

УДК 517.923

DOI 10.25559/SITITO.2017.4.525

Юмагулов М.Г., Белова А.С.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

**АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА МАТЛАВ****Аннотация**

В статье приводятся основные этапы алгоритма построения областей устойчивости динамических систем, описываемых линейной гамильтоновой системой вида  $x' = A(t, \alpha, \beta)x$ . Алгоритм основан на методах теории нелинейных колебаний исследования устойчивости стационарных решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, зависящих от малого параметра. Алгоритм реализован с помощью математического пакета Matlab. В качестве приложения рассмотрена задача построения области устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

**Ключевые слова**

Гамильтоновы системы; устойчивость; область устойчивости; периодические решения; параметр; задача трех тел.

Yumagulov M.G., Belova A.S.

Bashkir State University, Ufa, Russia

**THE ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING THE BOUNDARIES OF THE STABILITY REGIONS OF LINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS BY USING MATLAB****Abstract**

The article presents the main stages of the algorithm for constructing the stability regions of dynamical systems described by a linear Hamiltonian system of the form  $x' = A(t, \alpha, \beta)x$ . The algorithm is based on the methods of the theory of nonlinear oscillations of stability studies of stationary solutions of linear differential equations with periodic coefficients depending on a small parameter. The algorithm is implemented by using Matlab CAS. As an application, we have solved the problem of constructing the stability region of libration points of a flat elliptic restricted three-body problem in detail.

**Keywords**

Hamiltonian systems; stability; the stability region; periodic solutions; parameter; the three-body problem.

**Введение**

В статье рассматривается линейная гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N} \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta$  — скалярные параметры, матрица  $A(t, \alpha, \beta)$  является непрерывной и  $T$ -периодической по  $t$ :  $A(t + T, \alpha, \beta) = A(t, \alpha, \beta)$ . Уравнение (1) при всех значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  имеет точку равновесия  $x = 0$ , которая при одних значениях параметров может быть устойчивой по Ляпунову, а при других — неустойчивой.

Пусть все мультипликаторы системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha_0, \beta_0)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N} \quad (2)$$

по модулю равны 1. Возможны два основных случая:

- 1) все мультипликаторы являются простыми и при этом ни один из них не равен 1 либо -1;
- 2) имеются кратные мультипликаторы (кратности 2) равные 1 либо -1, остальные являются простыми.

В первом случае при всех значениях  $(\alpha, \beta)$  близких к  $(\alpha_0, \beta_0)$  система (1) является устойчивой. Во втором случае происходит изменение характера устойчивости в

окрестности точки  $(\alpha_0, \beta_0)$ . А именно, как правило, в плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  через точку  $(\alpha_0, \beta_0)$  проходят одна или несколько гладких кривых, которые образуют границу областей устойчивости и неустойчивости (см. Рис. 1).

Ниже через  $\Pi$  будем обозначать плоскость параметров  $(\alpha, \beta)$ . Множество  $G \subset \Pi$  в плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  будем называть областью устойчивости системы (1), если для любых  $(\alpha, \beta) \in G$  точка равновесия  $x = 0$  системы (1) является устойчивой в линейном приближении, а для любых  $(\alpha, \beta) \in F = \Pi \setminus G$  эти точки неустойчивы в линейном приближении. При этом множество  $F$  будем называть областью неустойчивости системы (1). Точку  $(\alpha, \beta)$  будем называть граничной точкой области устойчивости системы (1) если в каждой ее окрестности имеются точки из  $G$  и  $F$ . Множество  $\Gamma$  граничных точек будем называть границей области устойчивости системы (1). Обратим внимание на то, что в приведённых здесь понятиях термины устойчивость и неустойчивость понимаются как устойчивость и неустойчивость точек равновесия в линейном приближении.

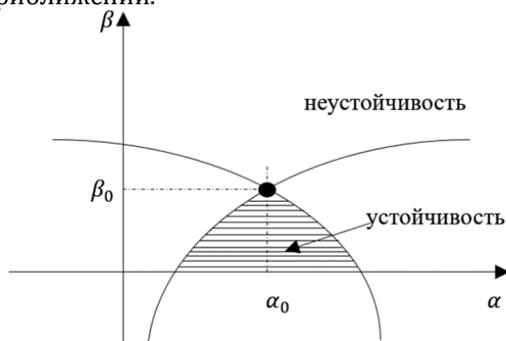


Рис. 1. Граничные кривые, проходящие через точку  $(\alpha_0, \beta_0)$

Задачи о построении и изучении границ областей устойчивости, об исследовании поведения динамических систем при переходе параметров через эти границы являются важными и интересными задачами теории управления и регулирования, теории динамических систем, теории нелинейных колебаний и их многочисленных приложений. Исследованию таких задач посвящена обширная литература; здесь предложен ряд эффективных методов исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см. [1] - [5] и имеющуюся там библиографию). Исследования активно продолжаются в различных направлениях (см., например, [6] - [8]).

Вопросы построения границ областей устойчивости системы (1) являются сложными

как в теоретическом плане, так и с вычислительной точки зрения, так как они приводят к необходимости сложных расчетов, вызванных, в первую очередь, неавтономностью и гамильтоновостью основных уравнений задачи.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм определения границ областей устойчивости системы (1), основанный на модификации метода М.Розо [8] и формулах теории возмущений линейных операторов. В качестве приложения рассмотрена задача о построении границ областей устойчивости точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. Предлагаемая схема использует систему компьютерной математики Matlab.

### Алгоритм построения области устойчивости

Пусть все мультипликаторы системы (2) по модулю равны 1. Пусть, далее, система (2) имеет кратный мультипликатор (кратности 2), равный 1 или -1, а остальные ее мультипликаторы являются простыми. В этом случае, как отмечалось выше, в плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  через точку  $(\alpha_0, \beta_0)$  проходят одна или несколько гладких кривых, которые образуют границу областей устойчивости и неустойчивости (см. Рис. 1).

Приведем основные этапы алгоритма построения границ области устойчивости точки равновесия  $x = 0$  системы (1). Для простоты ограничимся рассмотрением ситуации, когда система (1) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + (\alpha - \alpha_0)B_1(t) + (\beta - \beta_0)B_2(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N} \quad (3)$$

где  $A_0$  - постоянная матрица,  $B_1(t)$  и  $B_2(t)$  - непрерывные и  $T$ -периодические матрицы. Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, но требует более громоздких построений. Пусть матрица  $A_0$  имеет пару собственных значений  $\frac{\pi i}{T}$ , а остальные ее собственные значения также являются чисто мнимыми, но не кратны числу  $\frac{\pi i}{T}$ . Ниже для простоты будем считать, что  $T=2\pi$ .

Граничную кривую системы (3) будем строить как функцию  $\beta = \beta_0 + f(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon = \alpha - \alpha_0$  и  $f(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon + \phi(\varepsilon)$  и  $\phi(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Приводимая ниже схема построения границ областей устойчивости системы (1) позволяет получить более полные формулы для представления функций  $f(\varepsilon)$ , а именно, вида:  $f(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \varepsilon^2 + \dots + \gamma_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1})$ , при этом указывается алгоритм вычисления значений коэффициентов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

Этап 1. Произведем в системе (3) замену  $\beta = \beta_0 + f(\varepsilon)$  и  $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ , которая позволит перейти к дифференциальному уравнению, зависящему от малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N} \quad (4)$$

где  $A_1(t)$  – непрерывная  $2\pi$ -периодическая матрица.

Свойства устойчивости решения  $x = 0$  уравнения (3) зависит от мультипликаторов матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1(t)$ . К сожалению, явное построение мультипликаторов матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1(t)$  возможно лишь в самых простых случаях; исследованию этого вопроса посвящены работы многих авторов [1, 2].

Этап 2. Одним из эффективных способов исследования устойчивости решения  $x = 0$  уравнения (3) является предложения М.Розо [8] схема перехода к равносильному уравнению вида

$$y' = (A_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2(t, \varepsilon))y,$$

где матрица  $S_1$  – некоторая специально конструируемая постоянная матрица. А именно, матрица  $S_1$  является решением матричного уравнения

$$\int_0^{2\pi} e^{-A_0\tau} S_1 e^{A_0\tau} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{-A_0\tau} A_0 e^{A_0\tau} d\tau \quad (5)$$

Известно, что уравнение (5) имеет единственное решение  $S_1$  тогда и только тогда, когда для матрицы  $A_0$  выполняется условие отсутствия  $T$  – резонанса т.е. любая пара  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  различных собственных значений матрицы  $A_0$  удовлетворяет соотношению  $\lambda_i - \lambda_j \neq \frac{2\pi qi}{T}$ ,  $i$  – мнимая единица,  $q$  – целое число.

На втором этапе выясняется выполнено ли для матрицы  $A_0$  условие отсутствия  $T$  – резонанса. Если оно не выполняется, то предлагается алгоритм перехода к равносильному уравнению, для которого это условие выполнено.

Этап 3. Решается матричное уравнение (5). Его решение зависит от параметра  $\gamma_1$ , определяющее искомую границу (точнее, касательную к границе) области устойчивости. Пусть  $S_1^*(\gamma_1)$  – это решение уравнения (5).

Этап 4. Найдём собственные значения матрицы  $S_1^*(\gamma_1)$ . Тогда искомыми будут те значения  $\gamma_1$ , при которых эта матрица будет иметь нулевые собственные значения.

**Приложение: плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел**

В качестве приложения рассмотрим плоскую ограниченную эллиптическую задачу трех тел. В этой задаче изучается движение тела  $P_2$  малой массы  $m_2$  под действием ньютоновского притяжения тел  $P_0$  и  $P_1$ , обладающих конечными

массами  $m_0$  и  $m_1$ :  $m_2 \ll m_1 < m_0$ . Движение третьего тела  $P_2$  в указанной задаче в координатах Нехвилла  $(\xi, \eta)$  описывается неавтономной системой с  $2\pi$ -периодической правой частью вида (см., например, [4 – 6]):

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \rho \left( \xi - \mu + \frac{(\mu-1)\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\mu(\xi-1)}{((\xi-1)^2+\eta^2)^{3/2}} \right), \\ \eta'' - 2\xi' = \rho \left( \eta + \frac{(\mu-1)\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\mu\eta}{((\xi-1)^2+\eta^2)^{3/2}} \right); \end{cases} \quad (6)$$

где  $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon \cos t}$ ,  $\mu = \frac{m_1}{m_0+m_1}$ ,  $\varepsilon$  – эксцентриситет кеплеровской орбиты ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ),  $t$  – истинная аномалия,  $m_0$  и  $m_1$  – массы активно гравитирующих тел ( $0 < m_1 \leq m_0$ ),  $\mu$  – параметр масс ( $0 < \mu < 1$ ). Штрихами обозначены производные по  $t$ . Система (6) является гамильтоновой.

Система (6) имеет пять постоянных решений – точек либрации: прямолинейных  $L_1, L_2, L_3$  и треугольных  $L_4, L_5$ . Треугольные точки либрации:  $L_4 \left( \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ,  $L_5 \left( \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Нас будет интересовать зависимость свойства устойчивости решений от параметров  $\mu$  и  $\varepsilon$  в окрестности точки либрации  $L_4$ .

Вопросам построения областей устойчивости треугольных точек либрации посвящены многочисленные исследования. Известные здесь наиболее полные результаты были получены во второй половине прошлого столетия (см. [6] и имеющуюся там библиографию). Исследования в указанном направлении активно продолжают (см., например, [6, 7, 10 – 13]).

Приведем схему построения границ областей устойчивости треугольных точек либрации на основе вышеприведенного алгоритма с использованием пакета Matlab. Приводимые ниже формулы получены с помощью аппарата символьных вычислений этого пакета, т.е. являются точными.

Отметим, что граница области устойчивости треугольных точек либрации в плоскости параметров  $(\mu, \varepsilon)$  образована тремя непрерывными линиями  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ . Кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  начинаются в точке  $(\mu_0, 0)$ , а кривая  $\Gamma_3$  – в точке  $(\mu^*, 0)$ ; здесь  $\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,028595 \dots$ ,  $\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0,038520$ .

**Переход к основному уравнению**

Рассматриваемая задача может быть (см. [12]) сведена к изучению гамильтонова уравнения

$$h' = A(\varepsilon, \mu, t)h, \quad h \in \mathbb{R}^4, \quad (7)$$

где

$$A(\varepsilon, \mu, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4}\rho & \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & \frac{9}{4}\rho & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

При этом матрица  $A(\varepsilon, \mu, t)$  представима в виде:  $A(\varepsilon, \mu, t) = A_0(\mu) + (-\varepsilon \cos t + \varepsilon^2 \cos^2 t - \dots)A_1(\mu)$ , где

$$A_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом мы перейдем к уравнению вида

$$h' = A_0(\mu)h + (-\varepsilon \cos t + \varepsilon^2 \cos^2 t)A_1(\mu)h + \varepsilon^3 A_3(\varepsilon, \mu, t), \quad h \in \mathbb{R}^4 \quad (8)$$

$A_3(\varepsilon, \mu, t) = -\frac{\cos^3 t}{1+\varepsilon \cos t} A_1(\mu)$ , матрица  $A_3$  является  $2\pi$ -периодичной и непрерывной по  $t$ . Система (8) является системой вида (3) и поэтому для нее применим вышеприведенный алгоритм. Ограничимся приведением лишь основных результатов для кривой  $\Gamma_3$ .

### Построение кривой $\Gamma_3$

Покажем, что уравнение (8) определяет в точности одну гладкую кривую  $\Gamma_3$ , начинающуюся в точке  $(\mu^*, 0)$  и состоящей из граничных точек области устойчивости системы (8).

Зафиксируем число  $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$  и рассмотрим прямую, заданную уравнениями в параметрической форме:  $\mu = \mu^* + \delta \cos \varphi, \varepsilon = \delta \sin \varphi$ , где  $\delta$  - вспомогательный параметр. В плоскости  $(\mu, \varepsilon)$  эта прямая является касательной к кривой  $\Gamma_3$  и проходит через точку  $(\mu^*, 0)$ , образуя с осью  $\mu$  угол  $\varphi$ . Опишем этапы построения этой касательной.

Шаг 1. Подставим уравнения указанной прямой в (8) и перейдем к зависящему от малого параметра  $\delta$  и угла  $\varphi$  уравнению

$$h' = (A_0 + \delta P_1(t, \varphi) + \delta^2 P_2(t, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2))h + \delta^3 P_3(t, \delta, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2)h, \quad h \in \mathbb{R}^4 \quad (9)$$

где  $P_1(t, \varphi) = \cos \varphi B_0 - \sin \varphi \cos t A_1$ ,  $P_2(t, \varphi, \varepsilon_1, \mu_1) = -\sin \varphi \cos \varphi \cos t B_0 + \sin^2 \varphi \cos^2 t A_1$ , а матрица  $P_3(t, \delta, \varphi)$  является  $2\pi$ -периодичной по  $t$  и непрерывной. Подсчет показывает, что верны равенства:

$$A_0 = A_0(\mu^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 2 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = A_1(\mu^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Найдем собственные вектора матрицы  $A_0$ , соответствующие ее ненулевым собственным значениям:  $\lambda_{1,2} = \frac{i}{\sqrt{2}}, \lambda_{3,4} = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ . Заметим, что перечисленные собственные значения удовлетворяют соотношению  $\lambda_i - \lambda_j \neq qi$  при  $q \in \mathbb{Z}$ , поэтому  $2\pi$ -резонанс отсутствует.

Шаг 3. Построим матрицу  $Q$  из собственных векторов.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}(-8 - i\sqrt{46}) & \frac{1}{25}(32i\sqrt{2} - 18\sqrt{23}) & \frac{1}{5}(-8 + i\sqrt{46}) & \frac{1}{25}(-32i\sqrt{2} - 18\sqrt{23}) \\ \frac{i\sqrt{2}}{5(4i\sqrt{2} - \sqrt{23})} & \frac{2}{25} & \frac{-i\sqrt{2}}{5(-4i\sqrt{2} - \sqrt{23})} & \frac{2}{25} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Произведём замену  $h = Qu$  и перейдем от (9) к равносильному уравнению

$$u' = (\hat{A}_0 + \delta \hat{P}_1(t, \varphi) + \delta^2 \hat{P}_2(t, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2) + \delta^3 \hat{P}_3(t, \delta, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2))u, \quad u \in \mathbb{R}^4 \quad (10)$$

где  $\hat{P}_1(t, \varphi) = \cos \varphi \hat{B}_0 - \sin \varphi \cos t \hat{A}_1$ ,  $\hat{P}_2(t, \varphi, \varepsilon_1, \mu_1) = -\sin \varphi \cos \varphi \cos t \hat{B}_0 + \sin^2 \varphi \cos^2 t \hat{A}_1$ ;

$$\hat{A}_0 = Q^{-1}A_0Q = \begin{pmatrix} -i/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i/2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_1 = Q^{-1}A_1Q = \begin{pmatrix} \frac{i(23\sqrt{2} + 2i\sqrt{23})}{20} & \frac{3(19 + 3i\sqrt{46})}{50} & \frac{i(\sqrt{2} + 6i\sqrt{23})}{20} & \frac{-i(-39i + 7\sqrt{46})}{50} \\ 1 & \frac{-13i\sqrt{2} + 2\sqrt{23}}{20} & \frac{2 + i\sqrt{46}}{10} & \frac{3(19 - 3i\sqrt{46})}{50} \\ \frac{-i(\sqrt{2} - 6i\sqrt{23})}{20} & \frac{i(39i + 7\sqrt{46})}{50} & \frac{-i(23\sqrt{2} - 2i\sqrt{23})}{20} & 1 \\ \frac{(2 - i\sqrt{46})}{10} & \frac{-31i\sqrt{2} - 6\sqrt{23}}{100} & 1 & \frac{13i\sqrt{2} + 2\sqrt{23}}{20} \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = Q^{-1}B_0Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}i\sqrt{3}(2i + \sqrt{46}) & \frac{27}{50}(i\sqrt{6} + \sqrt{69}) & \frac{3}{20}\sqrt{3}(18 - i\sqrt{46}) & \frac{3}{50}(41i\sqrt{6} + 9\sqrt{69}) \\ \frac{3\sqrt{69}}{8} & \frac{3}{40}\sqrt{3}(4 - 7i\sqrt{46}) & \frac{-3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}(8i + \sqrt{46}) & \frac{3}{40}\sqrt{3}(36 - 7i\sqrt{46}) \\ \frac{3}{20}\sqrt{3}(18 + i\sqrt{46}) & \frac{3}{50}(-41i\sqrt{6} + 9\sqrt{69}) & \frac{-3}{20}i\sqrt{3}(-2i + \sqrt{46}) & \frac{27}{50}(-i\sqrt{6} + \sqrt{69}) \\ \frac{-3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}(-8i + \sqrt{46}) & \frac{3}{40}\sqrt{3}(36 + 7i\sqrt{46}) & \frac{3\sqrt{69}}{8} & \frac{3}{40}\sqrt{3}(4 + 7i\sqrt{46}) \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Метод М. Розо позволяет с помощью замены  $y = (I - \delta H_1(t))z$  с  $2\pi$ -периодической матрицей  $H_1(t)$  перейти от (10) к системе

$$z' = \left( \hat{A}_0 + \delta S_1(\varphi) + \delta^2 S_2(\varphi, \mu_2, \varepsilon_2) + \delta^3 S_3(t, \varphi, \mu_2, \varepsilon_2) \right) z, z \in \mathbb{R}^4 \quad (11)$$

с постоянными матрицами  $S_1, S_2$  и непрерывной  $2\pi$ -периодической матрицей  $S_3$ . Свойства устойчивости системы (11) (а значит, и треугольных точек либрации в линейном приближении исходной системы (8)) можно определить с помощью постоянной матрицы  $\hat{A}_0 + \delta S_1(\varphi) + \delta^2 S_2(\varphi, \mu_2, \varepsilon_2)$ .

Шаг 5. В соответствии с методом М. Розо рассмотрим матричное уравнение

$$\int_0^{2\pi} e^{-\hat{A}_0 t} S_1 e^{\hat{A}_0 t} dt = \int_0^{2\pi} e^{-\hat{A}_0 t} \hat{P}_1(t, \varphi) e^{\hat{A}_0 t} dt \quad (12)$$

По решению этой системы построим матрицу (ненулевые элементы которой совпадают с соответствующими элементами решения системы (12)).

Шаг 6. Найдём собственные значения матрицы  $S_1^*(\varphi)$ :

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{1}{16} \left( \pm 3\sqrt{138}\cos\varphi \pm \sqrt{6} \sqrt{-63\cos^2\varphi + 32\sqrt{69}\cos\varphi\sin\varphi} \right).$$

Шаг 7. Определим, при каком значении  $\varphi$  полученные собственные значения будут равняться 0. Отсюда получим значение  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, касательная к кривой  $\Gamma_3$  проходит через  $(\mu^*, 0)$  и образует угол  $90^\circ$  с осью  $O\mu$ .

По аналогичной схеме могут быть найдены и последующие приближения к кривой  $\Gamma_3$ . В частности, приведенный алгоритм позволяет установить, что кривая кривой  $\Gamma_3$  описывается функцией  $\varepsilon = f_3(\delta)$ , где  $\delta = \mu - \mu^*$  и  $f_3(\delta) = \zeta_1\sqrt{\delta} + \psi_3(\delta)$ ; здесь

$$S_1^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{3(2\sqrt{3}\cos\varphi - i\sqrt{138}\cos\varphi)}{20} & \frac{27i\sqrt{6}\cos\varphi + 27\sqrt{69}\cos\varphi + 100\sin\varphi}{50} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{69}\cos\varphi}{8} & \frac{3i(4i\sqrt{3}\cos\varphi + 7\sqrt{138}\cos\varphi)}{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(2\sqrt{3}\cos\varphi + i\sqrt{138}\cos\varphi)}{20} & \frac{-27i\sqrt{6}\cos\varphi + 27\sqrt{69}\cos\varphi + 100\sin\varphi}{50} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{69}\cos\varphi}{8} & \frac{3i(-4i\sqrt{3}\cos\varphi + 7\sqrt{138}\cos\varphi)}{40} \end{pmatrix} \quad (12)$$

### Литература

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 400 с.
2. Зигель К.Л., Мозер Ю.К. Лекции по небесной механике - Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. - 384 с.
3. Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем. // УМЖ. 2016. - №3. - С.59 - 81.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1975. 740 с.
5. Като А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО. 2005. 464 с.
6. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. Маршал К. Задача трех тел. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 640 с.
8. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1971. 288 с.
9. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир,

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{\frac{621}{4}} = 3,529863 \dots,$$

а нелинейность  $\psi_3(\delta)$  удовлетворяет соотношению:  $\psi_3(\delta) = O(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

На Рис. 2 приведен вид кривых, образующих границы области устойчивости треугольных точек либрации системы (8). Изображенные кривые получены в соответствии с предложенным алгоритмом с использованием формул, содержащих вторые приближения.

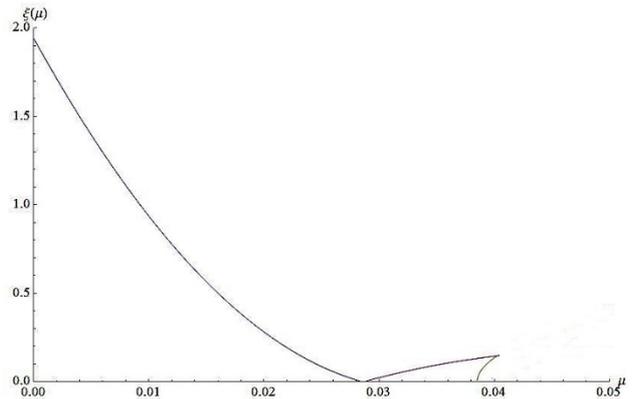


Рис.2. Граница области устойчивости треугольных точек либрации

### Заключение

В статье были приведены основные этапы нового алгоритма построения границ областей устойчивости для линейных гамильтоновых систем вида  $x' = A(t, \alpha, \beta)x$ . Разработанный алгоритм реализован с помощью системы компьютерной математики Matlab. В качестве приложения рассмотрена задача о построении областей устойчивости в линейном приближении треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

1964. - 477 с.
10. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел. // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 6. С. 82-89.
  11. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркация 4-π периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. // Астрономический журнал. 2009. Т. 86, № 2. С. 170-174.
  12. Юмагулов М.Г., Сухоруков А. В. Алгоритмы построения границ областей устойчивости точек либрации в задаче трех тел с помощью пакета Maple.// Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2016. Т. 12, № 4. С. 181-188.
  13. Kovacs T. Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. - Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 430. Issue 4. Pp. 2755-2760.
  14. Chiang H.:D., Alberto L.:F. C., Stability regions of nonlinear dynamical systems : theory, estimation, and applications. - Cambridge University Press. 2015. 484 p.

## References

1. Arnol'd V.:I., Kozlov V.:V., Nejshtadt A.:I. Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differencial'nykh uravnenij. - Izhevsk: NIC Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, 2000. 400 s.
2. Zigel' K.:L., Mozer Ju.:K. Lekcii po nebesnoj mehanike - Izhevsk: NIC Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, 2001. - 384 s. Associate-
3. Ibragimova L.:S., Mustafina I.:Zh., Jumagulov M.:G. Asimptoticheskie formuly v zadache postroeniya oblastej giperbolichnosti i ustojchivosti dinamicheskikh sistem. // UMZh. 2016. - №3.- S.59 - 81.
4. Kato T. Teorija vozmushhenij linejnykh operatorov. - M.: Mir, 1975. 740 c.
5. Katok A.:B., Hasselblat B. Vvedenie v teoriju dinamicheskikh sistem. M.: MCNMO. 2005. 464 c.
6. Markeev A.:P. Točki libracij v nebesnoj mehanike i kosmodinamike. M.: Nauka, 1978. 312 c.
7. Marshal K. Zadacha treh tel. M.-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij. 2004. 640 s.
8. Rozo M. Nelinejnye kolebanija i teorija ustojchivosti. M.: Nauka. Glav. red. fiz.-mat. lit., 1971. 288 c.
9. Chezari L. Asimptoticheskoe povedenie i ustojchivost' reshenij obyknovennykh differencial'nykh uravnenij. - M.: Mir, 1964. - 477 s.
10. Yumagulov M.G., Belikova O.N. Bifurkatsiya 4π-periodicheskikh reshenij ploskoy ogranichennoy ellipticheskoy zadachi trekh tel. // Astronomicheskij zhurnal. 2009. Т. 86, № 2. С. 170-174.
11. Yumagulov M.G., Belikova O.N. Bifurkatsii periodicheskikh reshenij v okrestnostyakh treugol'nykh toček libratsii zadachi trekh tel. // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Matematika. 2010. № 6. С. 82-89.
12. Yumagulov M.G., Sukhorukov A. V. Algoritmy postroeniya granic oblastej ustojchivosti toček libracii v zadache treh tel s pomoshh'ju paketa Maple.// Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie, 2016. Т. 12, № 4. С. 181-188.
13. Kovacs T. Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. - Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 430. Issue 4. Pp. 2755-2760.
14. Chiang H.:D., Alberto L.:F. C., Stability regions of nonlinear dynamical systems : theory, estimation, and applications. - Cambridge University Press. 2015. 484 p.

Поступила: 15.10.2017

### Об авторах:

**Юмагулов Марат Гаязович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, [yum\\_mg@mail.ru](mailto:yum_mg@mail.ru)

**Белова Анна Сергеевна**, магистрант факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, [89177662488@yandex.ru](mailto:89177662488@yandex.ru)

### Note on the authors:

**Yumagulov Marat G.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Differential Equations of the Faculty of Mathematics and Information Technology, Bashkir State University, [yum\\_mg@mail.ru](mailto:yum_mg@mail.ru)

**Belova Anna S.**, graduate of the Faculty of Mathematics and Information Technology, Bashkir State University, [89177662488@yandex.ru](mailto:89177662488@yandex.ru)