УДК 517.937+517.928.2+519.216.2

Васильев С.А., Коршок Е.О.

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

В данной работе предлагается алгоритм построения асимптотических решений сингулярно возмущенного стохастических дифференциального уравнения бесконечного порядка.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Стохастические дифференциальные уравнения; дифференциальные уравнения бесконечного порядка; сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения.

Vasilyev S.A., Korshok E.O.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

BUILD OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF INFINITE ORDER

ABSTRACT

In this paper, we propose an algorithm for asymptotic solutions of a singularly perturbed stochastic differential equations of infinite order. Solutions of singularly perturbed stochastic differential equations of infinite order was built.

KEYWORDS

Stochastics differential equations; infinite order differential equations; singular perturbated differential equations.

Введение

Применение при моделировании динамики сложных систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) представляет подход, позволяющий решить многие задачи: технические, экономические и др. В большинстве существующих подходов применяются методы, позволяющие получить решение-траекторию путем сведения задач большой размерности к серии задач меньшей размерности [1-3], [1-6], также исследовались стохастические дифференциальные уравнения бесконечного порядка [11]. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка рассматривались в работах А.Н.Тихонова [12], К.П. Персидского [10], О.А. Жаутыкова [15-16], Ю.Ф. Коробейника [7], М.А. Красносельский [8] и другие. Также большой интерес представляют работы в области сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений: А.Н.Тихонова [13], А.Б. Васильевой [14], С.А. Ломова [9] и другие.

В данной работе предлагается алгоритм построения асимптотических решений сингулярно возмущенного стохастических дифференциального уравнения бесконечного порядка и исследуется вопрос о существовании и единственности его решения.

1. Сингулярно возмущенное стохастичекое уравнение бесконечного порядка

Рассмотрим сингулярно возмущенное стохастическое дифференциальное уравнение

$$\mu^{-1}\left(\exp\left(\mu\frac{dX_t}{dt}\right)-1\right)=b(t,X_t)+\sigma(t,X_t)W_t, \tag{1}$$

где X_t - состояние системы в момент времени t, функции $b(t,X_t)\in R$, $\sigma(t,X_t)\in R$, а W_t -мерный белый шум, $\mu\in(0,1]$ - малый параметр.

Уравнение (1) можно представить в виде стохастического дифференциального уравнения бесконечного порядка:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{k-1}}{k!}\frac{d^k X_t}{dt^k}=b(t,X_t)+\sigma(t,X_t)W_t=\frac{dX_t}{dt}+\frac{\mu}{2!}\frac{d^2X_t}{dt^2}+\frac{\mu^2}{3!}\frac{d^3X_t}{dt^3}+\ldots= \\ =b(t,X_t)+\sigma(t,X_t)W_t, \quad (2)$$

но, с другой стороны, уравнение (1) можно записать таким образом, что оно будет конечно-разностным:

$$\frac{X_t(t-\mu)}{\mu}=b(t,X_t)+\sigma(t,X_t)W_t, \quad (3)$$

где $\mu<<1$ - сдвиг во времени.

Если в этом уравнении формально устремить величину $\mu\to 0,$ то уравнение (3) переходит в уравнение

$$\frac{X_t}{dt}=b(t,X_t)+\sigma(t,X_t)W_t, \quad (4)$$

которое будем называть вырожденным.

Для удобства перепишем уравнение (1) в виде:

$$\tilde{L}_{\infty}^{\mu}X_t(t,\mu)=0, \\ \tilde{L}_{\infty}^{\mu}=L+\mu L_{\infty}^{\mu}, L=\frac{d}{dt}-b-\sigma W_t; \quad (5) \\ \tilde{L}_{\infty}^{\mu}=\sum_{k=2}^{\infty}\mu^{k-2}\frac{\mu^{k-1}}{k!}D^kX_t, D^k=\frac{d^k}{dt^k}.$$

Для уравнения (5) сформулируем задачу Коши:

$$\begin{cases}\tilde{L}_{\infty}^{\mu}X_t(t,\mu)=0,\\ D^nX_0(0)=\bar{X}_n,\ n=0,1,\ldots,\end{cases} \quad (6)$$

где $\bar{X}_n\subset l_1$ - числовая последовательность, определяющая начальное состояние системы.

Задача Коши (6) является задачей с малым параметром ($\mu<<1$) при старших производных и поэтому ее можно отнести к классу сингулярно возмущенных задач, так как при формальном устремлении $\mu\to 0$ (6) порядок дифференциального уравнения понизится, задача станет вырожденной и переопределенной; в связи с этим встанет о выборе начальных условий для вырожденной задачи.

Для уравнения (6) сформулируем вырожденную задачу Коши:

$$\begin{cases}L\tilde{X}_t=0,\\ \tilde{X}_0(0)=\bar{X}_0,\end{cases} \quad (7)$$

где $\bar{X}_0\in R$ - действительная величина, определяющая начальное состояние системы. Таким образом, возникает вопрос о построении асимптотического решения задачи (6) и о выборе начальных условий для вырожденной задачи (7).

2. Усечение сингулярно возмущенного стохастического дифференциального уравнения

Если в уравнении (5) ограничится конечным порядком $m>1,$ тогда его можно записать таким образом:

$$\tilde{L}_m^{\mu}X_t^m(t,\mu)=0,\ \tilde{L}_m^{\mu}=L+\mu L_m^{\mu}; \quad (8) \\ L=\frac{d}{dt}-b^m-\sigma^mW_t^m;\ L_m^{\mu}=\sum_{k=2}^{m}\mu^{k-2}\frac{\mu^{k-1}}{k!}\frac{d^kX_t}{dt^k}.$$

Для уравнения этого уравнения сформулируем задачу Коши:

$$\begin{cases}\tilde{L}_m^{\mu}X_t^m(t,\mu)=0,\\ D^nX_0^m=\bar{X}_n^m,\ n=0,1,\ldots,m\end{cases} \quad (9)$$

где $\bar{X}_n^m\in\mathbf{R}$ - m действительных чисел, определяющих начальное состояние системы.

Для уравнения (8) сформулируем вырожденную задачу Коши:

$$\begin{cases} L\tilde{X}_t = 0, \\ \tilde{X}_0 = \bar{X}_0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\bar{X}_0 \in R$ - действительная величина, определяющая начальное состояние системы. Будем считать, что данная задача совпадает с задачей (7).

Задача Коши (9) является задачей с малым параметром $(\mu << 1)$ при старших производных и поэтому ее можно отнести к классу сингулярно возмущенных задач, так как при формальном устремлении $\mu \to 0$ (9) порядок дифференциального уравнения понизится, задача станет вырожденной и переопределенной; в связи с этим встанет о выборе начальных условий для вырожденной задачи.

Таким образом, возникает вопрос о построении асимптотического решения задачи (9) и о выборе выборе начальных условий для вырожденной задачи (7), (10).

3. Формализм построения асимптотического решения задачи Коши для СДУ

3.1. Разложение по малому параметру

Будем искать формальное решение X_t задачи Коши (6) в виде такого асимптотического ряда:

$$\Theta X_t = \bar{X}_t + \Pi X_t = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu^k (\bar{X}_{tk} + \Pi X_{tk}), \quad (11)$$

что его частичная сумма

$$\Theta_j X_t = \sum_{k=0}^{j} \mu^k (\bar{X}_{tk} + \Pi X_{tk})$$

будет удовлетворять неравенствам для решения задачи (6)

$$\max\nolimits_{t \in [\delta_A, t_0 - \delta_A]} | X_t - \Theta_j X_t | < M \mu^{j+1}$$

а также аналогичным неравенствам для краевых условий данных задач, где M, и $\delta << 1$, - положительные постоянные, независимые от t и μ. Тогда для X_t асимптотическое решение будет иметь вид:

$$X_t = \sum_{k=0}^{j} \mu^k (\bar{X}_{tk} + \Pi X_{tk}) + \bar{Z}_j(t),$$

где $\bar{Z}_j(t) = \mu^{j+1} z_j(t)$ - погрешность асимптотического приближения решения X_t частичной суммой $\Theta_j X_t$

$$\bar{Z}_j(t) = X_t - \Theta_j X_t.$$

Здесь $\bar{X}_t(t,\mu)$ - регулярная часть разложения, а $\Pi X_t(\tau,\mu)$ - пограничная функция, описывающий поведение решения на $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$. Для пограничной функции $\Pi X_t(\tau,\mu)$ здесь введена новыая независимая ("растянутая") переменная $\tau = t / \mu$.

Кроме того, будем предполагать возможность разложения функции b, σ в виде сходящихся рядов в окрестности точки $t = 0$

$$b(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu^k b_k, \; \sigma(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu^k \sigma_k, \quad (12)$$

$$b(\tau) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi b_k, \sigma(\tau) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi \sigma_k. \quad (13)$$

3.2. Члены асимптотики

Подставим разложения (11)-(13) в уравнение и краевые условия задачи Коши (6) и приравняем члены, стоящие при одинаковых степенях μ, таким образом, чтобы получить краевые задачи для определения членов разложения (11) соответствующей задачи.

При этом на пограничную функцию ΠX_{tk} мы накладываем такие дополнительные условия, которые обеспечивают стремление этой функций к нулю вне пограничного слоя, т. е. $\Pi X_{tk}^{\infty} \to 0$, $k = 0,1,2,\ldots$ при $\mu \to 0$ и фиксированном t.

В нулевом приближении мы получим систему такого вида:

$$\begin{cases} L\bar{X}_{t0} = 0, \\ \bar{X}_{t0}(0) = \bar{X}_0, \end{cases} \quad (14)$$

которая совпадает с задачей (7).

В первом приближении система выглядит так:

$$\begin{cases} L\overline{X}_{t1} = -\dfrac{1}{2!}D^2\overline{X}_{t0}, \\ L_{\infty}^{\Pi}\Pi X_{t1} = 0, \\ D^n(\overline{X}_{t1}(0) + \Pi X_{t1}(0)) = \overline{X}_n, \\ \Pi X_{t1}(\tau) \to 0, \\ n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{15}$$

$$L_{\infty}^{\Pi} = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{d^p}{d\tau^p}.$$

В случае $k > 1$ для задач (6) мы получим системы уравнений и дополнительные условия для нахождения такого вида:

$$\begin{cases} L\overline{X}_{tk} = -h_k, \\ L_{\infty}^{\Pi}\Pi X_{tk} = \Pi b_{k-1} + \Pi\sigma_{k-1}W_t, \\ D^n(\overline{X}_{tk}(0) + \Pi X_{tk}(0)) = \overline{X}_n, \\ \Pi X_{t1}(\tau) \to 0, \\ n = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \tag{16}$$

$$h_k = \sum\nolimits_{p=1}^{k}\frac{1}{p!}D^p\overline{X}_{tk-p}.$$

Таким образом, описанный алгоритм позволяет найти асимптотическое решение задач (6) для любого порядка j.

Аналогичные выкладки можно провести для задачи Коши (9). В нулевом приближении мы получим систему такого вида:

$$\begin{cases} L\overline{X}_{t0}^{m} = 0, \\ \overline{X}_{t0}^{m}(0) = \overline{X}_0, \end{cases} \tag{17}$$

которая совпадает с задачей (7). В первом приближении система выглядит так:

$$\begin{cases} L\overline{X}_{t1}^{m} = -\dfrac{1}{2!}D^2\overline{X}_{t0}^{m}, \\ L_{m}^{\Pi}\Pi X_{t1}^{m} = 0, \\ D^n(\overline{X}_{t1}^{m}(0) + \Pi X_{t1}^{m}(0)) = \overline{X}_n, \\ \Pi X_{t1}^{m}(\tau) \to 0, \\ n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{18}$$

$$L_{m}^{\Pi} = \sum\nolimits_{k=1}^{m}\frac{1}{p!}\frac{d^p}{d\tau^p}.$$

В случае $k > 1$ для задач (9) мы получим системы уравнений и дополнительные условия для нахождения такого вида:

$$\begin{cases} L\overline{X}_{tk}^{m} = -h_k^m, \\ L_{m}^{\Pi}\Pi X_{tk}^{m} = \Pi b_{k-1} + \Pi\sigma_{k-1}W_t, \\ D^n(\overline{X}_{tk}^{m}(0) + \Pi X_{tk}^{m}(0)) = \overline{X}_n, \\ \Pi X_{t1}^{m}(\tau) \to 0, \\ n = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \tag{19}$$

где при $k \le m$

$$h_k^m = \sum\nolimits_{p=1}^{k}\frac{1}{p!}D^p\overline{X}_{tk-p}^{m},$$

при $k > m$

$$h_k^m = \sum\nolimits_{p=1}^{m}\frac{1}{p!}D^p\overline{X}_{tk-p}^{m}.$$

4. Заключение

В данной работе представлен алгоритм построения асимптотических решений сингулярно возмущенного стохастических дифференциального уравнения бесконечного порядка. На основе этого алгоритма имеется возможность нахождения асимптотического приближения решения задачи Коши для сингулярно возмущенного стохастических дифференциального уравнения как бесконечного порядка, так и конечного порядка m, что позволяет в дальнейшем применить численные алгоритмы для приближенного поиска решения таких уравнений.

Литература

1. Кабанов Ю.М., Пергаменщиков С.М. Сингулярные возмущения стохастических дифференциальных уравнений. Матем. сб. Том 181, № 9, 1990. — С.1170-1182.
2. Кабанов Ю.М., Пергаменщиков С.М. О сингулярно возмущенных стохастических дифференциальных уравнениях и уравнениях в частных производных. ДАН СССР. Том 311, № 5. 1990. — С.1039 - 1042.
3. Пергаменщиков С.М. Асимптотические разложения для моделей с быстрыми и медленными переменными, описываемые сингулярно возмущенными системами стахостических дифференциальных уравнений. УМН, Том 49, № 4. 1994. — С.3 - 46.

References

1. Berglund N., Gentz B. Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations // Journal of Differential Equations. — 2003. —Vol. 191, No 1. — C.1–54.
2. Carroll C., Tokuoka K., Wu W. The Method of Moderation for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems. — Paper provided by Society for Economic Dynamics in its series 2012 Meeting Papers with number 1102.
3. Marti K. Stochastic optimization methods. — Springer, Berlin Heidelberg, 2005. — ISBN: 978-3-662-46214-0.
4. Kabanov Yu.M., Pergamenshchikov S.M. Optimal control of singularly perturbed linear stochastic systems // Stochastics and Stoch. Rep. — 1991. —Vol.36 — C.109 – 135.
5. Kabanov Yu.M., Pergamenshchikov S.M., Stoyanov J.M. Asymptotic expansions for singularly perturbed stochastic differential equations // Stochastics and Stoch. Rep. – New Trend in Probability and Statistics, Proc. of the Bakuriani Coll. in Honour Yu.V. Prokhorov. V. 1, eds. V.V. Sazonov, T.L. Shervashidze, Mokslas, Vilnius; VSP, Utrecht, 1991. — pp. 413 – 435.
6. Stein, Jerome L. Stochastic Optimal Control, International Finance, and Debt Crises. – Oxford University Press, 2006. — ISBN: 978-0-199-28057-5.
7. Korobeinik Ju. Differential equations of infinite order and infinite systems of differential equations. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Vol. 34, 1970. — pp. 881 – 922.
8. Krasnoselsky M.A., Zabreyko P.P. Geometrical methods of nonlinear analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
9. Lomov S. A. The construction of asymptotic solutions of certain problems with parameters. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Vol. 32, 1968. — pp. 884 – 913.
10. Persidsky K.P. Izv. AN KazSSR, Ser. Mat. Mach., Issue 2, 1948. — pp. 3 – 34.
11. Skorokhod A. On infinite systems of stochastic differential equations // Methods Funct. Anal. Topology. Vol. 5, No. 4, 1999. — pp. 54 – 61.
12. Tihonov A. N. Uber unendliche Systeme von Differentialgleichungen. Rec. Math. Vol. 41, Issue 4, 1934. — pp. 551 – 555.
13. Tihonov A. N. Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. Mat. Sbornik N. S. Vol. 31, Issue 73, 1952. — pp. 575 – 586.
14. Vasil'eva A. B. Asymptotic behaviour of solutions of certain problems for ordinary non-linear differential equations with a small parameter multiplying the highest derivatives. Uspehi Mat. Nauk. Vol. 18, Issie 111, no. 3 , 1963. — pp. 15 – 86.
15. Zhautykov O. A. On a countable system of differential equations with variable parameters. Mat. Sb. (N.S.). Vol. 49, Issue 91, 1959. — pp. 317 – 330.
16. Zhautykov O. A. Extension of the Hamilton-Jacobi theorems to an infinite canonical system of equations. Mat. Sb. (N.S.). Vol. 53, Issue 95, 1961. — pp. 313 – 328.

Поступила 21.10.2016

Об авторах:

Васильев Сергей Анатольевич, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов, кандидат физико-математических наук, svasilyev@sci.pfu.edu.ru;

Коршок Евгения Олеговна, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов, eokorshok@gmail.com.