

$$Э_0(0,D_1)=0,\ m_1^*=0,\ m_2^*=0,K_{12}^*=0,\ D_2^*=\frac{h^2v^*}{4\varepsilon\omega_0}, \quad (23)$$

а $D_1^*$ определяется из уравнения

$$k_1^{sn}(0,D_1^*)D_1^*=\gamma\left(\gamma=\frac{h^2v^*}{4\varepsilon\omega_0^3}\right). \quad (25)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$k_1^{sn}(0,D_1)=\kappa^{sn}(D_1)_{n=0}^{\infty}A_n^{sn}(q)\exp\left[-\alpha_n^{sn}(D_1)\right],$$
$$\kappa^{sn}(D_1)=\frac{\pi D_1}{k\mathbf{K}^2}k^2,\ \ A_n^{sn}(q)=\frac{(2n+1)q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}},$$
$$\alpha_n^{sn}=\left(\frac{\pi(2n+1)}{\mathbf{K}}\right)^2\frac{D_1}{8},\ \ q=\exp\left[-\frac{\pi\mathbf{K}'(k)}{\mathbf{K}(k)}\right]. \quad (26)$$

Средняя квадратическая ошибка при вычислении $D_1^*$ составляет 12% при $\varepsilon/\omega_0=0{,}1$, а при $\varepsilon/\omega_0=0{,}5$ – 8%. Дисперсия скорости вычисляется точно. Этого достаточно для решения типовых задач надежности систем виброударозащиты.

**Заключение**

На основе приближенных методов нормальной аппроксимации и статистической линеаризации разработано методическое обеспечение для аналитического моделирования нормальных процессов в гауссовских и негауссовских стохастических системах с нелинейностями, описываемыми эллиптическими функциями Якоби, Вейерштрасса и другими связанными с ними функциями.

Создан банк коэффициентов статистической линеаризации для типовых эллиптических нелинейностей.

Разработано экспериментальное инструментальное программное обеспечение в среде MATLAB-MAPLE и комплекс тестовых примеров для научных и образовательных целей.

На примере эллиптического осциллятора Якоби в стохастической среде показано, что разработанные средства дают результаты качественно совпадающие с точным решением в стационарном режиме. Кроме того, для нестационарных режимов средств оценивания и прогнозирования эффективного времени релаксации для стохастических стационарных и ударных воздействий.

Представляет интерес развитие полученных результатов для параметрического аналитического моделирования методами моментов, квазимоментов и ортогональных разложений согласно [7, 8].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы III.3 «Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН» (№0063-2016-0018).*

## Литература


1. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р. Моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными трансцендентными нелинейностями // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 23–29.
2. Синицын И. Н. Аналитическое моделирование процессов в динамических системах с цилиндрическими бесселевыми нелинейностями // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 39–49.
3. Синицын И. Н., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В. Символьное аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными бесселевыми нелинейностями дробного порядка // Системы и средства информатики, 2016. Т. 26. № 3. С. 26–47.
4. Синицын И. Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах с эллиптическими нелинейностями Якоби // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27. № 1. С. 4–20.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. 832 с.
6. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. – Киев: Наукова думка, 1984. 599 с.
7. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. 632 с. [Англ. пер. Stochastic Differential Systems. Analysis and Filtering. – Chichester, New York: Jonh Wiley, 1987. 549 p.].
8. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с. [Англ. пер. Stochastic Systems. Theory and Applications. – Singapore: World Scientific, 2001. 908 p.].
9. Синицын И. Н., Синицын В. И. Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. – М.: Торус Пресс, 2013. 488 с.
10. Синицын И. Н. Параметрическое статистическое и аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Информатика и ее применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С. 4–16.


## References


1. Sinitsyn, I. N. 2013. Parametricheskoe statisticheskoe i analiticheskoe modelirovanie raspredeleniy v nelineynykh stokhasticheskikh sistemakh na mnogoobraziyakh [Parametric statistical and analytical modeling of distributions in stochastic systems on manifolds]. Informatika i ee Primeneniya - Inform. Appl. 7(2) :4-16.
2. Sinitsyn I. N. 2015. Analiticheskoe modelirovanie protsessov v dinamicheskikh sistemakh s tsilindricheskimi besselevymi nelineynostyami [Analytical modeling of processes in dynamical systems with cylindric Bessel nonlinearities] // Informatika i ee primeneniya. 9(4). 39--49.
3. Sinitsyn I. N., Korepanov E. R., Belousov V. V. 2016. Simvol'noe analiticheskoe modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi besselevymi nelineynostyami drobnogo poryadka [Symbolic Analytical Modeling of Normal Processes in Stochastic Systems with Complex Fraction Order Bessel nonlinearities] // Sistemy i sredstva informatiki. 26(3). 26–47.
4. Sinitsyn I. N. Analiticheskoe modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh s ellipticheskimi nelineynostyami Yakobi [Analytical modeling of normal processes in stochastic systems with elliptic nonlinearities Jacobi] // Sistemy i sredstva informatiki, 2017. 27( 1). 4–20.
5. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam / Pod red. M. Abramovicha i I. Stigana. -- M.: Nauka. 1979. 832 s.
6. Popov B. A., Tesler G. S. 1984. Vychislenie funktsiy na EVM: Spravochnik. -- Kiev: Naukova Dumka. 599~s.
7. Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. 1987. Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy. Analiz i fil'tratsiya. – M.: Nauka, 1990. 632 s. [Angl. per. Stochastic Differential Systems. Analysis and Filtering. – Chichester, New York: Jonh Wiley. 549 p.].
8. Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. } 2000; 2004. Teoriya stokhasticheskikh sistem. – M.: Logos. 1000 s. [Angl. per. Stochastic Systems. Theory and Applications. – Singapore: World Scientific, 2001. 908 p.].
9. Sinitsyn I. N., Sinitsyn V. I. 2013. Lektsii po normal'noy i ellipsoidal'noy approksimatsii raspredeleniy v stokhasticheskikh sistemakh [Lectures on Normal and Ellipsoidal Approximation in Stochastic Systems]. – M.: Torus Press. 488 s.
10. Sinitsyn I. N., Sinitsyn V. I., Korepanov E. R. 2015.Modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi transtsendentnymi nelineynostyami // Informatika i ee primeneniya. 9(2). 23–29.


Поступила: 2.05.2017

**Об авторе:**

**Синицын Игорь Николаевич**, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник, Институт проблем информатики Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН), sinitsin@dol.ru

**Note on the author:**

**Sinitsyn Igor**, doctor of Science in Technology, professor, Honored scientist of RF, principle scientist, Institiute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, sinitsin@dol.ru