УДК 004.356.2

Дружинина О.В. [1], **Масина О.Н.** [2]

[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия
[2] Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец, Россия

О ПОДХОДАХ К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛОГИЧЕСКИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Аннотация

Рассмотрены вопросы моделирования и анализа устойчивости нелинейных динамических систем с логическими регуляторами. Охарактеризованы подходы к исследованию устойчивоподобных свойств указанных систем. Описаны аспекты применения полученных результатов аналитического моделирования для разработки алгоритмов исследования устойчивости и стабилизации и проведения численных экспериментов с использованием современного программного обеспечения.

Ключевые слова

Нелинейные динамические системы, устойчивость, стабилизация, аналитическое моделирование, инструментальные средства.

Druzhinina O.V. [1], **Masina O.N.** [2]

[1]Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
[2]Bunin Yelets State University, Yelets, Russia

ON APPROACHES TO THE STABILITY ANALYSIS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH LOGICAL CONTROLLERS

Abstract

The problems of modeling and of the stability analysis of nonlinear dynamic systems with logic controllers are considered. Approaches to research of stability-like properties for these systems are characterized. The aspects of application of the obtained results of analytical modeling for the development of algorithms for stability and stabilization research and for performing numerical experiments using the modern software are described.

Keywords

Nonlinear dynamic systems, stability, stabilization, logic controller, analytical modeling, tools.

Введение

Развитие техники и новые компьютерные технологии, разработка программного обеспечения и систем сбора и обработки данных определяют значительное усложнение структуры проектируемых технических систем. В связи с этим возникает проблема системного анализа сложных управляемых систем, позволяющего определять условия устойчивого их функционирования с обеспечением заданного режима работы, влияние параметров системы на ее устойчивость [1, 2]. Значительное место в исследовании этой проблемы занимает разработка математических методов аналитического моделирования процессов, в том числе процессов в детерминированных системах со случайными начальными условиями. Кроме того, к актуальным направлениям аналитического моделирования можно отнести моделирование систем с неопределенностями, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, нечеткими дифференциальными уравнениями и дифференциальными включениями [3–7]. Результаты моделирования таких систем и свойства логических регуляторов могут быть использованы для построения управляемых систем с учетом различных особенностей, таких как структура, неполнота информации о состоянии окружающей среды и параметрах системы, запаздывание в обработке этой информации. Системы управления с неполной информацией, в том числе моделируемые с помощью логических регуляторов, применяются в случаях, когда объект управления достаточно сложен для его точного описания и существует дефицит априорной информации о поведении системы. Вопросам алгоритмического конструирования и устойчивости систем управления с неполной информацией посвящены, в частности, работы [8–32].

Во многих технических задачах структура управляемых динамических систем и ее параметры известны с некоторой погрешностью. Следовательно, необходимым требованием к управляемым динамическим системам является их устойчивость (в том или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. Построение алгоритмов исследования устойчивости позволяет проводить анализ влияния различных проектных параметров на качество функционирования сложного технического объекта.

Одним из эффективных методов исследования устойчивости и других качественных свойств динамических систем является классический и обобщенный методы функций Ляпунова. Метод функций Ляпунова получил развитие в [3–5, 21–23] и многих других работах. В настоящее время обобщенный второй метод Ляпунова стал одним из важнейших методов качественного исследования устойчивости движения динамических управляемых систем. В [22] с помощью обобщенных функций Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости динамических управляемых систем. В [21] развиты методы анализа устойчивости и управляемости динамических систем, задаваемых дифференциальными уравнениями различных типов. В [32] дан обзор известных результатов по применению разрывных функций Ляпунова к изучению устойчивости систем управления.

В системах с логическими регуляторами знания о взаимодействии регулятора с объектом (процессом) управления представляются в форме правил вида: ЕСЛИ (исходная ситуация), ТО (ответная реакция). Часть ЕСЛИ (предпосылки или условия) означает сопряжение логических операций, а часть ТО (решение, вывод, заключение) представляет собой указание лингвистической величины для выходного воздействия (управляющего воздействия на объект управления) логического регулятора.

При решении задач управления системами на основе логических регуляторов возникает проблема исследования устойчивости этих систем. В ряде промышленных нормативов в России и за рубежом заложено требование обеспечения устойчивости системы управления. Это требование рассматривается как необходимое условие для использования системы управления. Имеется много прикладных задач, для которых проверка устойчивости управляемой системы оценивается как важнейшая задача. К этим задачам относятся задачи проектирования управляемых систем, влияющих на безопасность людей (стабилизация полета самолета и т.п.), проектирования управляющих дорогостоящих объектов, изучения сложных технических процессов, подверженных потере устойчивости. Вопросы алгоритмического конструирования и устойчивости динамических систем с логическими регуляторами рассматривались в [2, 11, 15–19, 24] и в других работах. Несмотря на то, что литература по теории динамических систем с логическими регуляторами весьма обширна, вопросы устойчивости и стабилизации указанных систем требуют дальнейшей разработки [23].

Современным подходом к изучению динамических систем с логическими регуляторами является переход к интеллектному управлению [2]. Использование интеллектных систем ведет к более высокой степени автоматизации для сложных, плохо структурированных процессов и в ряде случаев сокращает время разработки технических систем. Интеллектное управление оказывается полезным в случаях, когда технологические процессы являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов или когда доступные источники информации интерпретируются неточно или неопределенно.

Многие управляемые объекты управления в силу своей динамики представляют собой различные виды маятниковых установок (а в некоторых случаях и их комбинацию), соблюдение устойчивости для которых является обязательным требованием их эксплуатации. Динамические модели перевернутого маятника используются в задачах управления техническими средствами с гироскопическим устройством, в робототехнике, в ракетостроении. Многозвенные перевернутые маятники служат упрощенными примерами шагающих роботов. В связи с многообразием физических эффектов, нестационарностью объекта и наличием неконтролируемых возмущающих воздействий процессы, протекающие в маятниковых системах, в ряде случаев являются сложными для получения их адекватного математического описания с помощью классических методов моделирования [24]. Для решения данной научной проблемы существуют подходы, базирующиеся на правилах логического вывода и логическом регуляторе, синтезируемом для стабилизации системы. В одном из наиболее эффективных подходов построение модели управляемой системы осуществляется при наличии хотя бы приближенной математической модели, заданной в виде дифференциальных или разностных уравнений. С помощью универсальной аппроксимации исходная модель приводится к виду модели Такаги–Суджено (ТС-модели).

Общей идеей большинства исследований по устойчивости и стабилизации ТС-моделей является использование метода функций Ляпунова и сведение решения вопроса об устойчивости к анализу свойств линейных матричных неравенств, к которым применимы методы численного решения. Линейные матричные неравенства требуемого вида обычно получают на основе достаточных условий устойчивости (асимптотической устойчивости) в терминах функций Ляпунова. Вид линейных матричных неравенств зависит как от структуры применяемой функции Ляпунова, так и от ограничений, накладываемых на эту функцию. Основные трудности в конкретных задачах устойчивости, решаемых с помощью прямого метода, возникают при построении функций Ляпунова, и на ослаблении требований к указанным функциям базируется один из подходов к дальнейшей разработке условий устойчивости. Несмотря на большой интерес исследователей к данной области, развитие систематических методов изучения устойчивости динамических систем с логическими регуляторами остается малоизученным направлением в теории управляемых систем.

Базирующиеся на правилах логического вывода и логических регуляторах ТС-модели находят приложения в промышленности, в естествознании, в инженерной практике. Указанные модели применяются в задачах управления механическими транспортными средствами, управления подъемными и мостовыми кранами, управления роботами-манипуляторами.

В настоящей работе охарактеризованы известные и разработанные авторами подходы к исследованию устойчивости динамических систем с логическими регуляторами. Подходы базируются на развитии метода функций Ляпунова, дивергентного, спектрального-бифуркационного и других методов, а также на представлении нелинейных систем с помощью ТС-моделей. Указанные методы позволили получить конструктивные условия устойчивости и стабилизации некоторых классов управляемых систем.

Некоторые подходы к исследованию устойчивости систем с логическими регуляторами

Одним из эффективных подходов к исследованию устойчивости и других качественных свойств динамических систем является подход на основе метода функций Ляпунова и его обобщений [3]. В настоящее время прямой метод Ляпунова стал одним из важнейших методов качественного исследования управляемых динамических систем.

В случаях, когда объект управления достаточно сложен для его точного описания и существует дефицит априорной информации о поведении системы, обычно используют неклассические методы теории управления (в частности, методы интеллектного управления) либо сочетают неклассические методы с классическими. Основы построения, методы анализа и примеры использования в технике и промышленности систем интеллектного управления представлены в [2]. В системах с логическими регуляторами знания о взаимодействии логического регулятора с объектом (процессом) управления представляются в форме правил вида: ЕСЛИ (исходная ситуация), ТО (ответная реакция). Современным подходом к изучению динамических систем с логическими регуляторами является сочетание интеллектного управления с использованием традиционных алгоритмов, базирующихся на уравнениях динамики.

При построении и анализе динамических систем с логическими регуляторами используются методы качественной теории динамических систем и теории управления. В [21–23] разработан ряд методов исследования устойчивости динамических систем с логическими регуляторами, а именно: спектрально-бифуркационный метод, дивергентный метод, комбинированный метод функций Ляпунова с использованием свойств линейных матричных неравенств. Подход к анализу устойчивости на основе дивергентного метода подробно изложен в [33].

Спектрально-бифуркационный метод базируется на совместном использовании критерия Ляпунова и бифуркационной картины поля состояний системы. С помощью указанного метода авторами получены условия устойчивости, определено понятие «запас устойчивости» и разработан алгоритм нахождения запаса устойчивости [22]. Посредством дивергентного метода, основанного на совместном использовании функций Ляпунова и дивергентных функций поля скоростей, авторами получены условия равномерной устойчивости состояний равновесия управляемых систем [22].

Развит подход, базирующийся на совместном использовании прямого метода Ляпунова и техники линейных матричных неравенств (ЛМН) [25–29]. С применением указанного подхода получены условия устойчивости дискретных и непрерывных управляемых систем с синглтон-выходом, систем Такаги–Суджено (ТС-систем) при наличии и отсутствии запаздывания [20, 25, 34–36] . Описание процессов с помощью ТС-систем эффективно применяются в задачах управления механическими транспортными средствами, в задачах управления подъемными и мостовыми кранами, а также роботами-манипуляторами [2, 18, 23].

Общей идеей большинства исследований по устойчивости и стабилизации ТС-систем, базирующихся на правилах логического вывода и нечетких регуляторах, является использование метода функций Ляпунова и сведение решения вопроса об устойчивости к анализу свойств ЛМН, к которым применимы методы численного решения [18]. ЛМН требуемого вида обычно получают с помощью достаточных условий устойчивости в терминах функций Ляпунова с учетом их структуры и ограничений. В [24] изучены условия стабилизации ТС-систем и их модификаций на примере стабилизации обобщенных моделей перевернутого маятника. Построены ТС-системы управления перевернутым маятником, выполнено численное моделирование управляемых маятниковых систем на основе применения алгоритма Лоусона. Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ для изучения динамики управляемых маятниковых систем, проведены серии компьютерных экспериментов и выполнена проверка согласованности теоретических результатов с результатами численного исследования.

Динамические ТС-модели и их стабилизация

В ряде задач управления изучаемые нелинейные явления описываются с помощью ТС-моделей, базирующихся на правилах логического вывода и нечетких регуляторах.

Как известно [16–18], ТС-модель задается следующими правилами двух видов (динамической части и выхода соответственно):

Π_1: ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M^i_1 и … и $z_l(t)$ есть M^i_l,

ТО $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r;$ (1)

Π_2: ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M^i_1 и … и $z_l(t)$ есть M^i_l,

ТО $y(t) = C_i x(t)$,

где $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – фазовый, входной, выходной векторы и вектор параметров соответственно. Через M^i_j обозначается нечеткая функция, отвечающая i-му правилу и j-му параметру. В общем случае функции z_j могут быть функциями фазовых переменных, внешних возмущений и времени.

В ТС-модели применяемые правила являются нечеткими только в части ЕСЛИ, тогда как в части ТО содержатся функциональные зависимости. Каждому i-му правилу Π_i соответствуют функции $w_i(z(t))$ и $h_i(z(t))$ вида

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{l} M^i_j(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))},$$

где r – число правил. Предполагается, что $w_i \geq 0$, а h_i нормированы.

Обозначим через $z(t)$ вектор с компонентами $z_1(t)$, ..., $z_p(t)$. Предполагается, что исходные переменные не являются функциями от входящих переменных $u(t)$. Каждое последующее линейное уравнение, представленное в виде $A_i x(t) + B_i u(t)$, называется подсистемой. Векторы $\dot{x}(t)$ и $y(t)$ представимы в виде

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i x(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}, \tag{2}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}.$$

Так как $\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0$, *где* $w_i(z(t)) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, то $\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) > 0$, где $h_i(z(t)) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Как известно [18], для построения логических регуляторов, стабилизирующих систему (1), используется понятие параллельной распределенной компенсации. Регулятор задается равенством вида

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i x(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) F_i x(t), \tag{3}$$

$i = 1, 2, \dots, r.$

где F_i – коэффициенты усиления.

При отсутствии $u(t)$ система (5.2) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) A_i x(t). \tag{4}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости в целом системы (4) формулируются следующим образом [18, 23].

Теорема 1 *Состояние равновесия системы* (4) *асимптотически устойчиво в целом, если существует общая положительно определенная матрица* P *такая, что выполняются неравенства*

$$A_i^T P A_i - P < 0, \; i = 1, 2, \dots \; r,$$

то есть общая матрица P *должна существовать для всех подсистем.*

Подставляя (3) в (2), получим систему вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t). \tag{5}$$

Уравнение (5) запишем в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left\{\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right\} x(t), \tag{6}$$

где $G_{ij} = A_i - B_i F_j$.

Достаточные условия асимптотической устойчивости в целом системы (6) даются следующей теоремой [18].

Теорема 2. *Состояние равновесия системы* (6) *асимптотически устойчиво в целом, если существует общая положительно определенная матрица* P *такая, что выполняются неравенства*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0,$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P \le 0, \quad i<j, \quad h_i \cap h_j \ne \varnothing .$$

Если число r правил ЕСЛИ…ТО велико, то нахождение общей матрицы P, удовлетворяющей условиям теоремы 2, является затруднительным. В [18, 23] приведены условия устойчивости, ослабляющие условия теоремы 2. Одно из таких условий формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть число правил, выполнимых для всех* t, *меньше или равно* s, *где* $1<s<r$. *Состояние равновесия системы управления* (6) *асимптотически устойчиво в целом, если существует общая положительно определенная матрица* P *и общая положительно полуопределенная матрица* Q *такие, что выполняются неравенства*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1)Q < 0,$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P - Q \le 0, \; i<j, \; h_i \cap h_j \ne \varnothing ,$$

где $s > 1$.

Задача построения управления заключается в том, чтобы определить коэффициенты F_j (j = 1, 2, …, r), удовлетворяющие условиям теорем 1 и 2, с общей для подситем положительно определенной матрицей P. Если такие коэффициенты F_j существуют, то система (2) называется стабилизируемой. Поиск положительно определенной матрицы P долгое время считался сложным процессом. В [18] приводится процедура построения общей матрицы P для нечетких систем второго порядка. Показано, что задачу нахождения общей матрицы P можно решить численно, т.е. условия устойчивости в теоремах 1 и 2 можно выразить в виде линейных матричных неравенств.

Как известно, линейное матричное неравенство можно представить в следующем виде:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0,$$

где $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и симметрические матрицы $F_i = F_i^T \in R^{n\times n}$, i= 0, …, m заданы.

Нетрудно показать, что условия устойчивости в теореме 5.1 можно сопоставить со свойствами соответствующих линейных матричных неравенств: для заданных матриц $A_i \in R^{nxn}, i=1,\ldots,r$, необходимо найти матрицу P, удовлетворяющую линейным матричным неравенствам

$$P > 0, \; A_i^T P A_i - P < 0, \; i = 1, 2, \ldots \; r,$$

или установить, что такой матрицы P не существует.

Задача построения логического регулятора, стабилизирующего систему управления, формулируется с учетом теоремы 2 следующим образом:

$$X(A_i - B_iF_i)^T X^{-1}(A_i - B_iF_i)X - X < 0,$$

$$X\left(\frac{A_i - B_iF_j + A_j - B_jF_i}{2}\right)^T \times \tag{7}$$

$$\times X^{-1}\left(\frac{A_i - B_iF_j + A_j - B_jF_i}{2}\right)X - X \le 0.$$

При $M_i = F_i X$, $X > 0$ имеем $F_i = M_i X^{-1}$. Подставляя последнее выражение в неравенства (7), получим

$$X - (A_i - B_iM_i)^T X^{-1}(A_i - B_iM_i) > 0,$$

$$X - X\left(\frac{A_iX - B_iM_j + A_jX - B_jM_i}{2}\right)^T \times \tag{8}$$

$$\times X^{-1}\left(\frac{A_iX - B_iM_j + A_jX - B_jM_i}{2}\right)X \ge 0.$$

Условия (8) представимы в виде линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_iX - B_iM_i & X \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} X & \left(\frac{A_iX + A_jX - B_iM_j - B_jM_i}{2}\right)^T \\ \left(\frac{A_iX + A_jX - B_iM_j - B_jM_i}{2}\right)^T & X \end{pmatrix} \ge 0,$$

Задача построения логического регулятора, стабилизирующего систему управления (2), сводится к следующей задаче: найти $X > 0$ и M_i, $i = 1, \ldots, r$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{pmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_iX - B_iM_i & X \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} X & \frac{A_iX + A_jX - B_iM_j - B_jM_i}{2} \\ \frac{A_iX + A_jX - B_iM_j - B_jM_i}{2} & X \end{pmatrix} \ge 0,$$

$$i<j, \quad h_i \cap h_j \ne \varnothing ,$$

где $X = P^{-1}$, $M_i = F_i X$. Соответственно матрица P и стабилизирующая обратная связь задаются следующим образом:

$P = X^{-1}$, $F_i = M_i X^{-1}$,

П$_1$: ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M^i_1 и … и $z_l(t)$ есть M^i_l.

Вопросы построения и устойчивости логических регуляторов с помощью модифицированных линейных матричных неравенств в случае ограничений по входам и выходам управления, а также при выполнении условия независимого начального состояния рассмотрены в [17–23] и в других работах.

Как известно, большинство разработанных методов и алгоритмов построения управлений рассчитаны на линейные системы, однако эти методы в ряде случаев могут быть модифицированы для изучения нелинейных систем, что оказывается удобным при решении практических задач ввиду трудноприменимости или недостаточности нелинейной теории. Именно поэтому различные методы сведения нелинейной задачи к линейной получают широкое распространение в современной теории управления.

В ряде задач управления изучаемые нелинейные системы удобно описывать с помощью ТС-моделей, причем нечеткие множества и правила нечеткого вывода здесь используются для описания глобальной нелинейной системы в терминах множества локальных линейных систем, гладко связанных между собой посредством функций нечеткой принадлежности [18]. Таким образом, в результате редукции к ТС-модели исходная нелинейная модель представляется (возможно, лишь в некоторой области) в виде выпуклой комбинации нескольких линейных систем. Универсальность подхода на основе ТС-моделей заключается в том, что любая гладкая функция (представляющая, например, правую часть дифференциального уравнения) может быть на выпуклом множестве с любой степенью точности приближена указанной комбинацией [16–18]. Таким образом, использование ТС-моделей приводит к альтернативному подходу в описании нелинейных систем.

В ТС-модели каждому i-му правилу Π_i соответствует функция $h_i(x)$ вида $h_i(x)=\prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j)$. Предполагается, что h_i нормированы, т.е. $h_i(x)=1$ и $\sum_{i=1}^{r} h_i(x)=1$. С помощью центроидного метода, используемого в процедуре дефаззификации, можно представить модель в виде

$$y=\varphi(x)=\sum_{i=1}^{r} h_i(x)a_i x .$$

Для нелинейной функции $f(x): R^n \to R$, определенной в компактной области $D \subset R^n$, удовлетворяющей следующим условиям:1) $f(0)=0$; 2) $f \in C_1^2$, структура алгоритма ТС-аппроксимации и его особенности описаны в [18, 24].

Рис. 1. Схема аппроксимации модели управляемой динамической системы

Для аппроксимации функции $f(x)$ синтез ТС-модели можно осуществить таким образом, чтобы ошибка аппроксимации $e(x)=f(x)-\varphi(x)$ и ее производная $\partial e/\partial x$ были достаточно малыми для всех $x \in D$.

Модель управляемой системы вида $\dot{x}=f(x)+g(x)u$ может быть аппроксимирована с помощью перехода к ТС-модели, содержащей $\dot{x}=\sum_{i=1}^{r} h_i(x)(A_i(x)+B_i u(t))$. Схема аппроксимации модели управляемой динамической системы приведена на рис. 1.

Преимущества подхода к аналитическому моделированию нелинейных систем, основанного на применении ТС-моделей для аппроксимации нелинейных систем, по сравнению с некоторыми классическими подходами заключаются в следующем:

1) возможен анализ качественных свойств изучаемых моделей не только в локальном, но и в глобальном смысле;

2) возможна редукция базы правил без потери информации о модели;

3) условия устойчивости представляются в достаточно компактном виде, удобном для вычислительных процедур.

Указанные преимущества использованы авторами в ряде работ, посвященных анализу устойчивости моделей ряда классов систем естествознания и техники [23, 24].

Аспекты применимости условий устойчивости и алгоритмов стабилизации для проведения численных экспериментов с использованием современного программного обеспечения

Для ряда классов нелинейных управляемых систем с логическими регуляторами, представленных ТС-моделями, в [23–26] на основе полученных условий устойчивости разработаны конструктивные алгоритмы исследования стабилизации, реализация которых возможна с применением современного программного обеспечения. С помощью условий устойчивости, полученных в [36], могут быть построены алгоритмы стабилизации нелинейных систем с каскадной структурой.

При проведении численного моделирования управляемых систем возникает ряд трудностей, связанных с представлением условий устойчивости линейными матричными неравенствами и большим их количеством. Одной из главных трудностей является наличие дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В таких случаях целесообразным является применение алгоритма Лоусона решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений [37, 38]. Указанный алгоритм сводится к преобразованию исходной системы дифференциальных уравнений в систему дифференциальных уравнений относительно новой неизвестной функции с помощью специальной замены, после чего полученная система может быть решена традиционными методами численного интегрирования. Алгоритм

Лоусона решает ее методом Рунге–Кутты, при этом одновременно с решением производится обратное преобразование от новой введенной функции к исходной функции. Эффективность используемого алгоритма для исследования управляемых маятниковых систем с ПИД-регуляторами описана в работе [38], а для управляемых маятниковых систем, представленных ТС-моделями, в работах [24, 26, 39, 40].

Для верификации синтезированной ТС-модели перевернутого маятника разработан комплекс программ в вычислительной среде Matlab. Комплекс содержит модули для ввода данных, для вывода результатов, для графической иллюстрации результатов, модуль основной программы, объединяющей работу двух правил, а также две подпрограммы и модуль-справки, в котором дается описание используемых обозначений. Нахождение решений дифференциальных уравнений, входящих в описание ТС-модели перевернутого маятника, осуществляется с помощью алгоритма Лоусона, реализованного в виде расширения для Matlab, и использующего подпрограммы: right.m – вычисляет значение функции в правой части модельного уравнения, rightj – вычисляет соответсвующую матрицу Якоби.

Построение стабилизирующего логического регулятора выполняется с учетом значений матриц, входящих в сответствующие линейные матричные неравенства и вычисляемых для каждого начального условия. Значения функций принадлежности определяются с помощью редактора функций принадлежности Membership Function Editor пакета Fuzzy Logic Toolbox среды Matlab.

Результаты компьютерного моделирования перевернутого маятника представлены в виде графиков отклонений и угловой скорости. Графики демонстрируют эффективность применения построенного логического регулятора при достаточно больших углах отклонения маятника, даже в случае, когда модель теоретически является неуправляемой.

С помощью алгоритма Лоусона и разработанного комплекса программ проведено исследование решений системы дифференциальных уравнений модели перевернутого маятника. На рис. 2 представлены некоторые из фазовых траекторий.

Из графиков видно, что при $t \to \infty$ траектории приближаются к точке равновесия x=0 и определяют состояние равновесия устойчивый узел. Аналогичные результаты численного анализа ТС-модели перевернутого маятника получены и для других начальных условий. Показано, что численные результаты полностью согласуются с полученными результатами аналитического исследования.

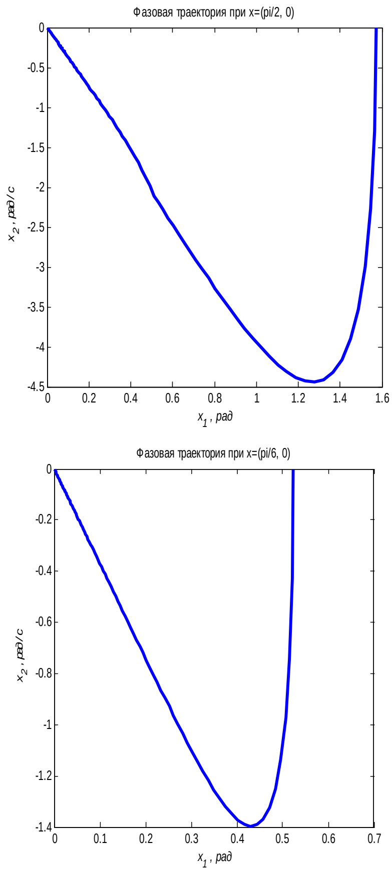

Рис. 2. Фазовая траектория для $x(0) = (\pi/2\ 0)^T$ *и* $x(0) = (\pi/6\ 0)^T$

Авторами изучены условия стабилизации ТС-систем и их модификаций. Построены обобщенные ТС-системы управления перевернутым маятником, выполнено численное моделирование управляемых маятниковых систем на основе применения алгоритма Лоусона. Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ для изучения динамики управляемых маятниковых систем, проведены серии компьютерных экспериментов и выполнена проверка согласованности теоретических результатов с результатами численного исследования.

Преимущества программного комплекса, разработанного для изучения динамики ТС-модели перевернутого маятника, состоят в следующем.

1. Комплекс программ с учетом универсальной аппроксимации ТС-моделью позволяет исследовать широкий класс моделей управляемых динамических систем не только в окрестности положения равновесия, но и в глобальном смысле.
2. При разработке комплекса программ для изучения динамики моделей управляемых маятниковых систем предложено использовать алгоритм Лоусона решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Указанный алгоритм позволяет эффективно

выполнять вычислительные процедуры и для случая разрывных правых частей.

3. В процессе создания и применения комплекса показана согласованность аналитических и численных результатов на примере моделирования перевернутого маятника, в частности, согласованность результатов об устойчивости.

Отметим, что перспективой дальнейших исследований является синтез и анализ устойчивости ТС-моделей с переменными параметрами, в частности, ТС-моделей параметрических маятников. Для указанных целей потребуется дальнейшая разработка научного программного обеспечения. Ряд перспективных направлений отмечен также в [39, 40].

Рассмотренные подходы демонстрируют эффективность применения методов Ляпунова в сочетании с другими методами для анализа устойчивости управляемых систем с логическими регуляторами, а также эффективность использования полученных на основе этих методов критериев устойчивости и алгоритмов стабилизации.

Благодарности

Авторы выражают благодарность И.Н. Синицыну за внимание к работе, ценные замечания и поддержку исследователей.

Литература

1. Есупов Н.Д., Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Синтез регуляторов систем автоматического управления. Т. 3. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. Васильев С.Н. К интеллектному управлению // Нелинейная теория управления и ее приложения. М.: Физматлит, 2000. С. 57–126.
3. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
4. Меренков Ю.Н. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. М.: Изд-во РУДН, 2000.
5. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: Изд-во URSS, 2015.
6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
7. Синицын И.Н., Синицын В.И. Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2013.
8. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
9. Ярушкина Н.Г. Нечеткие системы: обзор итогов и тенденций развития // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 4. С. 26–38.
10. Chen G., Pham T.T. Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy control systems. Boca Raton: CRC Press, 2001.
11. Driankov D., Hellendorm H., Reich Frank M. An introduction to fuzzy control. Berlin: Springer, 1996.
12. Feng G. Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach. New York: CRC Press, 2010.
13. Lam H.-K., Leung F.H.F. Stability Analysis of Fuzzy-Model-Based Control Systems: Linear-Matrix-Inequality Approach. – Berlin: Springer, 2011.
14. Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St. Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method // Int. J. of Computers, Communications & Control. 2009. V. IV. № 4. P. 415–426.
15. Sugeno M. On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1999. V. 7. № 2. P. 201–224.
16. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics. 1985. V. 15. P. 116–132.
17. Tanaka K., Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1992. V. 45. № 2. P. 135–156.
18. Tanaka K., Wang H.O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.
19. Wang H.O., Tanaka K., Griffin M.F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1996. V. 4. P. 14–23.
20. Шестаков А.А., Масина О.Н., Дружинина О.В. Анализ асимптотической устойчивости и стабилизация некоторых классов систем управления с запаздыванием // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2011. Т.9. №12. С.104–110.
21. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009.
22. Масина О.Н., Дружинина О.В. Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.
23. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектного управления. М.: URSS, 2015.
24. Дружинина О.В., Игонина Е.В., Масина О.Н. Моделирование и стабилизация динамических систем с логическими регуляторами / Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 2015.
25. Дружинина О.В., Масина О.Н. Алгоритмы стабилизации дискретной управляемой системы с синглтон-выходом // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2012. Т. 10. № 12. С. 35–41.
26. Дружинина О.В., Масина О.Н., Игонина Е.В. Разработка алгоритмов стабилизации управляемых систем на основе свойств линейных матричных неравенств // Наукоемкие технологии. 2013. Т. 14. № 6. С. 4–8.
27. Еграшкина Ж.Е., Седова Н.О. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах линейных матричных неравенств // Нелинейный мир. 2015. Т. 13. № 1. С. 3–15.
28. Масина О.Н., Дружинина О.В., Афанасьева В.И. Анализ устойчивости дискретных систем управления на основе функций Ляпунова и свойств линейных матричных неравенств // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2011. Т. 9. № 7. С. 53–62.
29. Петрова С.Н., Дружинина О.В. Синтез и стабилизация нечетких систем управления с помощью параметризованных линейных матричных неравенств // Труды Института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 49(1). С. 57–61.
30. Талагаев Ю.В. Анализ и синтез сверхустойчивых нечетких систем Такаги–Сугено//Проблемы управления. 2016. №6. С.2-11.

31. Седова Н.О., Еграшкина Ж.Е. Об использовании общей функции Ляпунова в исследовании устойчивости систем Такаги–Сугено // Известия Вузов. Математика. 2017. № 5. С. 77–85.
32. Дружинина О.В., Масина О.Н. Анализ устойчивости и стабилизация разрывных систем с помощью обобщенных функций Ляпунова // Нелинейный мир. 2014. Т. 12. № 11. С. 12–22.
33. Дружинина О.В. Индекс, дивергенция и устойчивость в качественной теории динамических систем. М.: Изд-во URSS, 2013.
34. Chen C.-W. A Critical Review of Parallel Disributed Computing and the Lyapunov Criterion for Multiple Time-delay Fuzzy Systems // Intern. J. of the Physical Sci. 2011. V.6. № 19. P.4492–4501.
35. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based Methods for Time-delay Systems // European J. of Control. 2014. V.20. P.271–283.
36. Дружинина О.В., Седова Н.О. Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных матричных неравенств // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 21–35.
37. Lowson D. J. Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipshitz constants // SIAM J. Numer. Anal. 1967. V. 4. № 3. P. 372–380.
38. Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. О некоторых задачах, связанных с существованием и построением неупреждающего управления для нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. – 2000.– Т.1. – С.11–32.
39. Дружинина О.В., Масина О.Н. Современные подходы к исследованию устойчивости динамических систем с логическими регуляторами // Тез. докл. XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Москва, ИПУ РАН, 1–3 июня 2016 г. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 143–145.
40. Дружинина О.В., Масина О. Н., Игонина Е.В. Анализ управляемых динамических систем на основе применения ТС-моделей и модифицированных линейных матричных неравенств // Материалы 19-й международной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN–2016). Москва, 21–25 ноября 2016 г. М.: РУДН, 2016. С. 67–74.

References

1. Yesupov N.D., Pupkov K.A. Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya. Sintez regulyatorov sistem avtomaticheskogo upravleniya. T. 3. M.: MGTU im. N.E. Baumana, 2004.
2. Vasil'yev S.N. K intellektnomu upravleniyu // Nelineynaya teoriya upravleniya i yeye prilozheniya. M.: Fizmatlit, 2000. S. 57-126.
3. Shestakov A.A. Obob¬shchen¬nyy pryamoy metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami. M.: URSS, 2007.
4. Merenkov YU.N. Ustoychivopodobnyye svoystva differentsialnykh vklyucheniy, nechetkikh i stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy. M.: Izd-vo RUDN, 2000.
5. Afanas'yev V.N. Upravleniye nelineynymi neopredelennymi dinamicheskimi ob"yektami. M.: Izd-vo URSS, 2015.
6. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Teoriya stokhasticheskikh sistem. M.: Logos, 2004.
7. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I. Lektsii po normal'noy i ellipsoidal'noy approksimatsii raspredeleniy v stokhasticheskikh sistemakh. M.: TORUS PRESS, 2013.
8. Pegat A. Nechetkoye modelirovaniye i upravleniye. M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2009.
9. Yarushkina N.G. Nechetkiye sistemy: obzor itogov i tendentsiy razvitiya // Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy. 2008. № 4. S. 26-38.
10. Chen G., Pham T.T. Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy control systems. Boca Raton: CRC Press, 2001.
11. Driankov D., Hellendorm H., Reich Frank M. An introduction to fuzzy control. Berlin: Springer, 1996.
12. Feng G. Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach. New York: CRC Press, 2010.
13. Lam H.-K., Leung F.H.F. Stability Analysis of Fuzzy-Model-Based Control Systems: Linear-Matrix-Inequality Approach. – Berlin: Springer, 2011.
14. Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St. Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method // Int. J. of Computers, Communications & Control. 2009. V. IV. № 4. P. 415–426.
15. Sugeno M. On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1999. V. 7. № 2. P. 201–224.
16. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics. 1985. V. 15. P. 116–132.
17. Tanaka K., Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1992. V. 45. № 2. P. 135–156.
18. Tanaka K., Wang H.O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.
19. Wang H.O., Tanaka K., Griffin M.F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1996. V. 4. P. 14–23.
20. Shestakov A.A., Masina O.N., Druzhinina O.V. Analiz asimptoticheskoy ustoy¬chivosti i stabilizatsii nekotorykh klassov sistem upravleniya s zapazdyvaniyem // Informatsionno-izmeritel'nyye i upravlyayushchiye sistemy. 2011. T. 9. № 12. S. 104-110.
21. Druzhinina O.V., Masina O.N. Metody issledovaniya ustoychivosti i upravlyayemosti nechetkikh i stokhasticheskikh dinamicheskikh sistem. M.: VTS RAN, 2009.
22. Masina O.N., Druzhinina O.V. Modelirovaniye i analiz ustoychivosti nekotorykh klassov sistem upravleniya. M .: VTS RAN, 2011.
23. Druzhinina O.V., Masina O.N. Metody analiza ustoychivosti dinamicheskikh sistem intellektnogo upravleniya. M .: URSS, 2015.
24. Druzhinina O.V., Igonina Ye.V., Masina O.N. Modelirovaniye i stabilizatsiya dinamicheskikh sistem s logicheskimi regulyatorami / soobshcheniyami po prikladnoy matematike. M .: VTS RAN, 2015.
25. Druzhinina O.V., Masina O.N. Algoritmy stabilizatsii diskretnoy upravlyayemoy sistemy s singlton-vykhodom // Informatsionno-izmeritel'nyye i upravlyayushchiye sistemy. 2012. T. 10. № 12. S. 35-41.
26. Druzhinina O.V., Masina O.N., Igonina Ye.V. Razrabotka algoritmov stabilizatsii upravlyayemykh sistem na osnove svoystv lineynykh matrichnykh neravenstv // Naukoyemkiye tekhnologii. 2013. T. 14. № 6. S. 4-8.
27. Yegrashkina ZH.Ye., Sedova N.O. Ustoychivost' i stabilizatsiya neli¬neynykh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy v terminakh lineynykh matrichnykh neravenstv // Nelineynyy mir. 2015. T. 13. № 1. S. 3-15.
28. Masina O.N., Druzhinina O.V., Afanas'yeva V.I. Analiz ustoychivosti diskretnykh sistem upravleniya na osnove funktsiy Lyapunova i svoystva lineynykh matrichnykh neravenstv // Informatsionno-izmeritel'nyye i upravlyayushchiye sistemy. 2011. T. 9. №7. S.53-62.
29. Petrova S.N., Druzhinina O.V. Sintez i stabilizatsiya nechetkikh sistem upravleniya s ispol'zovaniyem parametrizovannykh lineynykh matrichnykh neravenstv // Trudy Instituta sistem¬nogo analiza RAN. Dinamika neodno¬rodnykh sistem. 2010. T. 49 (1). S. 57-61.
30. Talagayev YU.V. Analiz i sintez sverkhstoychivykh nechetkikh sistem Takagi-Sugeno // Problemy upravleniya. 2016. № 6. S. 2-11.
31. Sedova N.O., Yegrashkina ZH.Ye. Ob ispol'zovanii obshchey funktsii Lyapunova v uchebnosti sistem Takagi-Sugeno // Izvestiya Vuzov. Matematika. 2017. № 5. S. 77-85.
32. Druzhinina O.V., Masina O.N. Analiz ustoychivosti i stabilizatsii razryvnykh sistem s ispol'zovaniyem obobshchennykh funktsiy

Lyapunova // Nelineynyy mir. 2014. T. 12. № 11. S. 12-22.
33. Druzhinina O.V. Indeks, divergentsiya i ustoychivost' v kachestvennoy teorii dinamicheskikh sistem. M .: Izd-vo URSS, 2013.
34. Chen K.-W. Kriticheskiy obzor parallel'nykh diskretnykh vychisleniy i kriteriy Lyapunova dlya mnozhestvennykh nechetkikh sistem s vremennoy zaderzhkoy // Inter. J. of Physical Sci. V.6. № 19. P.4492-4501.
35. Fridman Ye. Uchebnik po metodam Lyapunova dlya sistem s zaderzhkoy vremeni // European J. of Control. 2014. V.20. P.271-283.
36. Druzhinina O.V., Sedova N.O. Analiz ustoychivosti i stabilizatsii nelineynykh kaskadnykh sistem s zapazdyvaniyem v terminakh lineynykh matrichnykh neravenstv // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. 2017. № 1. S. 21-35.
37. Louson D. Dzh. Obobshchennyye protsessy Runge-Kutta dlya ustoychivykh sistem s bol'shimi lipshitsevymi konstantami // SIAM J. Numer. Anal'nyy. 1967. V. 4. № 3. S. 372-380.
38. Nikolayev S.F., Tonkov Ye.L. O nekotorykh zadachakh, svyazannykh s sushchestvovaniyem i postroyeniyem neuprezhdayushchego upravleniya dlya nestatsionarnykh upravlyayemykh sistem // Vestnik Udmurtskogo universiteta. - 2000.- T.1. - S.11-32.
39. Druzhinina O.V., Masina O.N. Sovremennyye podkhody k issledovaniyu ustoychivosti dinamicheskikh sistem s logicheskimi regulyatorami // Tez. dokl. XIII Mezhdunarodnaya konferentsiya «Ustoychivost' i kolebaniya nelineynykh sistem upravleniya» (konferentsiya Pyatnitskogo). Moskva, IPU RAN, 1-3 iyunya 2016 g. M.: IPU RAN, 2016. S. 143-145.
40. Druzhinina O.V., Masina O. N., Igonina Ye.V. Analiz upravlyayemykh dinamicheskikh sistem na osnove ispol'zovaniya TS-modeley i modifitsirovannykh lineynykh matrichnykh materialov // Materialy 19-y mezhdunarodnoy konferentsii «Raspredelennyye komp'yuternyye i telekommunikatsionnyye seti: upravleniye, vychisleniye, svyaz'» (DCCN-2016). Moskva, 21-25 noyabrya 2016 g. M.: RUDN, 2016. S. 67-74.

Поступила: 5.06.2017

Об авторах:

Дружинина Ольга Валентиновна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, ovdruzh@mail.ru;

Масина Ольга Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,olga121@inbox.ru.

Note on the authors:

Druzhinina Olga V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, ovdruzh@mail.ru;

Masina Olga N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Mathematical Modeling and Computer Technologies, Bunin Yelets State University, olga121@inbox.ru.