

Численное решение на неравномерной сетке задачи оптимального управления системой массового обслуживания с малым параметром

С. К. Канзитдинов, М. А. Буатта, С. А. Васильев*, Г. О. Царева

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

* vasilyev-sa@rudn.ru

Аннотация

Задача о кратчайшей очереди (the shortest queue problem, SQP) широко применяется для процедуры балансировки нагрузки в телекоммуникационных системах. В настоящее время SQP является одной из наиболее интенсивно изучаемых задач и многие исследователи уделяют всестороннее внимание SQP для крупномасштабных систем массового обслуживания (the large-scale queueing systems, LSQS) с очень большим количеством идентичных устройств, так как это необходимо, например, для анализа устойчивой работы сетей 5G/6G. В данной работе применена численная схема высокого порядка на неоднородной сетке для исследования задачи оптимального управления LSQS с малым параметром. Мы предполагаем, что LSQS предоставляет одинаковые сервисы идентичными односервисными устройствами с экспоненциально распределенным временем обслуживания и пуассоновским входящим потоком запросов на услуги LSQS с конечной интенсивностью. LSQS реализует сервисную дисциплину таким образом, что для каждого входящего запроса обеспечивается случайный выбор из любых m таких устройств, которые имеют длину очереди не более величины s , которая не больше величины m . В этом случае динамика LSQS может быть изучена с помощью анализа решений системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка с малым параметром, которая может быть получена с помощью методов цепей Маркова. Задача оптимального управления LSQS, которая исследуется в работе, сводится к краевой задаче для этой системы дифференциальных уравнений с малым параметром. В работе используется процедура усечения для системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка с малым параметром, что позволяет получить решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений конечного порядка. Для численного решения краевой задачи для усеченной системы дифференциальных уравнений с малым параметром применена численная схема высокого порядка с неоднородной сеткой. Сеточная схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, когда малый параметр стремится к нулю. Результаты моделирования динамики LSQS демонстрируют, что эта LSQS с оптимальным управлением способна обслуживать большое количество входных запросов, которые поступают с высокой интенсивностью.

Ключевые слова: численные методы в теории массового обслуживания, неоднородная сеточная схема, системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, оптимальное управление, малый параметр, счетные цепи Маркова, масштабируемые во времени системы массового обслуживания, сингулярно возмущенная краевая задача, задача о кратчайшей очереди, численный анализ краевой задачи, адаптированные кусочно-однородные сетки типа Шишкина

Финансирование: публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН (получатель С. А. Васильев, разработка математической модели, реализация численной схемы, проведение численного анализа).

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Численное решение на неравномерной сетке задачи оптимального управления системой массового обслуживания с малым параметром / С. К. Канзитдинов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023. Т. 19, № 3. С. 543-553. <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202303.543-553>

© Канзитдинов С. К., Буатта А. М., Васильев С. А., Царева Г. О., 2023



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Numerical Analysis of the Control Problem for a Queuing System with a Small Parameter on a Non-Uniform Grid Scheme

S. K. Kanzitdinov, M. A. Bouatta, S. A. Vasilyev*, G. O. Tsareva

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation
Address: 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

* vasilyev-sa@rudn.ru

Abstract

The shortest queue problem (SQP) is widely applied for load-balancing procedure in telecommunication systems. Now SQP is one of the most intensively studied and many investigators give full consideration to the SQP research for large-scale queueing systems (LSQS) with a huge number of identical devices because of the integration of 5G/6G networks is carried out at a very high speed. In this work we apply the high-order non-uniform grid numerical scheme for the investigation of the LSQS dynamics with identical single-service devices under the optimal control. We assume that identical services provide by devices with exponentially distributed service time and there is a Poisson incoming flow of requests for LSQS services with finite intensity. LSQS implements the service discipline so that each input request provides a random selection from any m-set devices such device that has the s-th shortest (or equivalently, the (m-s)-th longest) queue size. The evolution dynamics LSQS can be considered using the solutions analysis, where the solutions can be obtained by solving a system of differential equations of infinite degree which can be found with the use of the Markov chains method. We consider the control problem for LSQS, which is formulated in the form of the boundary value problem (BVP) for this system of differential equations with a small parameter. We use the truncation procedure for this singularly perturbed BVP and investigate BVP for the finite order system of differential equations. We apply the high-order non-uniform grid scheme for numerical solving of the truncated BVP. The grid scheme demonstrates good convergence of solutions of the singularly perturbed BVP when a small parameter tends to zero. The results of the LSQS dynamics simulation demonstrate that this LSQS with the control capable of serving a huge number of input requests.

Keywords: numerical methods in queuing theory, non-uniform grid scheme, systems of differential equations of infinite order, small parameter, counting Markov chains, time-scalable queuing systems, control problem with a small parameter, singular perturbed boundary value problem, shortest queue problem, numerical analysis of the boundary value problem, layer-adapted piecewise uniform Shishkin-type meshes

Funding: The publication was supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program (Grant recipient S. A. Vasiliev, development of a mathematical model, implementation of a numerical scheme, numerical analysis).

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Kanzitdinov S.K., Bouatta M.A., Vasilyev S.A., Tsareva G.O. Numerical Analysis of the Control Problem for a Queuing System with a Small Parameter on a Non-Uniform Grid Scheme. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(3):543-553. <https://doi.org/10.25559/SITI-TO.019.202303.543-553>



Введение

Современные исследования в области телекоммуникационных технологий, сетей 5G/6G, Интернета вещей (IoT) и крупномасштабных систем массового обслуживания (the large-scale queueing systems, LSQS) проводятся с как использованием математических методов [1-3], так и с применением численных методов [4-7].

На сегодняшний день существует много научных и технических задач для LSQS, связанных с проблемой кратчайших очередей [8-12] и задач оптимального управления для LSQS [13, 14].

Проблема масштабирования систем массового обслуживания представляет особый интерес в связи с необходимостью проводить анализ стабильной работы сетей 5G/6G [15-17]. Применение методов масштабирования для LSQS демонстрируют высокую эффективность при использовании асимптотических подходов при моделировании LSQS [18-20]. В последнее время появилось большое количество высокоэффективных методов численного анализа для решения задач оптимального управления для систем, динамика которых описывается сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений высокого порядка [21-23].

В работе [24] мы рассмотрели эволюционную динамику LSQS, которую можно найти путем решения системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Мы формулировали задачу Коши для системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка с малым параметром и использовали процедуру усечения для этой задачи Коши, что позволило рассмотреть систему дифференциальных уравнений конечного порядка. Мы применили неоднородную сеточную схему высокого порядка для численного решения этой усеченной задачи Коши. Сеточная схема демонстрировала хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной задачи Коши при стремлении малого параметра к нулю.

В этой статье мы использовали наш подход для исследования эволюционной динамики LSQS из [24] и применили численные методы для анализа LSQS при $n \rightarrow \infty$ в предположении, что эта система LSQS состоит из однотипных однообслуживающих устройств, каждое из которых имеет свое собственное экспоненциально распределенное среднее время обслуживания $\bar{t} = 1/\mu$, где $\mu > 0$ — интенсивность обслуживания. Мы рассмотрели LSQS, для которой существует входящий пуассоновский поток заявок с интенсивностью $n\lambda > 0$. Предполагается, что LSQS реализует дисциплину обслуживания таким образом, что для каждой заявки при входе в систему предоставляется случайный набор из m устройств, которые имеют не более s заявок в процессе обслуживания в данный момент, причем $1 \leq s \leq m$. Эволюция LSQS может быть исследована с помощью анализа поведения функций $x_k^{s,m}(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots; s, m = 1, 2, \dots; 1 \leq s \leq m$), которые могут быть найдены путем решения краевой задачи (the boundary value problem, BVP) для системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

В этой работе мы формулируем сингулярно возмущенную задачу оптимального управления с малым параметром для LSQS. Мы применяем процедуру усечения для этой

сингулярно возмущенной задачи управления и формулируем задачу управления в виде краевой задачи BVP для системы дифференциальных уравнений конечного порядка. Мы применяем неоднородную сеточную схему высокого порядка типа Шишкина для численного решения этой BVP. Мы используем малый параметр для анализа процессов масштабирования по времени для оптимального управления LSQS. Эта сеточная схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной BVP при $\varepsilon \rightarrow 0$. Результаты моделирования динамики LSQS демонстрируют, что эта LSQS с оптимальным управлением способна обслуживать большое количество входных запросов, которые поступают с высокой интенсивностью.

Масштабируемые во времени системы массового обслуживания с кратчайшими очередями и малым параметром

В работе [24] мы рассмотрели задачу щ кратчайшей очереди для LSQS с идентичным FCFS односервисным устройством с собственным экспоненциально распределенным временем обслуживания, где значение среднего времени обслуживания равно $\bar{t} = 1/\mu$ ($\mu > 0$ — интенсивность обслуживания).

Мы предлагаем использовать в модели параметр поступления запросов в виде $n\lambda > 0$ ($n \rightarrow 0$) и считаем, что можно выбирать m идентичных устройств LSQS для каждой входящей заявки в момент ее поступления немедленно и случайным образом. Следующий этап — это выбор одного единственного устройства среди m выбранных устройств для обслуживания заявки, которое имеет не более s заявок на обслуживании в момент выбора. Если имеется более одного такого устройства, то выбор между ними производится случайным образом, и заявка отправляется на выбранное устройство сразу после выбора.

Пусть $x^{s,m}(t) = \{x_k^{s,m}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — бесконечномерный вектор, где функции $x_k^{s,m}(t)$ являются долями идентичных устройств, у которых длины очередей не меньше значения k . Таким образом, имеются следующие формулы:

$$x_{k-1}^{s,m}(t) \geq x_k^{s,m}(t), x_0^{s,m}(t) = 1, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{s,m}(t) < \infty, t \geq 0,$$

$$x_k^{s,m}(t) = \zeta_k^{s,m} / n, 0 \leq \zeta_k^{s,m} \leq n,$$

$$k \in Z_+, Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}, s, m \in N, N = \{1, 2, \dots\}.$$

Функции $x_k^{s,m}(t)$ становятся детерминированными в пределе $n \rightarrow \infty$ и мы можем найти $x_k^{s,m}(t)$, решив задачу Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений с малым параметром $\varepsilon > 0$ в таком виде [24]:

$$\begin{cases} \varepsilon^{b_k} \dot{x}_k^{s,m}(t) = \mu(x_{k+1}^{s,m}(t) - x_k^{s,m}(t)) - \lambda \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)), \\ x_0^{s,m}(t) = 1, x_k^{s,m}(0) = g_k \geq 0, g_k \geq g_{k+1}, k \geq 1, t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, ($b_k \geq 0, b_k \in R$) — числовая последовательность, которая задает преобразование времени в виде



$\bar{t}_k = \varepsilon^{-b_k} t$ и $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($g_0 = 1, g_k \geq g_{k+1}, g_k \geq 0, g_k \in R$) — неувеличивающаяся числовая последовательность, функция $\Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t))$ имеет вид для $1 \leq s \leq m$ ($s, m \in N$):

$$\begin{aligned} \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) &= (h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) - h_{s,m}(x_{k-1}^{s,m}(t))), \\ h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) &= \sum_{l=0}^{s-1} C_m^l (1 - x_k^{s,m}(t))^l (x_k^{s,m}(t))^{m-l} = \\ &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{l-p} m!}{p!(m-l)!(l-p)!} (x_k^{s,m}(t))^{m-p}, \\ \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{p=0}^l (-1)^{l-p} C_m^l C_l^p [(x_k^{s,m}(t))^{m-p} - (x_{k-1}^{s,m}(t))^{m-p}] = \\ &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{l-p} m!}{p!(m-l)!(l-p)!} [(x_k^{s,m}(t))^{m-p} - (x_{k-1}^{s,m}(t))^{m-p}]. \end{aligned}$$

Мы можем сформулировать задачу Коши (1) таким образом:

$$\begin{cases} \dot{x}^{s,m} = F(x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t), \\ x^{s,m}(0) = g, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x^{s,m}(t) &= (x_1^{s,m}(t), \dots, x_n^{s,m}(t), \dots), F(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t), \dots), \\ F_k(t) &= \varepsilon^{-b_k} [\mu [x_{k+1}^{s,m}(t) - x_k^{s,m}(t)] - \lambda \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t))], k \geq 1, \\ x^{s,m}(0) &= (x_1^{s,m}(0), x_2^{s,m}(0), \dots, x_n^{s,m}(0), \dots), x_0^{s,m}(t) = 1, \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots), g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots), g_k \geq 0, g_0 = \\ &= 1, g_k \geq g_{k+1}, k \geq 1. \end{aligned}$$

Если допустить, что

$$b_k = 0, k = 1, 2, \dots, l, \dots, b_k > 0, k = l+1, l+2, \dots \quad (l \geq 2),$$

то возникает задача Тихонова [24].

Крупномасштабные системы массового обслуживания и задача оптимального выполнения с малым параметром

Сформулируем задачу оптимального управления на отрезке $[0, T_0]$ с малым параметром ε таким образом, чтобы среди допустимых элементов управления $u^{s,m}(t)$ найти такое оптимальное управление $u^{s,m*}(t)$, под воздействием которого LSQS будет эволюционировать таким образом, что существует минимум функции такого вида:

$$\begin{aligned} J(x^{s,m}(t), u^{s,m}(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{T_0} ((x_k^{s,m}(t))^2 + (u_k^{s,m}(t))^2) dt, \\ \begin{cases} J(x^{s,m}(t), u^{s,m}(t)) \rightarrow \min, \\ x^{s,m} = G(x^{s,m}(t), \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}(t)), \\ x^{s,m}(0) = g^0, u^{s,m}(T_0) = g^f, \end{cases} \quad (3) \\ x^{s,m}(t) &= (x_1^{s,m}(t), \dots, x_n^{s,m}(t), \dots), G(t) = (G_1(t), \dots, G_n(t), \dots), \\ G_k(t) &= \varepsilon^{-b_k} [\mu (x_{k+1}^{s,m}(t) - x_k^{s,m}(t)) - \lambda \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) + u_k^{s,m}(t)] = \\ &= \varepsilon^{-b_k} [F_k(t) + u_k^{s,m}(t)], k \geq 1, b = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots), \end{aligned}$$

$$x^{s,m}(0) = (x_1^{s,m}(0), x_2^{s,m}(0), \dots, x_n^{s,m}(0), \dots), x_0^{s,m}(t) = 1,$$

$$u^{s,m}(T_0) = (u_1^{s,m}(T_0), u_2^{s,m}(T_0), \dots, u_n^{s,m}(T_0), \dots),$$

$$g^0 = (g_1^0, g_2^0, \dots, g_n^0, \dots), g^f = (g_1^f, g_2^f, \dots, g_n^f, \dots),$$

где T_0 — положительное и фиксированное значение параметра времени, $u^{s,m}(t) = (u_1^{s,m}(t), \dots, u_n^{s,m}(t), \dots)$ — управление для LSQS, динамика которой задается системой дифференциальных уравнений (2), $\{u_k^{s,m}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — управляющие

функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($b_k \geq 0$) — числовая последовательность положительных действительных чисел, $g^0 = \{g_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ ($g_k^0 \geq 0, g_k^0 \geq g_{k+1}^0, k \geq 1$) — неувеличивающаяся неотрицательная последовательность действительных чисел и $g^f = \{g_k^f\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел.

Таким образом, решение задачи (3) позволяет нам найти минимум функционала:

$$I[T_0] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k^{s,m}(t) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где α_k ($k = 1, 2, \dots$) — фиксированные действительные числа.

Мы можем рассмотреть функцию Гамильтона такого вида:

$$H(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) G_k(t), \quad (5)$$

где $\Psi = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots)$ ($\{\Psi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$) — сопряженные функции, которые могут быть найдены путем решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_k = -\partial H(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) / \partial x_k^{s,m}, k = 1, 2, \dots, \\ \Psi_k(T_0) = -\alpha_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, мы можем переписать дифференциальные уравнения системы (3)

$$\dot{x}^{s,m} = G(x^{s,m}(t), \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}(t)),$$

в виде:

$$\dot{x}_k^{s,m} = \partial H(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) / \partial x_k^{s,m}, k = 1, 2, \dots,$$

и тогда, если существует кусочно-непрерывное управление $u^{s,m*}(t)$ ($t \in [0, T_0]$), которое обеспечивает минимальное

значение функционала $I[T_0]$ (4), в который входят решения системы дифференциальных уравнений (3), то существует ненулевая векторная функция $\Psi^*(t)$, которая удовлетворяет системе (6), которая обеспечивает максимум функции Гамильтона H вместе с функцией управления $u^{s,m*}$ для любого значения $t \in [0, T_0]$, то есть имеет место

$$\begin{aligned} H(\Psi^*, x_{opt}^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m*}) &= \\ &= \max_{u^{s,m*}, t \in [0, T_0]} H(\Psi^*, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m*}), \end{aligned}$$

где $x_{opt}^{s,m}(t)$ — оптимальная траектория на отрезке $[0, T_0]$.



Усеченная задача оптимального выполнения с малым параметром

Мы можем записать задачу оптимального выполнения (3) в усеченном виде:

$$\begin{cases} \tilde{J}(\tilde{x}^{s,m}, \tilde{u}^{s,m}(t)) \rightarrow \min, \\ x^{s,m} = G(x^{s,m}(t), \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}(t)), \\ \tilde{x}^{s,m}(0) = g^0, u^{s,m}(T_0) = g^f, \end{cases} \quad (7)$$

$$\tilde{J}(\tilde{x}^{s,m}, \tilde{u}^{s,m}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{T_0} ((x_k^{s,m}(t))^2 + (u_k^{s,m}(t))^2) dt,$$

$$\tilde{x}^{s,m}(t) = (x_1^{s,m}(t), \dots, x_{n+1}^{s,m}(t)),$$

$$x_0(t) = 1, G(t) = (\tilde{G}_1(t), \dots, \tilde{G}_{n+1}(t)),$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k(t) &= \varepsilon^{-b_k} [\mu(x_{k+1}^{s,m}(t) - x_k^{s,m}(t)) - \lambda \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) + u_k^{s,m}(t)] = \\ &= \varepsilon^{-b_k} [F_k(t) + u_k^{s,m}(t)], k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(t) &= \varepsilon^{-b_n} [-\mu x_n^{s,m}(t) - \lambda \Delta h_{s,m}(x_n^{s,m}(t)) + u_n^{s,m}(t)] = \\ &= \varepsilon^{-b_n} [\tilde{F}_n(t) + u_n^{s,m}(t)], \tilde{F}_n = -\mu x_n^{s,m}(t) - \lambda \Delta h_{s,m}(x_n^{s,m}(t)), \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{n+1}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n ((x_k^{s,m}(t))^2 + (u_k^{s,m}(t))^2),$$

$$\tilde{x}^{s,m}(0) = (x_1^{s,m}(0), x_2^{s,m}(0), \dots, x_{n+1}^{s,m}(0)), x_0^{s,m}(0) = 1,$$

$$\tilde{u}^{s,m}(T_0) = (u_1^{s,m}(T_0), u_2^{s,m}(T_0), \dots, u_n^{s,m}(T_0)),$$

$$g^0 = (g_1^0, g_2^0, \dots, g_{n+1}^0), g_k^0 \geq 0, g_k^0 \geq g_{k+1}^0, k = \overline{1, n}, g_{n+1}^0 = 0,$$

$$g^f = (g_1^f, g_2^f, \dots, g_n^f),$$

где $u^{s,m}(t) = (u_1^{s,m}(t), \dots, u_n^{s,m}(t))$ — управление LSQS,

$\{u_k^{s,m}(t)\}_{k=1}^n$ — управляющие переменные, $\varepsilon > 0$ — малый

параметр, $b = \{b_k\}_{k=1}^n$ ($b_k \geq 0$) — положительные действительные числа, $g^0 = \{g_k^0\}_{k=1}^{n+1}$ — неувеличивающиеся неот-

рицательные действительные числа и $g^f = \{g_k^f\}_{k=1}^n$ — вещественные числа.

Мы можем использовать дополнительную переменную в системе (7)

$$x_{n+1}^{s,m}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{T_0} ((x_k^{s,m}(t))^2 + (u_k^{s,m}(t))^2) dt,$$

для которой имеется дифференциальное уравнение и начальное условие в виде:

$$\dot{x}_{n+1}^{s,m}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n ((x_k^{s,m}(t))^2 + (u_k^{s,m}(t))^2), x_{n+1}^{s,m}(0) = 0.$$

Таким образом, решение задачи (7) позволяет нам найти минимум функционала:

$$\tilde{I}[T_0] = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k^{s,m}(t) \rightarrow \min, \quad (8)$$

где α_k ($k = 1, 2, \dots, n+1$) — фиксированные действительные числа.

Пусть этот функционал имеет вид: $\tilde{I}[T_0] = x_{n+1}^{s,m}(t) \rightarrow \min$, где $\alpha_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $\alpha_{n+1} = 1$.

В этом случае мы можем записать функцию Гамильтона следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \Psi_k(t) \tilde{G}_k(t) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^{-b_k} \Psi_k [F_k(t) + u_k^{s,m}(t)] + \varepsilon^{-b_n} \Psi_n(t) [\tilde{F}_n(t) + \\ &+ u_n^{s,m}(t)] + \frac{1}{2} \Psi_{n+1}(t) \sum_{k=1}^n ((x_k^{s,m}(t))^2 + (u_k^{s,m}(t))^2), \end{aligned}$$

где $\Psi = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_{n+1}(t))$ ($\{\Psi_k(t)\}_{k=1}^{n+1}$) — сопряженные функции, которые могут быть найдены как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\Psi}}_k = -\partial \tilde{H}(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) / \partial x_k^{s,m}, k = \overline{1, n+1}, \\ \Psi_k(T_0) = 0, k = \overline{1, n}, \\ \Psi_{n+1}(T_0) = -1, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Psi}}_k &= -\sum_{j=1}^{n+1} \Psi_j(t) \frac{\partial \tilde{G}_j(t)}{\partial x_k^{s,m}} = -\left[\sum_{j=1}^3 \Psi_{j-2}(t) \frac{\partial \tilde{G}_{j-2}(t)}{\partial x_k^{s,m}} \right] - \\ &- \Psi_{n+1}(t) x_k^{s,m}(t) = -\varepsilon^{-b_{k-1}} \mu \Psi_{k-1} + \varepsilon^{-b_k} \Psi_k [\mu + \lambda h_{s,m}^*(x_k^{s,m}(t))] - \\ &- \varepsilon^{-b_{k+1}} \lambda \Psi_{k+1} h_{s,m}^*(x_k^{s,m}(t)) - \Psi_{n+1} x_k^{s,m}(t), k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{\Psi}}_n = -\varepsilon^{-b_{n-1}} \mu \Psi_{n-1} + \varepsilon^{-b_n} \Psi_n [\mu + \lambda h_{s,m}^*(x_n^{s,m}(t))] - \Psi_{n+1} x_n^{s,m}(t),$$

$$\begin{aligned} h_{s,m}^*(x_k^{s,m}(t)) &= \frac{\partial h_{s,m}(x_k^{s,m}(t))}{\partial x_k^{s,m}} = \\ &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{l-p} (m-p)m!}{p!(m-l)!(l-p)!} (x_k^{s,m}(t))^{m-p-1}. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{H}(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m})$ максимизируется при выполнении следующих условий:

$$\partial \tilde{H}(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) / \partial u_k^{s,m} = 0, k = \overline{0, n},$$

откуда мы получаем равенства

$$\varepsilon^{-b_k} \Psi_k(t) + \Psi_{n+1}(t) u_k^{s,m}(t) = 0, k = \overline{1, n}.$$

Если мы воспользуемся условием $\Psi_{n+1} = -1$ из (9), то

получим следующее равенство $\Psi_k(t) = \varepsilon^{b_k} u_k^{s,m}(t)$, $k = \overline{1, n}$.

Следовательно, мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u}_k^{s,m} = \varepsilon^{-b_k} [\mu(u_k^{s,m} - u_{k-1}^{s,m}) + \lambda(u_k^{s,m} - u_{k+1}^{s,m}) h_{s,m}^*(x_k^{s,m}(t)) + \\ + x_k^{s,m}(t)], k = \overline{1, n-1}, \\ \dot{u}_n^{s,m} = \varepsilon^{-b_n} [\mu(u_n^{s,m} - u_{n-1}^{s,m}) + \lambda u_n^{s,m} h_{s,m}^*(x_n^{s,m}(t)) + x_n^{s,m}(t)], \end{cases}$$

а также получаем систему дифференциальных уравнений вида:



$$\dot{x}_k^{s,m} = \partial \tilde{H}(\Psi, x^{s,m}, \mu, \lambda, \varepsilon, b, t; u^{s,m}) / \partial \tilde{\Psi}_k = \tilde{G}_k(t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, мы можем рассмотреть краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с целью поиска решений $w^{s,m}(t)$ и $u^{s,m}(t)$ в виде:

$$\begin{cases} w^{s,m} + M(t) = N(t), \\ w_1^{s,m}(0) = g^0, w_2^{s,m}(T_0) = g^f, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w^{s,m}(t) &= (w_1^{s,m}(t), w_2^{s,m}(t)) = \\ &= (x_1^{s,m}(t), \dots, x_n^{s,m}(t), u_1^{s,m}(t), \dots, u_n^{s,m}(t)), \\ w_0^{s,m}(t) &= 0, w_1^{s,m}(t) = (x_1^{s,m}(t), \dots, x_n^{s,m}(t)), \\ w_2^{s,m}(t) &= (u_1^{s,m}(t), \dots, u_n^{s,m}(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(t) &= (M_1(t), M_2(t)), N(t) = (N_1(t), N_2(t)), \\ M_1(t) &= (M_{11}(t), \dots, M_{1n}(t)), M_2(t) = (M_{21}(t), \dots, M_{2n}(t)), \\ N_1(t) &= (N_{11}(t), \dots, N_{1n}(t)), N_2(t) = (N_{21}(t), \dots, N_{2n}(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1k}(t) &= \varepsilon^{-bk} [\mu(x_k^{s,m}(t) - x_{k+1}^{s,m}(t)) - u_k^{s,m}(t)] = \\ &= \varepsilon^{-bk} [\mu(w_k^{s,m}(t) - w_{n+k}^{s,m}(t)) - w_{n+k}^{s,m}(t)], \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1n}(t) &= \varepsilon^{-bn} [\mu x_n^{s,m}(t) - u_n^{s,m}(t)] = \varepsilon^{-bn} [\mu w_n^{s,m}(t) - w_{n+n}^{s,m}(t)], \\ M_{2k}(t) &= \varepsilon^{-bk} [\mu(u_{k-1}^{s,m}(t) - u_k^{s,m}(t)) - x_k^{s,m}(t)] = \\ &= \varepsilon^{-bk} [\mu(w_{n+k-1}(t) - w_{n+k}(t)) - w_k^{s,m}(t)], \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2n}(t) &= \varepsilon^{-bn} [\mu(u_{n-1}^{s,m}(t) - u_n^{s,m}(t)) - x_n^{s,m}(t)] = \\ &= \varepsilon^{-bn} [\mu(w_{2n-1}(t) - w_{2n}(t)) - w_n^{s,m}(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1k}(t) &= -\varepsilon^{-bk} \lambda \Delta h_{s,m}(x_k^{s,m}(t)) = -\varepsilon^{-bk} \lambda \Delta h_{s,m}(w_k^{s,m}(t)), \\ &k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$N_{1n}(t) = -\varepsilon^{-bn} \lambda \Delta h_{s,m}(x_n^{s,m}(t)) = -\varepsilon^{-bn} \lambda \Delta h_{s,m}(w_n^{s,m}(t)),$$

$$\begin{aligned} N_{2k}(t) &= \varepsilon^{-bk} \lambda [u_k^{s,m}(t) - u_{k+1}^{s,m}(t)] h_{s,m}^*(x_k^{s,m}(t)) = \\ &= \varepsilon^{-bk} \lambda [w_{n+k}(t) - u_{n+k+1}^{s,m}(t)] h_{s,m}^*(w_k^{s,m}(t)), \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$N_{2n}(t) = \varepsilon^{-bn} \lambda u_n^{s,m} h_{s,m}^*(x_n^{s,m}(t)) = \varepsilon^{-bn} \lambda w_{2n} h_{s,m}^*(w_n^{s,m}(t)).$$

$$w_1^{s,m}(0) = (x_1^{s,m}(0), \dots, x_n^{s,m}(0)),$$

$$w_2^{s,m}(T_0) = (u_1^{s,m}(T_0), \dots, u_n^{s,m}(T_0)),$$

$$g^0 = (g_1^0, g_1^0, \dots, g_n^0), \quad g_k^0 \geq 0, \quad g_k^0 \geq g_{k+1}^0, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$g^f = (g_1^f, g_2^f, \dots, g_n^f),$$

где $g^0 = \{g_k^0\}_{k=1}^n$ — неувеличивающиеся неотрицательные действительные числа и $g^f = \{g_k^f\}_{k=1}^n$ — действительные числа.

Неоднородная сеточная схема высокого порядка для численного анализа решений задачи оптимального управления с малым параметром

Мы применяем кусочно-однородную сетку $\bar{\Omega}_t$ ($t_0 = 0; t_{i-1} < t_i, i = \overline{1, N}; t_N = T_0$) для численного анализа задачи (10):

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_t &= (t_i | t_i = i\tau_1, i = \overline{0, K}; t_i = t_K + (i-K)\tau_2, i = \overline{K+1, N}), \\ \tau_1 &= \delta / K, \quad \tau_2 = (T_0 - \delta) / (N - K), \quad \delta = \bar{C} \varepsilon \ln(\varepsilon^{-1}), \end{aligned}$$

где значение параметра \bar{C} определяется аналитически с помощью асимптотических оценок решений задачи (10). Таким образом, эта кусочно-однородная сетка $\bar{\Omega}_t$ имеет K малых шагов τ_1 и $(N - K)$ больших шагов τ_2 на отрезке $[0, T_0]$.

В этом случае мы можем рассмотреть конечно-разностную аппроксимацию задачи (10) в следующем виде:

$$\begin{cases} (L_h w^{s,m})_i + M_i(w^{s,m}) = N_i(w^{s,m}), \quad i = \overline{0, N}, \\ w_{10}^{s,m} = g^0, w_{2N}^{s,m} = g^f, \end{cases} \quad (11)$$

$$\hat{h}_i = 0.5(t_{i+1} - t_{i-1}), \quad h_i = t_i - t_{i-1}; \quad 0 \leq t_i \leq T_0, \quad i = \overline{0, N};$$

$$(L_h w^{s,m})_i = \frac{1}{2\hat{h}_i} \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} (w_{i+1}^{s,m} - w_i^{s,m}) + \frac{h_{i+1}}{h_i} (w_i^{s,m} - w_{i-1}^{s,m}) \right),$$

$$M_i(w^{s,m}) = M(w^{s,m}(t_i)), \quad N_i(w^{s,m}) = N(w^{s,m}(t_i)),$$

$$w_i = w^{s,m}(t_i).$$

Используя (11), мы можем получить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} w_{k0} = g_k^0, \quad k = \overline{1, n}, \quad w_{0i} = 0, \quad i = \overline{0, N} \\ A_{ki} w_{ki-1} + B_{ki} w_{ki} + C_{ki} w_{ki+1} + Q_k w_{k+1i} + R_k w_{n+ki} = N_{ki}, \\ \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_{ki} w_{ki-1} + B_{ki} w_{ki} + C_{ki} w_{ki+1} + S_k w_{k-i} + T_k w_{n+k-i} = N_{ki}, \\ \quad k = \overline{n+1, 2n}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ w_{kN} = g_k^f, \quad k = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \quad (12)$$

$$A_{ki} = -\frac{h_{i+1}}{2\hat{h}_i h_i}, \quad C_{ki} = \frac{h_i}{2\hat{h}_i h_{i+1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, 2n},$$

$$B_{ki} = \frac{1}{2\hat{h}_i} \left(\frac{h_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{h_{i+1}} \right) + \varepsilon^{-bk} \mu, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$B_{ki} = \frac{1}{2\hat{h}_i} \left(\frac{h_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{h_{i+1}} \right) - \varepsilon^{-bk-n} \mu, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{n+1, 2n},$$

$$Q_k = -\varepsilon^{-bk} \mu, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad Q_n = 0, \quad R_n = -1, \quad k = \overline{1, n},$$

$$S_k = -\varepsilon^{-bk-n} \mu, \quad k = \overline{n+1, 2n}, \quad T_{n+1} = 0,$$

$$T_k = \varepsilon^{-bk-n} \mu, \quad k = \overline{n+2, 2n},$$



$$N_{ki} = -\varepsilon^{-b_k} \lambda \Delta h_{s,m}(w_{ki}), \dots, i = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, n},$$

$$N_{ki} = \varepsilon^{-b_{k-n}} \lambda [w_{ki} - w_{k+i}] h^*(w_{ki}), i = \overline{1, N-1}, k = \overline{n+1, 2n-1},$$

$$N_{ki} = \varepsilon^{-b_{k-n}} \lambda w_{ki} h^*(w_{ki}), i = \overline{1, N-1}, k = 2n,$$

$$h^*(w_{ki}) = h_{s,m}^*(w_{ki}^{s,m}(t_i)).$$

Мы используем модификацию метода Гаусса с выбором главного элемента (метод развертки блочной матрицы) для решения систем линейных уравнений с блочно-ленточной матрицей (12). Идея алгоритма заключается в реализации метода Гаусса на упакованном массиве, в котором размещены ненулевые элементы матриц. Решение нелинейных систем уравнений (12) получается в результате итерационного процесса. Мы решаем однородную краевую задачу (11) при $N_i = 0, i = \overline{0, N}$ и находим решение $w_i^{s,m,0}$ на первом этапе вычислений, а на втором этапе вычислений мы решаем краевую задачу (12) при $N_i(w_i^{s,m,0}) \neq 0, i = \overline{0, N}$. Далее эти

итерации повторяются до получения необходимой точности решений, где величина

$$R_{kj} = 0.2 \max_{i=0, N} |w_{ki+1}^{s,m,j+1} - w_{ki+1}^{s,m,j}|$$

оценивается для каждого $k = \overline{1, 2n}$ и итерации $j = 0, 1, \dots$

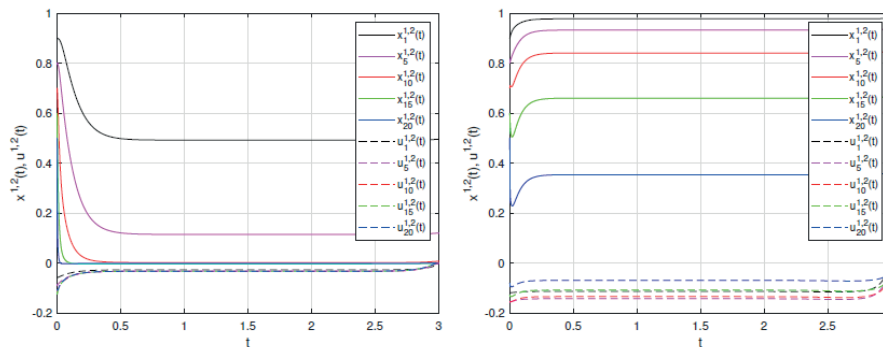
Если это значение R_{kj} больше допустимой ошибки δ , то мы производим следующую итерацию.

Численный анализ задачи оптимального управления с малым параметром с применением неоднородной сеточной схемы высокого порядка

Численный анализ решений

$$x_k^{s,m}(t), u_k^{s,m}(t) \quad (k = 1, 5, 10, 15, 20; m = 2, 3; 1 \leq s \leq m)$$

представлен на рисунках (см. рис. 1–5).

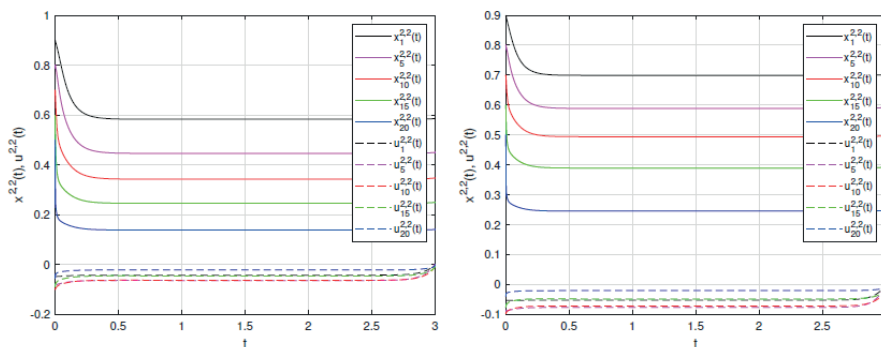


Р и с. 1. Решения $x_k^{1,2}(t), u_k^{1,2}(t)$ для параметров $s = 1, m = 2$, малого параметра $\varepsilon = 0.001$ и значений $\mu = 5$, $\lambda = 4$ (левый график), $\lambda = 6$ (правый график)

Fig. 1. The solutions $x_k^{1,2}(t), u_k^{1,2}(t)$ for the parameters $s = 1, m = 2$, the small parameter $\varepsilon = 0.001$ and the values $\mu = 5$, $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (the right graph)

Источник: здесь и далее в статье все рисунки составлены авторами.

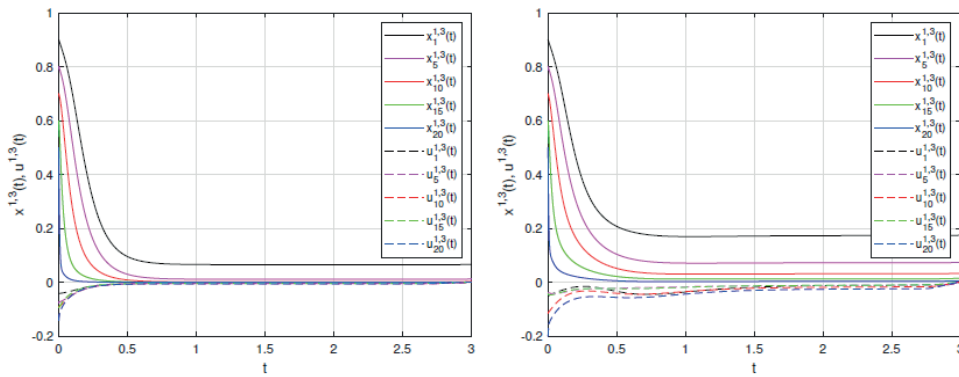
Source: Hereinafter in this article all figures were drawn up by the authors.



Р и с. 2. Решения $x_k^{2,2}(t), u_k^{2,2}(t)$ для параметров $s = 2, m = 2$, малого параметра $\varepsilon = 0.001$ и значений $\mu = 5$, $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (правый график)

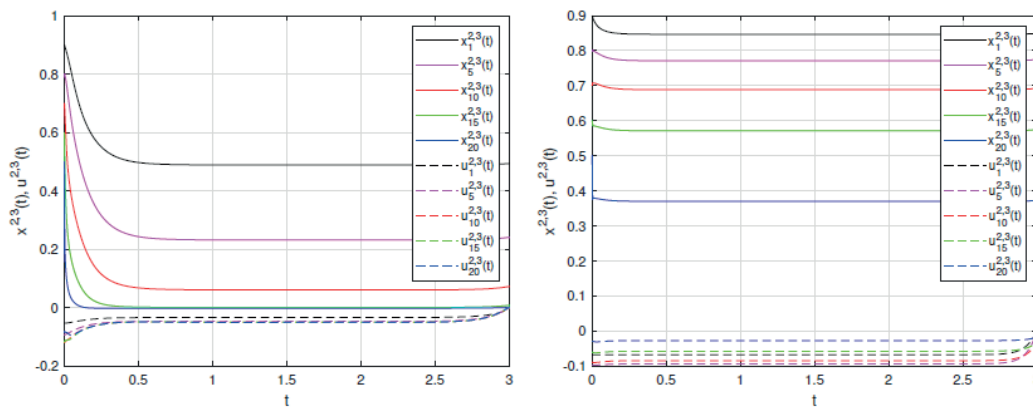
Fig. 2. The solutions $x_k^{2,2}(t), u_k^{2,2}(t)$ for the parameters $s = 2, m = 2$, the small parameter $\varepsilon = 0.001$ and the values $\mu = 5$, $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (the right graph)





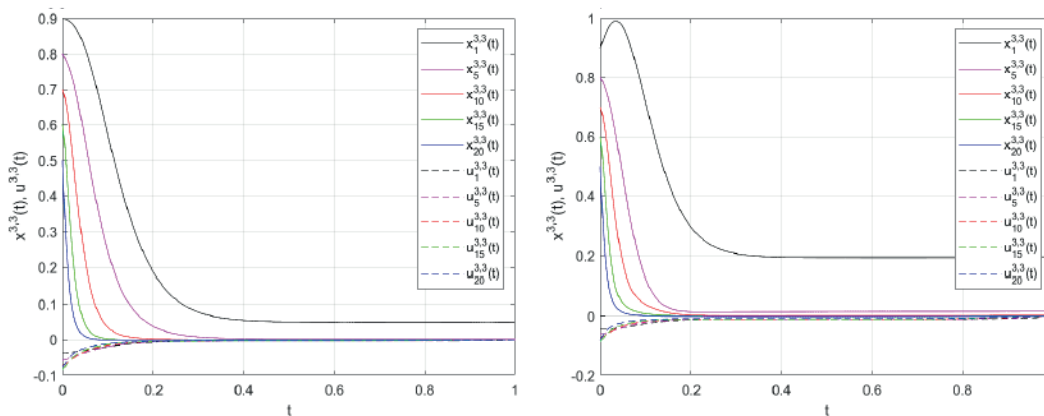
Р и с. 3. Решения $x_k^{1,3}(t)$, $u_k^{1,3}(t)$ для параметров $s = 1$, $m = 3$, малого параметра $\varepsilon = 0.001$ и значений $\mu = 5$,
 $\lambda = 4$ (левый график), $\lambda = 6$ (правый график)

Fig. 3. The solutions $x_k^{1,3}(t)$, $u_k^{1,3}(t)$ for the parameters $s = 1$, $m = 3$, the small parameter $\varepsilon = 0.001$ and the values $\mu = 5$,
 $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (the right graph)



Р и с. 4. Решения $x_k^{2,3}(t)$, $u_k^{2,3}(t)$ для параметров $s = 2$, $m = 3$, малого параметра $\varepsilon = 0.001$ и значений $\mu = 5$,
 $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (правый график)

Fig. 4. The solutions $x_k^{2,3}(t)$, $u_k^{2,3}(t)$ for the parameters $s = 2$, $m = 3$, the small parameter $\varepsilon = 0.001$ and the values $\mu = 5$,
 $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (the right graph)



Р и с. 5. Решения $x_k^{3,3}(t)$, $u_k^{3,3}(t)$ для параметров $s = 3$, $m = 3$, малого параметра $\varepsilon = 0.001$ и значений $\mu = 5$,
 $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (правый график)

Fig. 5. The solutions $x_k^{3,3}(t)$, $u_k^{3,3}(t)$ for the parameters $s = 3$, $m = 3$, the small parameter $\varepsilon = 0.001$ and the values $\mu = 5$,
 $\lambda = 4$ (the left graph), $\lambda = 6$ (the right graph)



Для численного моделирования мы использовали следующие параметры: интенсивность входящих заявок равна $\lambda = 4$ (режим низкого поступления заявок на левых графиках) и $\lambda = 6$ (режим высокого поступления заявок на правых графиках), интенсивность обслуживания $\mu = 5$, количество дифференциальных уравнений в системе $n = 20$, количество дифференциальных уравнений без малых параметров в системе $l = 9$ (т. е. $1 \leq k \leq 9$), количество дифференциальных уравнений с малыми параметрами в системе $n - l = 11$ (т. е. $10 \leq k \leq 20$), степени b_k ($k = \overline{1, 20}$) малых параметров ε^{b_k} равны $b_k = 0$ ($1 \leq k \leq 9$) и $b_k = 1/k$ ($10 \leq k \leq 20$), количество шагов сетка $N = 10^4$, допустимая погрешность равна $\delta = 10^{-6}$. Значения начальных условий представлены в виде набора чисел $g_k^0 = (175 - 4k)/190$, $g_k^f = 0$, ($k = \overline{1, 20}$), временной интервал — $t \in [0, 3]$ ($T_0 = 3$). Значения параметров s, m, ε представлены в подписях под рисунками. Численная схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной BVP при стремлении малого параметра к нулю. Результаты моделирования динамики LSQS демонстрируют, что эта LSQS с управлением способна обслуживать огромное количество входящих заявок.

Заключение

Изучение задач оптимального управления сложными системами с очередями в настоящее время имеет большое значение. Развитие теории оптимального управления в последнее время связано с ростом требований как к быстродействию, так и к точности систем управления, что вызвано переходом на новые телекоммуникационные технологии. Необходимо отметить, что дальнейшее повышение производительности сложных систем возможно только при правильном распределении ограниченных ресурсов. Таким образом, построение высокоточных систем управления требует учитывать взаимодействие отдельных частей (каналов) системы при синтезе регуляторов. Синтез таких сложных многомерных (многосвязных) систем представляет большую сложность в современной теории оптимального управления [25].

References

- [1] Kondratyeva A., Ivanova D., Begishev V., Markova E., Mokrov E., Gaidamaka Y., Samouylov K. Characterization of Dynamic Blockage Probability in Industrial Millimeter Wave 5G Deployments. *Future Internet*. 2022;14(7):193. <https://doi.org/10.3390/fi14070193>
- [2] Sidorov S., Faizliev A., Balash V., Balash O., Krylova M., Fomenko A. Extended innovation diffusion models and their empirical performance on real propagation data. *Journal of Marketing Analytics*. 2021;(9):99-110. <https://doi.org/10.1057/s41270-021-00106-x>
- [3] Yarkina N., Correia L.M., Moltchanov D., Gaidamaka Y., Samouylov K. Multi-tenant resource sharing with equitable-priority-based performance isolation of slices for 5G cellular systems. *Computer Communications*. 2022;(188):39-51. <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2022.02.019>
- [4] Beliakov G., Divakov D.V. Aggregation with dependencies: Capacities and fuzzy integrals. *Fuzzy Sets and Systems*. 2022;(446):222-232. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.03.009>
- [5] Sevastianov L.A., Lovetskiy K.P., Kulyabov D.S. Multistage collocation pseudo-spectral method for the solution of the first order linear ODE. In: 2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). Samara, Russian Federation: IEEE Computer Society; 2022. p. 1-6. <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848731>

Внедрение технологии 5G/6G требует особого внимания разработчиков новых продуктов в области беспроводной связи, поскольку эти технологии смогут обеспечить более высокие скорости передачи данных, меньшую задержку, а также большую энергоэффективность по сравнению с используемыми в настоящее время технологиями 4G. Разработчики неизбежно столкнутся с рядом технических проблем при проектировании архитектуры 5G/6G, которая должна справляться с более сложной многопользовательской средой и использованием каналов на более высоких частотах. Современные исследования теоретических моделей LSQS позволяют понять проблемы, которые будут решаться при внедрении технологии 5G/6G.

В этой статье мы используем численную схему с неоднородной сеткой высокого порядка для исследования динамики LSQS с идентичными устройствами с однородным обслуживанием. Мы рассмотрели LSQS, которая предоставляет идентичные сервисы и состоит из большого числа устройств. Мы предполагаем, что каждое устройство имеет экспоненциально распределенное время обслуживания и существует что имеется пуассоновский входящий поток заявок на услуги LSQS с конечной интенсивностью. Мы исследовали эволюционную динамику LSQS, которая может быть описана с помощью функций, которые могут быть получены путем решения системы дифференциальных уравнений бесконечной степени. Мы формулируем задачу управления для LSQS и изучаем краевую задачу (BVP) для этой системы дифференциальных уравнений с малым параметром. Мы применяем процедуру усечения для этого сингулярно возмущенной BVP и рассматриваем BVP для системы дифференциальных уравнений конечного порядка. Мы используем неоднородную сеточную схему высокого порядка для численного решения усеченной BVP. Мы учитываем различные наборы параметров для анализа процессов с масштабированием по времени для LSQS. Численная схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной BVP при стремлении малого параметра к нулю. Результаты моделирования динамики LSQS демонстрируют, что эта LSQS с управлением способна обслуживать огромное количество входящих заявок.

Наша способность решать подобные задачи очень важна, поскольку это позволит сэкономить технические и финансовые ресурсы для внедрения сетей 5G/6G.



- [6] Tiutiunnik A.A., Divakov D.V., Lovetskiy K.P., Sevastianov A.L. Single-mode propagation of adiabatic guided mode in a smooth transition between planar waveguides. *Proceedings of SPIE*. 2022. Vol. 12193. Article number: 1219305. <https://doi.org/10.1117/12.2626384>
- [7] van Houdt B. Global Attraction of ODE-based Mean Field Models with Hyperexponential Job Sizes. *Proceedings of the ACM on Measurement and Analysis of Computing Systems*. 2019;3(2):23. <https://doi.org/10.1145/3341617.3326137>
- [8] Bu Q.H., Liu L.W., Tang J.S., Zhao Y.Q. Approximations for a Queueing Game Model with Join-the-Shortest-Queue Strategy. *Journal of the Operations Research Society of China*. 2023;11(3):489-504. <https://doi.org/10.1007/s40305-021-00382-5>
- [9] Liu X., Gong K., Ying L. Steady-state analysis of load balancing with Coxian-2 distributed service times. *Naval Research Logistics*. 2022;69(1):57-75. <https://doi.org/10.1002/nav.21986>
- [10] Zhou X., Shroff N., Wierman A. Asymptotically optimal load balancing in large-scale heterogeneous systems with multiple dispatchers. *Performance Evaluation*. 2021;(145):102146. <https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102146>
- [11] Zhu L., Casale G., Perez I. Fluid approximation of closed queueing networks with discriminatory processor sharing. *Performance Evaluation*. 2020;139:102094. <https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102094>
- [12] Qiu B., Chen X.Q., Wu Q. A key design to prolong lifetime of wireless sensor network. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016;89:491-496. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.02.025>
- [13] Chen H., Wang Z. Optimal control for parallel queues with a single batch server. *Operations Research Letters*. 2022;50(4):377-383. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2022.04.004>
- [14] Haviv M., Ravner L. A survey of queueing systems with strategic timing of arrivals. *Queueing System*. 2021;(99):163-198. <https://doi.org/10.1007/s11134-021-09717-8>
- [15] Banerjee S., Budhiraja A., Puha A.L. Heavy traffic scaling limits for shortest remaining processing time queues with heavy tailed processing time distributions. *The Annals of Applied Probability*. 2022;32(4):2587-2651. <https://doi.org/10.1214/21-AAP1741>
- [16] van der Boor M., Borst S.C., van Leeuwen J.S., Johan S.H., Mukherjee D. Scalable load balancing in networked systems: A survey of recent advances. *SIAM Review*. 2022;64(3):554-622. <https://doi.org/10.1137/20M1323746>
- [17] Alnawayseh S.E.A., Al-Sit W.T., Ghazal T.M. Smart Congestion Control in 5G/6G Networks Using Hybrid Deep Learning Techniques. *Complexity*. 2022;2022(1):1781952. <https://doi.org/10.1155/2022/1781952>
- [18] Bushkova T., Moiseeva S., Moiseev A., Sztrik J., Lisovskaya E., Pankratova E. Using Infinite-server Resource Queue with Splitting of Requests for Modeling Two-channel Data Transmission. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2022;(24):1753-1772. <https://doi.org/10.1007/s11009-021-09890-6>
- [19] Nazarov A., Dudin A., Moiseev A. Pseudo Steady-State Period in Non-Stationary Infinite-Server Queue with State Dependent Arrival Intensity. *Mathematics*. 2022;10(15):2661. <https://doi.org/10.3390/math10152661>
- [20] Nazarov A., Phung-Duc T., Izmailova Y. Asymptotic-Diffusion Analysis of Multiserver Retrieval Queueing System with Priority Customers. In: Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds.) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2020. *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1391. Cham: Springer; 2021. p. 236-250. https://doi.org/10.1007/978-3-030-72247-0_18
- [21] Kumar S., Sumit S., Vigo-Aguiar J. A high order convergent numerical method for singularly perturbed time dependent problems using mesh equidistribution. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2022;(199):287-306. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.03.025>
- [22] Negero N.T. A uniformly convergent numerical scheme for two parameters singularly perturbed parabolic convection-diffusion problems with a large temporal lag. *Results in Applied Mathematics*. 2022;(16):100338. <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100338>
- [23] Ranjan K.R., Gowrisankar S. Uniformly convergent NIPG method for singularly perturbed convection diffusion problem on Shishkin type meshes. *Applied Numerical Mathematics*. 2022;(179):125-148. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.04.015>
- [24] Vasilyev S.A., Bouatta M.A., Tsareva G.O. High-Order Non-uniform Grid Scheme for Numerical Analysis of Queueing System with a Small Parameter. In: Silhavy R., Silhavy P., Prokopova Z. (eds.) Data Science and Algorithms in Systems. CoMeSySo 2022. *Lecture Notes in Networks and Systems*. Vol. 597. Cham: Springer; 2023. p. 785-797. https://doi.org/10.1007/978-3-031-21438-7_66
- [25] Vasilyev S.A., Bouatta M.A., Kanzitdinov S.K., Tsareva G.O. High-Order Non-uniform Grid Scheme for Numerical Analysis of Shortest Queue Control Problem with a Small Parameter. In: Silhavy R., Silhavy P. (eds.) Networks and Systems in Cybernetics. CSOC 2023. *Lecture Notes in Networks and Systems*. Vol. 723. Cham: Springer; 2023. p. 639-653. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35317-8_58

Поступила 02.08.2023; одобрена после рецензирования 10.09.2023; принята к публикации 25.09.2023.
Submitted 02.08.2023; approved after reviewing 10.09.2023; accepted for publication 25.09.2023.



Об авторах:

Канзитдинов Шахмурад Канзитдинович, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3972-7739>, shahkazitdinov@mail.ru

Буатта Мохамед Адел, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-5477-8710>, adelbouatta.rudn@mail.ru

Васильев Сергей Анатольевич, доцент кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), кандидат физико-математических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1562-0256>, vasilyev-sa@rudn.ru

Царева Галина Олеговна, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8188-5212>, gotsareva@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Shakhmurad K. Kanzitdinov, Postgraduate Student of the Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3972-7739>, shahkazitdinov@mail.ru

Mohamed A. Bouatta, Postgraduate Student of the Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-5477-8710>, adelbouatta.rudn@mail.ru

Sergey A. Vasilyev, Associate Professor of the Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1562-0256>, vasilyev-sa@rudn.ru

Galina O. Tsareva, Postgraduate Student of the Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8188-5212>, gotsareva@gmail.com

All authors have read and approved the final manuscript.

