

УДК 681.5

Карманов Д.Д., Лепихин Т.А., Жабко Н.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ**Аннотация**

В статье представлен подход к решению некоторых задач баллистики. Основным объектом является пусковая установка в целом с возможностью установки угла поворота, угла подъема и начальной скорости. Предложена общая математическая модель полета объекта, на котором был протестирован этот подход. Метод оврагов модифицирован для возможности приближенного поиска множества экстремумов.

Ключевые слова

Внешняя баллистика, моделирование полета снаряда, компьютерное моделирование.

Karmanov D.D., Lepikhin T.A., Zhabko N.A.

Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

ON SOME PROBLEMS OF EXTERNAL BALLISTICS**Abstract**

The article presents an approach to solving some ballistics problems. The main object is a launcher in general with the possibility of setting the rotation angle, the ascent angle and the initial velocity. A general mathematical model of the object's flight, on which this approach was tested, is proposed. The method of ravines is modified to give the possibility of approximate search of the extrema set.

Keywords

External Ballistics, Projectile motion, Computer modeling.

Введение

С развитием вычислительной техники многие операции, ранее выполняемые человеком, стали осуществляться много быстрее. В частности, применение автоматических и автоматизированных средств актуально в областях, где использование человеческого труда связано с определенными рисками в отношении здоровья оператора. Одними из таких областей, несомненно, являются военные технологии, к которым, наверное, в первую очередь, и относятся задачи внешней баллистики, т.е. перевод объекта (снаряда) из некоторого заданного начального положения в желаемое конечное или некоторую окрестность этого положения. В данной статье предлагается подход к автоматизированному решению базовой задачи баллистики, т.е. решение задачи перевода снаряда из начальной точки в конечную точку в максимально универсальном обобщении для всевозможных видов установок, осуществляющих баллистическое движение.

Анализ литературы показал, что отдельные математические аспекты внешней баллистики описаны в достаточно большом количестве учебников, в том числе отечественных. В основном

это учебники по внешней баллистике. Однако, тем не менее, несмотря на встречающиеся описания теоретических аспектов рассматриваемых задач, их практические аспекты в виде задачи автоматического управления системой прицеливания либо не решаются, либо, что вероятнее, решаются, но в открытом доступе найти их сложно из-за определенной степени секретности.

Основная часть

В работах [1], [2] по решению задач внешней баллистики часто используют математические модели, представленные следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= G \sin \theta - X \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= -G \cos \theta \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \end{aligned} \quad \begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\rho C_x V}{2m} u \\ \dot{v} &= -\frac{\rho C_x V}{2m} v - g \\ \dot{y} &= v \\ \dot{x} &= u \end{aligned}$$

Такие подходы не учитывают ряд особенностей исследуемой задачи и не позволяют сделать решаемую задачу универсальной. Поскольку одной

из основных задач настоящего исследования и была универсификация математической модели с целью расширения возможных применений, то применимость выше указанных моделей не позволяет решить поставленные задачи и использоваться они не будут. Поэтому в работе предлагается собственный вариант математического описания функционирования установки запуска снаряда.

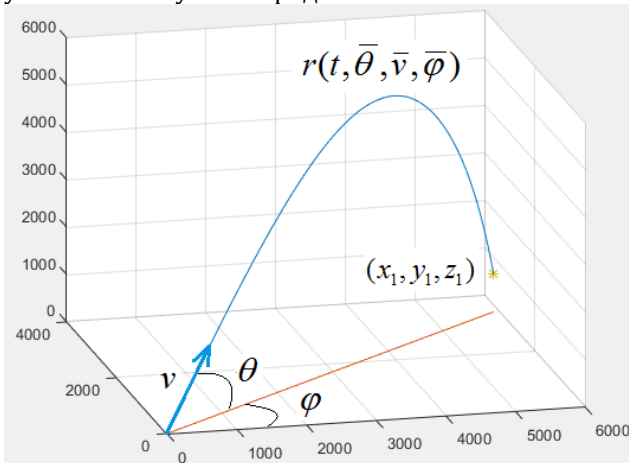


Рис. 1. Общая схема решаемой задачи. Здесь v - начальная скорость, ϕ - угол поворота, θ - угол подъема, $r(t, \bar{\theta}, \bar{v}, \bar{\phi})$ - траектория полета снаряда при заданных начальных условиях

Очевидно, что $r(t, \bar{\theta}, \bar{v}, \bar{\phi})$ представляет собой трехмерный вектор, являющийся решением задачи перевода объекта в целевое положение с координатами (x_1, y_1, z_1) .

С одной стороны, универсальность математического описания предполагает вариации параметров, с другой же стороны, такая вариация порождает множество дополнительных зависимостей. В частности, геометрическая форма снаряда порождает уравнение сопротивления среды, в нашем случае воздуха. Ввиду сложности решения в целом, введем некоторые упрощения. В частности, пренебрежем формой снаряда на данном этапе исследования. В дальнейшем планируется провести исследование с учетом различных геометрических форм снарядов и влияния этих форм на движение.

В работе рассматривается снаряд в общем виде, кроме того, пренебрегается вращением снаряда. Тем не менее, учитывается сопротивление воздуха. В качестве начального приближения считаем, что на снаряд действует сила тяжести $\vec{F}_{тяж}$ и сила сопротивления среды $\vec{F}_{сопр}$, что приводит к представлению второго закона Ньютона в следующем виде:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{сопр}}{m},$$

где m - масса снаряда, \vec{a} - ускорение свободного падения.

Сила притяжения направлена вниз в любой точке траектории. Сила сопротивления воздуха направлена в противоположную сторону от касательной к траектории в точке.

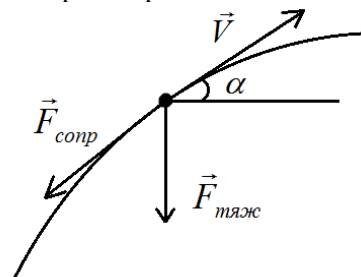


Рис. 2 Силы, действующие на снаряд

Тогда уравнения движения объекта в плоскости можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-F_{сопр}}{m} \cos \alpha \\ \ddot{y} &= -g - \frac{F_{сопр}}{m} \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

Для трехмерного случая соответственно получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-F_{сопр}}{m} \cos \alpha \cos \phi \\ \ddot{y} &= \frac{-F_{сопр}}{m} \cos \alpha \sin \phi \\ \ddot{z} &= -g - \frac{F_{сопр}}{m} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Множители $\cos \phi$ и $\sin \phi$ появляются вследствие того, что плоскость полета снаряда повернута на угол ϕ относительно оси абсцисс, как показано на рис. 1. Сила сопротивления среды может выражаться различными уравнениями в зависимости от вида среды и ее свойств. Чаще всего эту зависимость разделяют на два слагаемых: пропорциональное линейной скорости и пропорциональное квадрату скорости.

$$F_{сопр} = k_{lin} V + k_{sq} V^2,$$

где коэффициенты k_{lin} и k_{sq} можно определять из их физического смысла, но их точные значения очень сложны для вычисления и различны для каждого типа снарядов, поэтому примем их значения, согласно их физическому смыслу в виде некоторой оценки, которую необходимо заново вычислять для каждого типа снарядов.

Примем $k_{lin} = 6 r \mu$, где r - радиус поперечного сечения снаряда, μ - динамическая вязкость воздуха. Так как на больших скоростях линейная составляющая силы сопротивления воздуха пренебрежимо мала по сравнению с ее квадратом, то линейной составляющей можно пренебречь,

однако ничего не мешает включить ее обратно, если появится такая необходимость.

$$k_{sq} = \frac{C(M)S\rho}{2}, \quad (3)$$

где $C(M)$ – безразмерный коэффициент сопротивления среды при определенной форме снаряда, зависящий от числа Маха, S – площадь эффективного сопротивления, ρ – плотность воздуха, зависит от высоты. Для некоторых стандартных идеальных форм он известен. Тогда как для сложной формы снаряда указанный коэффициент устанавливается экспериментально с помощью аэродинамических труб. На дотранзвуковых скоростях ($M < 0.8$) этот коэффициент можно считать постоянным $C(M) = C$. На скоростях, сравнимых со скоростью звука, коэффициент резко увеличивается и плавно снижается с увеличением скорости до значения сверхзвуковых скоростей. Поскольку определение точного значения указанного коэффициента представляет некоторый достаточно трудоемкий процесс, то в рамках настоящего исследования примем его постоянным. В работе [5] представлен закон 1943 в сокращенном виде, в котором вычислена эта зависимость, но для конкретных, уже устаревших снарядов, поэтому использовать ее большого смысла не имеет.

Площадь эффективного сопротивления

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

определяется по следующей формуле: , что по сути определяет площадь перпендикулярного вектору скорости сечения снаряда, где d – калибр снаряда.

Часто коэффициент сопротивления и площадь сопротивления объединяют со скоростью и рассчитывают их значения для конкретного типа снарядов. Так, в [3] представлена функция Сиаччи $F(V)$, которая достаточно хорошо аппроксимирует поведение коэффициента k_{sq} в зависимости от скорости.

Исходя из информации о расчете плотности воздуха, в работе [4] на высоте до 9300 метров ее можно вычислять по формуле:

$$\rho(h) = \rho_0 (1 - 0.0219 \cdot 10^{-3} h)^{4.4}$$

В рамках текущего исследования значение высоты не превышает указанного значения, поэтому для простоты вычислений примем плотность постоянной величиной.

Наконец, подставляя в (2) выражение для $F_{сопр}$ получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-k_x V^2}{m} \cos \alpha \cos \phi \\ \ddot{y} &= \frac{-k_y V^2}{m} \cos \alpha \sin \phi \\ \ddot{z} &= -g - \frac{k_z V^2}{m} \sin \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом того, что $\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{V \cos \phi}$, $\cos \alpha = \frac{\dot{y}}{V \sin \phi}$ и $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ в итоге получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-k_x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{m} \dot{x} \\ \ddot{y} &= \frac{-k_y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{m} \dot{y} \\ \ddot{z} &= -g - \frac{k_z \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{m} \dot{z} \end{aligned} \quad (5)$$

С начальными условиями: $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ и $\dot{x}(0) = \bar{V} \cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi}, \dot{y}(0) = \bar{V} \cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi}, \dot{z}(0) = \bar{V} \sin \bar{\theta}$

Введем дополнительные ограничения в виде:

$$(\theta, V, \phi) \in \Omega_3 = \left\{ \theta, V, \phi \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, V_{\min} \leq V \leq V_{\max}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$x_0, y_0, z_0 \geq 0, \quad (6)$$

хотя эти ограничения в общем случае могут быть сняты.

Можно заметить, что (1) с учетом введенных ограничений и упрощений представляет собой плоскую задачу. Следовательно, для упрощения вычислений и визуализации результатов будем рассматривать двумерную задачу.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k_1}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \\ \ddot{y} &= -\frac{k_2}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} \end{aligned}, \quad (7)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & \dot{x}(0) &= \bar{V} \cos \bar{\theta} \\ y(0) &= y_0 & \dot{y}(0) &= \bar{V} \sin \bar{\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично с трехмерным случаем в работе для удобства будем рассматривать

$$(\theta, V) \in \Omega_2 = \left\{ \theta, V \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, V_{\min} \leq V \leq V_{\max} \right\},$$

$$x_0, y_0 \geq 0$$

Третью координату можно получить следующим образом:

Пусть $r(t, \bar{\theta}, \bar{V}) = (x(t, \bar{\theta}, \bar{V}); y(t, \bar{\theta}, \bar{V}))$ траектория снаряда в двумерной задаче, тогда $r(t, \bar{\theta}, \bar{V}, \bar{\phi}) = (x(t, \bar{\theta}, \bar{V}) \cdot \cos \phi, y(t, \bar{\theta}, \bar{V}) \cdot \sin \phi, z(t, \bar{\theta}, \bar{V}))^T$ – траектория снаряда в трехмерной задаче.

Программная реализация задачи перевода снаряда

Полученная модель имеет достаточно сложную структуру, поэтому аналитического решения не имеет. Ввиду сказанного, остается возможным решить исследуемую задачу только с помощью численных методов. Для программной реализации и построения графиков переходных процессов была выбрана среда моделирования MATLAB с подсистемой имитационного моделирования Simulink.

Приведем решение задачи попадания в заданную точку.

Задача формулируется следующим образом: для математической модели (7) необходимо найти такую пару $(\bar{\theta}, \bar{V})$, что будет достигнут минимум функции

$$f(r(t^*, \theta, V), r_1) = \|r(t^*, \theta, V) - r_1\| \rightarrow \min_{\theta, V \in \Omega_2}, \quad (9)$$

где $r(t^*, \theta, V) = (x(t^*, \theta, V), y(t^*, \theta, V))$ – решение системы (7) с начальными условиями (8), $r_1 = (x_1, y_1)$ – вектор координат цели, t^* – момент потенциального попадания.

Если выполняется условие

$$\min_{\theta, V} \|r(t^*, \theta, V) - r_1\| < \varepsilon_1,$$

где ε_1 задается из соображений о структуре цели или желаемой точности, то будем считать, что произошло попадание. О способах же вычисления значения t^* речь пойдет далее.

В данной работе представлено два самых применимых способа нахождения значения t^* .

Первый способ заключается в поиске t^* как минимальное отклонение для всех точек траектории, следовательно, можно представить в виде:

$$t^* = \operatorname{argmin}_t (\|r(t, \bar{\theta}, \bar{\phi}) - r_1\|) \quad (10)$$

Основным недостатком указанного метода является необходимость решать задачу минимизации по всем точкам траектории, которых в дискретной реализации конечное количество, но все же для больших значений длительности полета алгоритм начинает работать существенно медленнее. Кроме того, существует проблема дискретности траектории, из-за которой найденное \bar{t}^* будет отличаться от истинного t^* на величину $\bar{\varepsilon}(d)$, где d – шаг дискретизации, $\varepsilon(d) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow 0$ и $\bar{t}^* \rightarrow t^*$ при $d \rightarrow 0$.

Ввиду упомянутого получается, что такой подход требует существенных вычислительных мощностей или увеличивает время работы программы.

Тем не менее, вид функции $f(r(t^*, \theta, V), r_1)$ для перевода снаряда в положение $r_1 = (3000 \ 550)$ приведен на рис. 3 ниже.

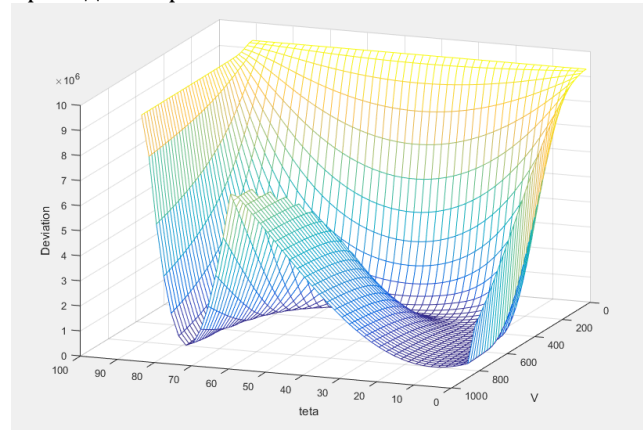


Рис. 3. Вид функции $f(r(t^*, \theta, V), r_1)$ для первого способа. Перевод снаряда в точку $r_1 = (3000 \ 550)$

Второй вариант поиска t^* тоже не идеален, но недостатков у него меньше. В нем устанавливается $t^* = \bar{t}$, как только выполнено условие:

$$x(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V}) > x_1 \vee y(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V}) < 0 \quad (11)$$

Этот способ в качестве решения получает кривую, по которой происходит разрыв производной функции $f(r(t^*, \theta, V), r_1)$. Такой недостаток свойственен, вероятно, всем способам, основанным на условиях подобного вида. Разрыв происходит на границе истинности условий (11).

Для приведенного способа, в том числе, доступно обобщение нижнего предела до аналога рельефа с целью расширения возможности стрельбы при $y_1 < 0$. Тогда предыдущее условие переписывается в виде:

$$x(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V}) > x_1 \vee y(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V}) < z(x(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V})), \quad (12)$$

где $z(x)$ – карта высот.

В трехмерной задаче в условии будет фигурировать $z(x(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V}), y(\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{V}))$.

Представление функции $f(r(t^*, \theta, V), r_1)$ с найденным t^* по второму способу приведено на рис. 4.

Задача (9) будет решаться модифицированным методом Ньютона с помощью разделенных разностей, основа этого метода описана в [6].

Условия остановки:

$$\begin{aligned} |\theta_{k+1} - \theta_k| &< \varepsilon_\theta \\ |V_{k+1} - V_k| &< \varepsilon_V, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_\theta, \varepsilon_V$ – желаемая точность для угла подъема и скорости соответственно.

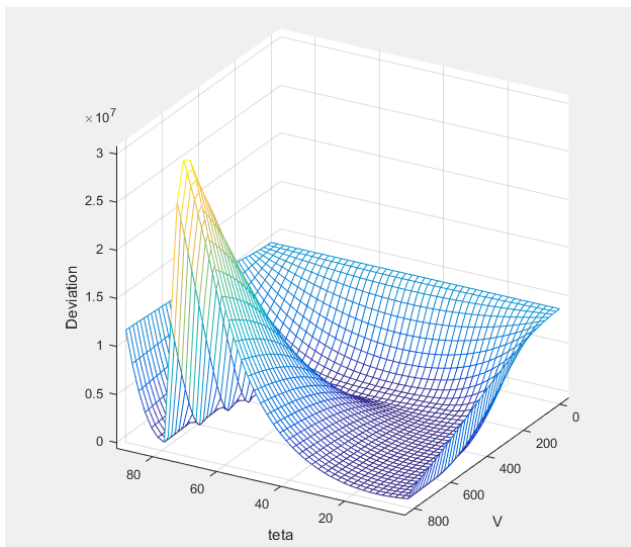


Рис. 4. Вид функции $f(r(t^*, \theta, V), r_1)$ для второго способа. Кривая разрыва производной, при таком выборе

точки r_1 , находится в окрестностях множества экстремумов, вследствие чего, незаметна. Конечная точка $r_1 = (3000 \ 550)$

Для функции такого вида метод Ньютона показывает достаточно неплохие результаты из-за локальной близости к квадратичному виду.

Траектория полета снаряда для заданных начальных и конечных условий приведена ниже на рис. 6.

Заключение

В данной работе разработан подход к решению некоторых задач внешней баллистики для артиллерийской установки общего типа с заданием начальных углов и начальной скорости. Разработана программная реализация в среде MATLAB-Simulink для приведенной математической модели с возможностью изменения некоторых входных параметров. Решение задачи перевода снаряда в заданное положение (попадание) является одной из важнейших задач применения подобных установок, поэтому используя результаты

настоящего исследования, появляется возможность к решению многочисленных задач внешней баллистики.

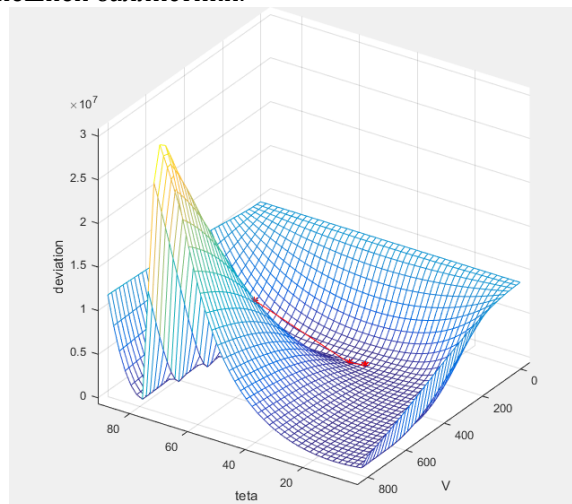


Рис. 5. Сходимость к точке минимума по методу Ньютона. Стрельба ведется по точке $r_1 = (3000 \ 550)$

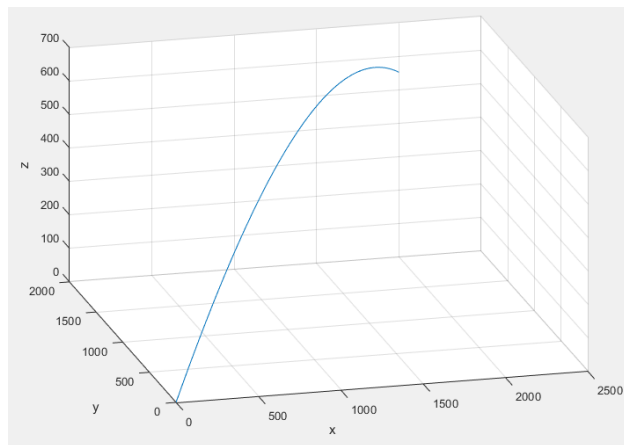


Рис. 6. Из точки $r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ в точку $r_1 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 550 \end{pmatrix}$.

Информация о финансовой поддержке
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ проект № 17-07-00361 А.

Литература

1. Беликова А.В., Павлов Г.Л. Моделирование движения неуправляемого ракетного снаряда. Молодежный научно-технический вестник, Москва, 2016.
2. Шанин В.М., Шанин А.П. Баллистика неуправляемых летательных аппаратов. Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск, 1999.
3. Ефремов А. К. Аппроксимация закона сопротивления воздуха 1943 г. Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование», #10, октябрь 2013.
4. Venttsel' D.A., Okunev V.N., Shapiro Ya.M. Vneshnyaya ballistika. Ch. 1 [External ballistics. Part 1]. Leningrad, Dzerzhinsky Artillery Academy Publ., 1933.
5. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика: учеб. для вузов. 4-е изд. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
6. Арушанян И. О. Практикум на ЭВМ. Безусловная минимизация функций многих переменных. Третье издание, дополненное. Москва, 2012.

References

1. Belikova A.V., Pavlov G.L. Modelirovanie dvizheniya neupravlyаемого raketnogo snariada. Molodezhny nauchno-technicheskiy vestnik, Moscow, 2016.

2. Shanin V.M., Shanin A.P. Ballistika nepravliaemyh letatelnyh apparatov. Izdatelstvo RFAC-VNIITF, Snezhinsk, 1999.
3. Efremov A.K. Approximatiya zakona soprotivleniya vozduha 1943 goda. Nauchnoe izdanie MGTU imeni N.E.Baumana "Nauka i obrazovanie", #10, october 2013.
4. Venttsel' D.A., Okunev B.N., Shapiro Ya.M. Vneshnyaya ballistika. Ch. 1 [External ballistics. Part 1]. Leningrad, Dzerzhinsky Artillery Academy Publ., 1933.
5. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. Vneshnaia Ballistika: uchebnoe posobie dlya vuzov. 4-e izdanie. Moscow, Mashinostroenie, 2005. 608 pp.
6. Arushanyan I.O. Praktikum na EVM. Bezuslovnaya minimizatsiya funktsiy mnogih peremennyh. Tret'e izdanie, dopolnennoe., Moscow, 2012.

Поступила: 10.07.2017

Об авторах:

Карманов Дмитрий Дмитриевич, студент, Санкт-Петербургский государственный университет, web-shaman@mail.ru;

Лепихин Тимур Андреевич, кандидат физико-математических наук, главный специалист Главного управления по работе с персоналом, Санкт-Петербургский государственный университет, LepikhinTA@gmail.com;

Жабко Наталия Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета Прикладной математики — процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, ztasha@mail.ru.

Note on the authors:

Karmanov Dmitry D., student, Saint-Petersburg State University, web-shaman@mail.ru;

Lepikhin Timur A., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief specialist, Directorate on Humans Resources, Saint-Petersburg State University, LepikhinTA@gmail.com;

Zhabko Natalia A., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Technologies and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, ztasha@mail.ru.