УДК 004.032.26+519.63 DOI 10.25559/SITITO.2017.3.440

Картавченко А.Е., Тархов Д.А.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

Сравниваются методы построения многослойных приближённых решений дифференциальных уравнений, основанные на классических приближённых методах на примере экспоненты и косинуса. В отличие от классических численных методов данный подход позволяет получить не поточечные приближения, а приближённые решения в виде функций. Рассмотрены приближения, основанные на явном и неявном методах Эйлера, одношаговом методе Адамса, методе Рунге-Кутта второго порядка и методе Штёрмера. Проведено сравнение точности формулы, получающейся применением метода Адамса для экспоненты и метода Штёрмера для косинуса с частичной суммой ряда Маклорена. Сравнение проведено при одинаковом числе выполненных операций сложения/вычитания и умножения/деления и одинаковой степени разложения. Вычислительные эксперименты показали преимущество предложенных формул. Предложенные методы протестированы на задаче поиска периода решения дифференциального уравнения.

Ключевые слова

Приближенные решения; дифференциальные уравнения; степенные приближения.

Kartavchenko A.E., Tarkhov D.A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

COMPARISON OF METHODS OF CONSTRUCTION OF APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS CONSIDERING ON THE EXAMPLE OF ELEMENTARY FUNCTIONS

Abstract

Compares methods of constructing multilayer approximate solutions of differential equations based on classical approximate methods on the example of the exponent and cosine. In contrast to classical numerical methods, this approach allows to obtain not point wise approximation, and approximate solutions as functions. Considered approach, based on explicit and implicit Euler methods, one-step Adams method, Runge-Kutta second-order method, and Stermer method. A comparison of the accuracy of the formula obtained using the method of Adams for exhibitors and Stermer method for the cosine partial sum of the McLaren series. The comparison carried out with the same number of completed operations of addition/subtraction and multiplication/division and the same degree of decomposition. Computational experiments showed the advantage of the proposed formulas. The proposed methods are tested on the search task period of the solution of a differential equation.

Keywords

Approximate solutions; differential equations; power approximation.

Введение

Для приближённого интегрирования дифференциальных уравнений разработано достаточно много алгоритмов. Во-первых, это разного рода численные методы – Эйлера, Рунге-Кутты и т.д., позволяющие получать приближённое решение в некотором дискретном наборе точек. Во-вторых, это разного рода аналитические методы – разложение в ряд, асимптотические разложения и т.д. От поточечного решения, полученного с помощью численных методов можно перейти к функции с помощью интерполяции. В работах [1-4] был предложен новый метод, сочетающий достоинства численных и аналитических методов. Суть метода состоит в применении известных рекуррентных формул численных методов к интервалу с переменным верхним пределом. В результате получаются аналитические выражения для приближённых решений, содержащие параметры задачи, начальные условия и т.д. Возникает вопрос о том, имеют ли такие приближённые решения преимущества над другими приближёнными решениями. В статье продемонстрированы такие преимущества для простейших дифференциальных уравнений, имеющих известные приближённые решения в виде быстро сходящихся степенных рядов.

Цель работы

В данной работе продолжается исследование многослойных методов построения приближённых решений дифференциальных уравнений, начатое в [1-4]. В связи с тем, что в настоящий момент данными методами решён очень ограниченный набор задач, интересно проверить их работу на простых задачах, имеющих известные аналитические решения. Такая проверка позволяет узнать их точную погрешность, а не оценку сверху, следующую из общих теорем сходимости соответствующих численных методов.

Методы

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

на промежутке $[x_0, x_0 + a]$. Для её решения разработана широкая палитра численных методов. Значительная часть из них заключается в делении данного промежутка точками x_k на интервалы длины $h_k, k = 1, \ldots, n$ и применении рекуррентной формулы:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}). \qquad (1)$$

Здесь оператор F определяет конкретный метод.

Применяем формулу (1) к интервалу с переменным верхним пределом $[x_0, x] \subset [x_0, x_0 + a]$ (при этом $h_k = h_k(x)$, $\mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(x)$). В результате получаем функцию $\mathbf{y}_n(x)$, которую можно считать приближённым решением уравнения (1). Для равномерной оценки точности такой формулы применимы обычные оценки точности соответствующего численного метода.

В качестве численных методов выберем [5]:

- явный метод Эйлера

$$F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = h_k \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k)$$

- неявный метод Эйлера

$$F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = h_k \mathbf{f}(x_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$$

- одношаговый метод Адамса

$$F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = 0.5 h_k (\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) + \mathbf{f}(x_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}))$$

метод Рунге-Кутты 2 порядка

$$F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = y_{i-1}(x) + h_k \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k + 0.5 h_k \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k))$$

для уравнения второго порядка вида $\mathbf{y}''(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ – метод Штёрмера

$$\mathbf{y}_{k+1} = 2\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1} + h^2 \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k)$$

С помощью этих методов получим разложения e^x и $\cos(x)$.

Результаты вычислительных экспериментов

1 Экспонента

Рассмотрим решение задачи Коши для модельного дифференциального уравнения $y' = y$ на промежутке $[0; l]$, где $l \in [0.25, 1]$ с помощью применения известных численных методов к промежутку с переменным верхним пределом $[0; x]$. Далее приведены результаты вычислительных экспериментов для $y(0) = 1$,. Разбиение интервала считаем равномерным, т.е. $h_k = x / n$.

Далее будет исследована зависимость погрешности каждого метода от числа разбиений обобщённого промежутка.

Достаточно легко написать формулы, описывающие решение при любом n:

- явный метод Эйлера $y_n(x) = n^{-n} (x + n)^n$
- неявный метод Эйлера

$$y_n(x) = (-1)^n (x - n)^{-n} n^n;$$

- одношаговый метод Адамса

$$y_n(x) = (-1)^n (x - 2n)^{-n} (x + 2n)^n;$$

- метод Рунге-Кутты 2 порядка

$$y_n(x) = 2^{-n} (n^2)^{-n} (2n^2 + 2nx + x^2)^n.$$

Легко видеть, что все функциональные последовательности равномерно сходятся к e^x. Таким образом, мы можем получать решение модельного дифференциального уравнения со сколь угодно большой точностью, увеличивая число разбиений n.

Рассмотрим графики погрешностей для n = 3 (Рис. 1).

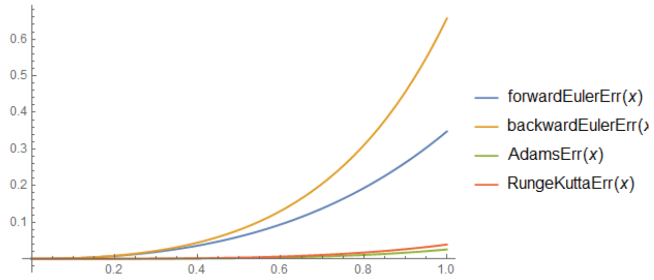

Рис. 1. Графики погрешностей приближённых решений, построенных по явному и неявному методу Эйлера, одношаговому методу Адамса и методу Рунге-Кутты второго порядка при n=3

Видно, что для данной задачи наибольшую точность имеет метод Адамса, несколько большую метод Рунге-Кутта, существенно большую явный метод Эйлера и самую большую – неявный метод Эйлера. Данная тенденция сохраняется при увеличении длины промежутка и при увеличении числа *n*.

Анализ погрешности

Погрешность будем оценивать по значению на правом конце промежутка. Проанализируем погрешность для приближённых решений, полученных для n=10 и n=100. За err1 – обозначим модуль разности между значением точного решения в точке на правом конце промежутка и значением приближённого решения в точке на правом конце промежутка при n=10, за err2 соответственно обозначим модуль той же разности при n=100.

Таблица 1. Погрешность работы методов для дифференциального уравнения $y' = y$

Метод	l = 0.25		l = 0.5		l = 1	
	err1	err2	err1	err2	err1	err2
явный метод Эйлера	0.0039	0.0004	0.01	0.002	0.1	0.01
неявный метод Эйлера	0.004	0.0004	0.02	0.002	0.1	0.01
метод Адамса	0.00001	1×10^{-7}	0.0001	1×10^{-6}	0.002	2×10^{-5}
метод Рунге-Кутты	0.00003	3×10^{-7}	0.0003	3×10^{-6}	0.004	4×10^{-5}

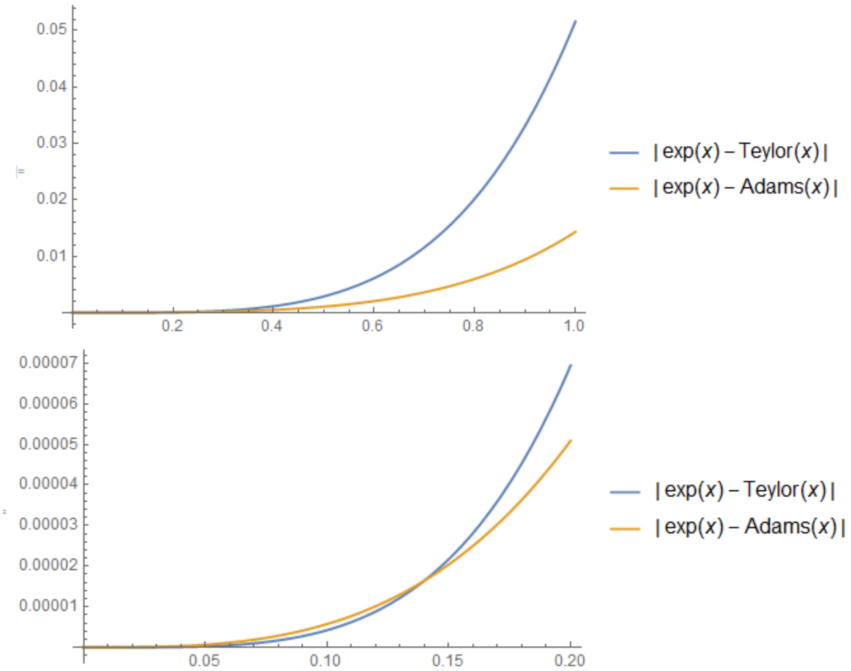

Рис. 2. Графики погрешностей приближённых решений, возникающие при стандартном разложении Тейлора при $n = 3$*, и в методе Адамса при* $n = 4$

Данные в таблице подтверждают известные общие положения – методы Адамса и Рунге-Кутта существенно точнее явного и неявного метода Эйлера.

Сравнение с рядом Маклорена при одинаковом числе операций

Произведём сравнение точности формулы, получающейся применением метода Адамса с частичной суммой ряда Маклорена. Сравнение проведено при одинаковом числе выполненных операций сложения/вычитания и умножения/деления.

Для получения разложения до степени n :

$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+..+\frac{x^n}{n!}$ н еобходимо: n операций сложения/вычитания, $2n-2$ операций умножения/деления. Итого: $3n-2$ операций.

Для расчёта по общей формуле метода Адамса: $(-1)^n(x-2n)^{-n}(x+2n)^n = (\frac{-2n-x}{-2n+x})^n$ необходимо: 2 операции сложения/вычитания, $n+1$ операций умножения/деления. Итого: $n+3$ операций.

В качестве примера рассмотрим ошибку, возникающую при применении указанных формул, если выполняется 7 операций, которые будут необходимы при стандартном разложении Тейлора при $n=3$, и в методе Адамса при $n=4$ (Рис. 2).

Рассмотрим ошибку, возникающую при применении указанных формул, если выполняется 10 операций, которые будут необходимы при стандартном разложении Тейлора при $n=4$, так и в методе Адамса при $n=7$.

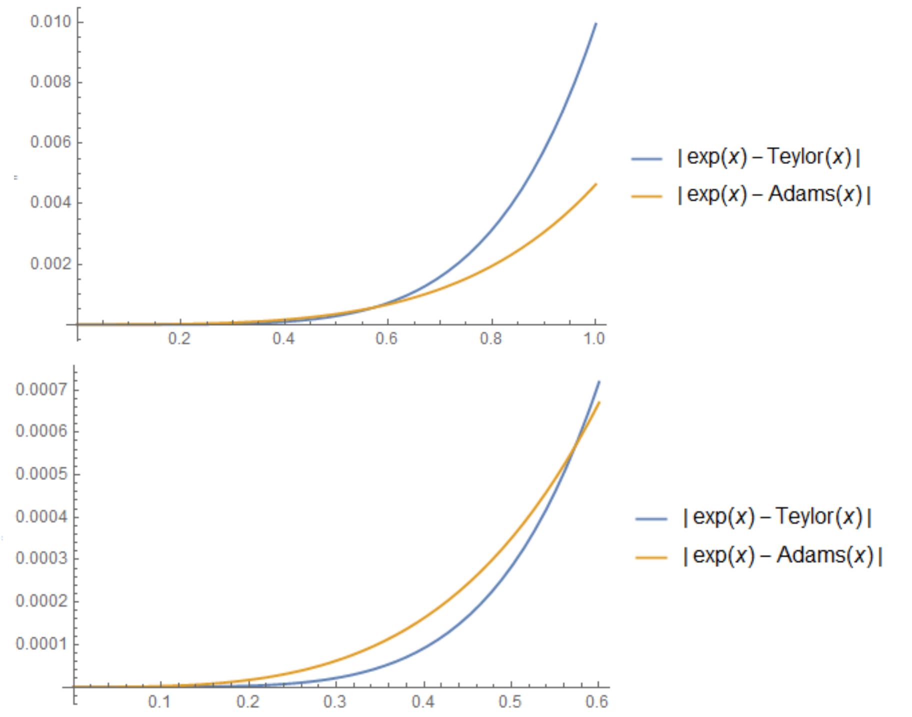

Рис. 3. Графики погрешностей приближённых решений, возникающие при стандартном разложении Тейлора при n = 4 и в методе Адамса при n = 7

При увеличении числа операций метод Адамса становится точнее стандартного разложения в ряд при достаточно большем удалении от 0 по оси X.

Результаты вычислительных экспериментов 2. Косинус

Рассмотрим решение задачи Коши для модельного дифференциального уравнения $y''+y=0$ на промежутке $[0;l]$, где $l\in[0.5,3]$ с помощью применения известных численных методов к промежутку с переменным верхним пределом $[0;x]$. Далее приведены результаты вычислительных экспериментов для $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Разбиение интервала считаем равномерным, т.е. $h_k=x/n$.

Для применения четырёх методов, описанных в первой части, рассматриваемое уравнение второго порядка преобразовано в систему уравнений первого порядка. Также для решения данного модельного уравнения будет применён специализированный метод решения уравнений второго порядка – метод Штёрмера.

Далее будет исследована зависимость погрешности каждого метода от числа разбиений обобщённого промежутка.

В отличие от решения модельного уравнения в первом случае для экспоненты найти формулы, описывающие решение при любом n не удалось, однако при увеличении числа разбиений n погрешность уменьшается, что свидетельствует, что получаемое решение сходится к точному решению.

Рассмотрим график погрешностей при n = 4.

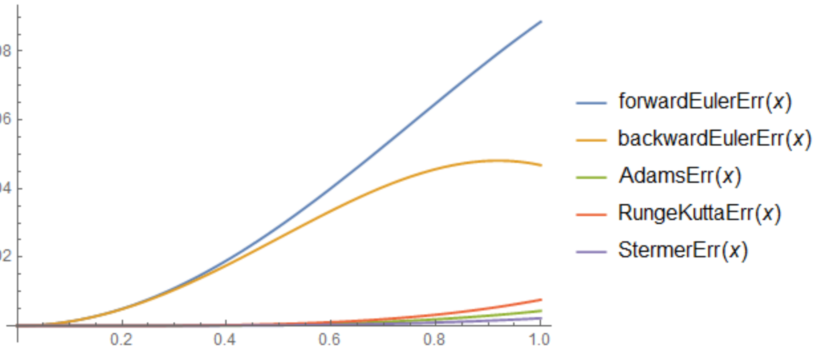

Рис.4. Графики погрешностей приближённых решений, построенных по явному и неявному методу Эйлера, одношаговому методу Адамса, методу Рунге-Кутты второго порядка и методу Штёрмера при n=4

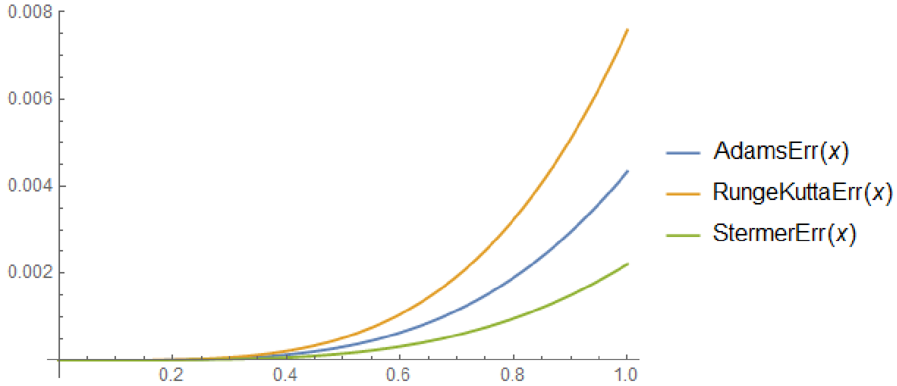

Рис.5. Графики погрешностей приближённых решений, построенных по одношаговому методу Адамса, методу Рунге-Кутты второго порядка и методу Штёрмера при n=4

Приведённый график показывает, что погрешность явного и неявного метода Эйлера существенно превосходит погрешность методов Адамса, Рунге-Кутты и Штёрмера.

Наибольшую точность из трёх методов имеет метод Штёрмера.

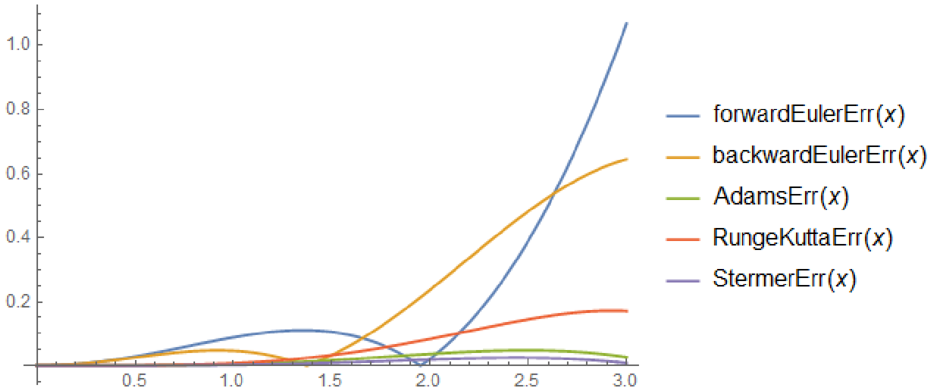

Рис.6. Графики погрешностей приближённых решений, построенных по явному и неявному методу Эйлера, одношаговому методу Адамса, методу Рунге-Кутты второго порядка и методу Штёрмера при n=4 на большем интервале

Приведённый график демонстрирует достаточно интересное поведение погрешности, отличное от поведения в первом случае, рассмотренном в данной статье. Погрешность не растёт монотонно, поэтому для численного анализа погрешности недостаточно брать значение погрешности на правом конце рассматриваемого отрезка.

Анализ погрешности

Погрешность будем оценивать по наибольшему отклонению от истинного решения на всём промежутке. Проанализируем погрешность для приближённых решений, полученных для n = 10 и n = 100. За err1 – обозначим величину наибольшего отклонения выбранного метода на заданном промежутке при n = 10, за err2 соответственно обозначим наибольшее отклонение на том же промежутке при n = 100.

Таблица 2. Погрешность работы методов для дифференциального уравнения $y'' + y = 0$

Метод	l = 0.5		l = 1		l = 2	
	err1	err2	err1	err2	err1	err2
явный метод Эйлера	0.01	0.001	0.03	0.002	0.06	0.008
неявный метод Эйлера	0.01	0.001	0.02	0.002	0.09	0.008
метод Адамса	4×10^{-5}	4×10^{-7}	0.0006	7×10^{-6}	0.006	6×10^{-5}
метод Рунге-Кутты	9×10^{-7}	9×10^{-7}	0.001	1×10^{-6}	0.01	0.0001
метод Штёрмера	2×10^{-5}	2×10^{-7}	0.0003	3×10^{-6}	0.003	3×10^{-5}

Данные в таблице показывают, что метод Штёрмера, разработанный специально для решения дифференциальных уравнений второго порядка, оказался точнее всех остальных методов.

Сравнение с рядом Маклорена

Произведём сравнение точности формулы, получающейся применением метода Штёрмера с частичной суммой ряда Маклорена. Сравнение проведено при одинаковой степени обоих разложений.

Рассмотрим разложения со старшей степенью равной 6.

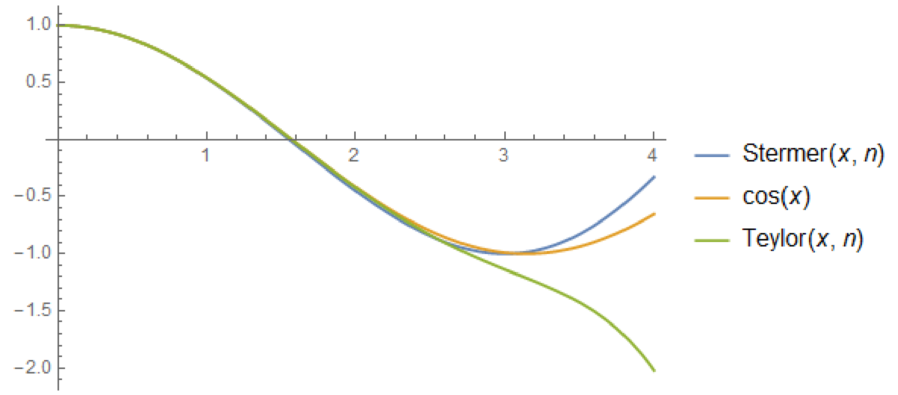

Рис.7. Графики косинуса и приближений, получаемых по методу Штёрмера и по разложению Маклорена при n=3

Приведённый график демонстрирует, что на отрезке $[0;2]$ и приближение метода Штёрмера, и приближение рядом Маклорена достаточно хорошо приближают косинус. Рассмотрим теперь график погрешности обоих приближений.

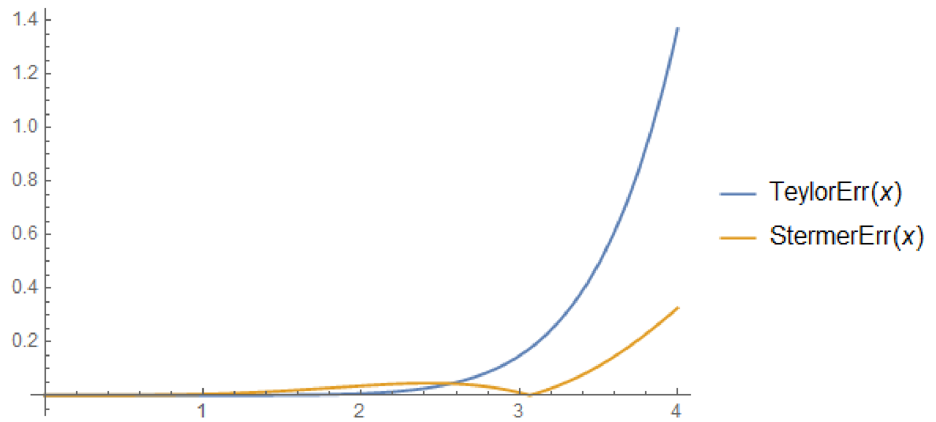

Рис.8. Графики погрешности приближений, получаемых по методу Штёрмера и по разложению Маклорена при n=3

Результаты, которые демонстрируют графики, согласуются с тем, что при удалении от 0 приближение ряда Маклорена становится всё хуже, тогда как приближение метода Штёрмера в целом на всём отрезке достаточно хорошо приближает функцию косинуса.

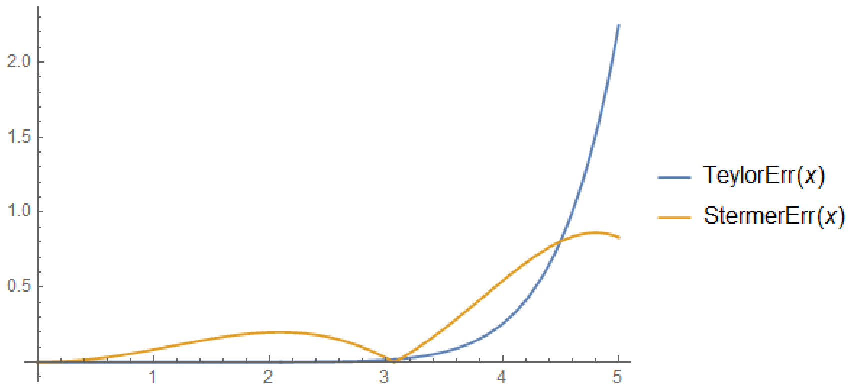

Рис.9. Графики погрешности приближений, получаемых по методу Штёрмера и по разложению Маклорена при n=4

При увеличении числа слагаемых в обоих приближениях метод Штёрмера становится точнее отрезка ряда Маклорена при больших значениях по оси X.

Поиск периода

Интересно попробовать найти период приближённого решения. Для этого построим на фазовой плоскости $\{y, y'\}$ кривую, соответствующую приближённому решению $y_n(x)$, найденному по методу Штёрмера.

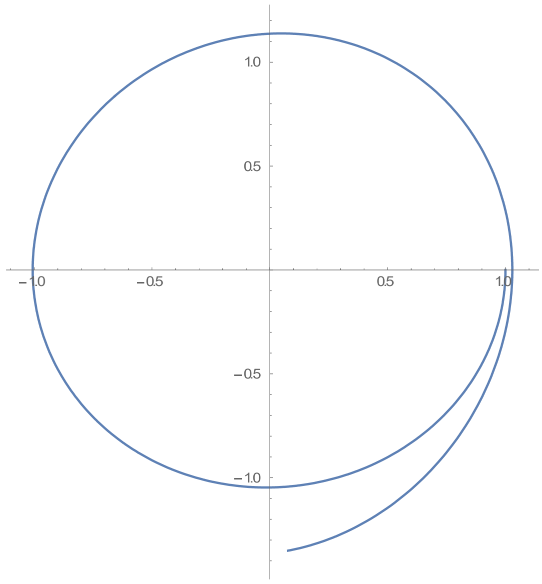

Рис.10. График точки на фазовой плоскости $\{y, y'\}$ для приближения, полученного по методу Штёрмера при n=6

Для определения периода, найдём $r = \min\limits_{5<x<7} \sqrt{y_n^2(x) + y_n'^2(x)}$.

Таблица 3. Определение периода приближённого решения дифференциального уравнения $y'' + y = 0$

n	r	$x_{\min}$
6	0.029	5.80
8	0.0034	6.12
10	0.00037	6.18
12	0.0018	6.21
14	0.00061	6.23

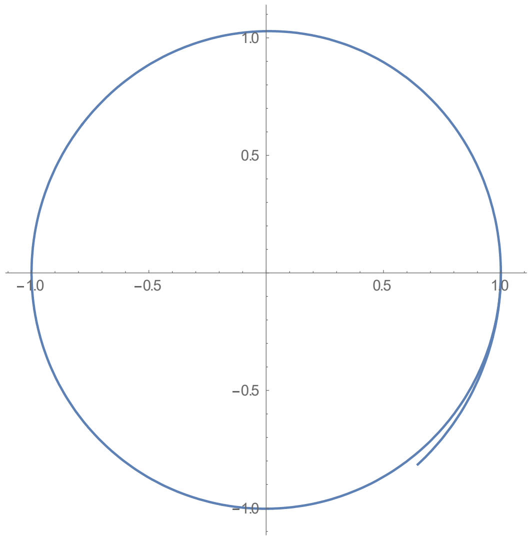

Рис.10. График точки на фазовой плоскости $\{y, y'\}$ для приближения, полученного по методу Штёрмера при n=10

Выводы

- Удалось применить известные численные методы решения дифференциальных уравнений для получения аналитических приближений.
- Исследована зависимость точности получаемого различными методами решения при изменении промежутка.
- Наиболее точным для уравнения $y' = y$ оказался метод Адамса.
- Наиболее точным для уравнения $y'' + y = 0$ оказался метод Штёрмера.
- Наличие формулы, описывающие решение при любом *n*, позволяется получать решения сколь угодно точно, не затрачивая при этом существенных вычислительных усилий. Сколь угодно большая точность получения решения гарантируется равномерной сходимость функциональной последовательности аналитических приближений к пределу – точному решению нашего модельного уравнения.
- В отличие от стандартного применения численных методов, дающих поточечные

приближения, в случае их применения к промежутку с переменным верхним пределом полученные решения в виде формул могут быть применены на других промежутках без необходимости пересчитывать решение заново, что неизбежно при получении поточечных приближений.

- Рассмотренные методы без существенных модификаций могут быть применены и к другим обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам. При этом, начальные условия и иные параметры задачи (например, те, от которых зависит правая часть уравнения) автоматически войдут в формулы для приближённых решений.

Литература

1. T. Lazovskaya, D. Tarkhov. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206
2. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Ivan Bolgov, Tatyana Kaverzneva, Svetlana Kolesova, Tatyana Lazovskaya, Evgeniy Lukinskiy, Alexey Petrov, Vladimir Filkin MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELs BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf
3. Dmitry Tarkhov, Ekaterina Shershneva APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf
4. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Tatyana Shemyakina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf
5. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Оникс 21 век, 2005. – 400с.

References

1. T. Lazovskaya, D. Tarkhov. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206
2. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Ivan Bolgov, Tatyana Kaverzneva, Svetlana Kolesova, Tatyana Lazovskaya, Evgeniy Lukinskiy, Alexey Petrov, Vladimir Filkin MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELs BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf
3. Dmitry Tarkhov, Ekaterina Shershneva APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf
4. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Tatyana Shemyakina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf
5. Verzhbickij V.M. Chislennye metody. Matematicheskij analiz i obyknovennye differencial'nye uravnenija. – M.: Oniks 21 vek, 2005. – 400s.

Поступила: 29.09.2017

Об авторах:

Тархов Дмитрий Альбертович, доктор технических наук, профессор кафедры высшая математика, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, dtarkhov@gmail.com

Картавченко Александр Евгеньевич, студент кафедры прикладная математика и информатика, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, alekart30@gmail.com

About authors:

Tarkhov Dmitriy A., Doctor of Engineering Sciences, Professor of Higher Mathematic Faculty, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, dtarkhov@gmail.com

Kartavchenko Aleksander E., Student of Applied Mathematics and Informatics Faculty, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, alekart30@gmail.com