

УДК 517.958

DOI 10.25559/SITITO.2017.3.504

**Беляков Д.В.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ПОТОКЕ СРЕДЫ****Аннотация**

*Работа посвящена построению и исследованию математической модели тела сложной конфигурации, совершающего автоколебания в потоке квазистатической среды под действием аэродинамических сил. Установлено нарушение единственности при определении угла атаки в некоторых положениях тела. Построена зависимость угла атаки от фазовых переменных для определенной пластинки и указана граница области неоднозначности. Указано, что при определении угла атаки нужно исходить из его непрерывности. Проведено исследование устойчивости состояния покоя. Показано, что аэродинамические силы носят ускоряющий характер и в результате взаимодействия со средой рассматриваемое тело может совершать в потоке среды колебания с растущей амплитудой. Предложены программы, позволяющие проводить численные исследования для того, подтвердить найденные режимы и оценить адекватность предложенной модели.*

**Ключевые слова**

*Тело сложной конфигурации, стационарный режим, устойчивость, установочный угол тела, флаттер.*

**Belyakov D.V.**

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

**STUDY OF THE SMALL FLUCTUATIONS OF THE BODY TO COMPLEX DESCSIDE IN FLOW OF THE AMBIENCE****Abstract**

*The work is devoted to the construction and investigation of a mathematical model of a body of a complex configuration that performs auto-oscillations in the flow of a quasi-static medium under the action of aerodynamic forces. A violation of uniqueness is determined in determining the angle of attack in certain positions of the body. The dependence of the angle of attack on the phase variables for a particular plate is plotted and the boundary of the ambiguity region is indicated. It is indicated that in determining the angle of attack, one must proceed from its continuity. The stability of the state of rest is investigated. It is shown that the aerodynamic forces are of an accelerating nature and, as a result of interaction with the medium, the body under consideration can perform oscillations with a growing amplitude in the medium flow. Proposed programs that allow carrying out numerical studies in order to confirm the regimes found and evaluate the adequacy of the proposed model.*

**Keywords**

*Work is dedicated to building and study to mathematical model of the fluctuations of the body to complex descside in flow квазистатической ambiances.*

**Введение**

Поиски, сопровождающие развитие техники, всегда сопряжены с риском принятия неверных решений, приводящих к авариям, а иногда и к катастрофам. Середина 30-х годов прошлого века стала периодом бурного развития авиации.

В это время по миру прокатилась волна аварий при испытаниях скоростных самолётов. В то время, наиболее острой проблемой был флаттер – один из видов автоколебаний, ведущих к разрушению самолета в воздухе, который возникал при увеличении скорости полета. С точки зрения теории колебаний летательный

аппарат представляет из себя автоколебательную систему, источником энергии в которой служит набегающий поток, на который реагирует конструкция самолета. При интенсивных колебаниях аэродинамические напряжения могут достигнуть разрушающих значений. М.В. Келдыш показал, что флаттер – это форма потери устойчивости он имеет резонансную природу. Был разработан метод расчета критической скорости флаттера. Чтобы избежать резонанса при движении крыла в воздушном потоке, он предложил соответствующим образом перераспределить массы вдоль крыла и так расположить упругие элементы, чтобы избежать совпадения собственных частот колебаний крыла с частотами вынуждающих внешних сил.

При детальном изучении флаттера почти во всех случаях обнаруживаются нелинейные аэродинамические эффекты. Однако в ряде ситуаций оказалось возможным успешно решить задачу на основе линейных аналитических подходов. Рассмотрим одну задачу, в которой можно использовать такие подходы.

**Постановка задачи**

Рассматривается задача о теле, представляющем из себя тонкую пластинку, установленную ортогонально стержню длины  $l$ . Тело закреплено в центре масс с помощью двух упругих элементов и совершает автоколебания в потоке среды (см. рисунок 1). Введем неподвижную систему координат  $XOY$ . Будем считать, что в положении покоя маятник занимает положение равновесия, в котором он ориентирован по потоку. Будем считать, что центр масс тела может двигаться только по вертикальной прямой, а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе  $F = -kx$  и возвращающему моменту  $M = -c\theta$

Аэродинамические силы, приложенные к телу приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины.

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку  $A$  можно считать подвижной относительно пластинки. Аналогичная задача, только с неподвижным центром давления рассматривалась в работе [1]. Сдвиг центра давления описывается функцией  $l(\alpha)$ , которая описывает расстояние между центром давления  $A$  и геометрическим центром пластинки  $G$ .

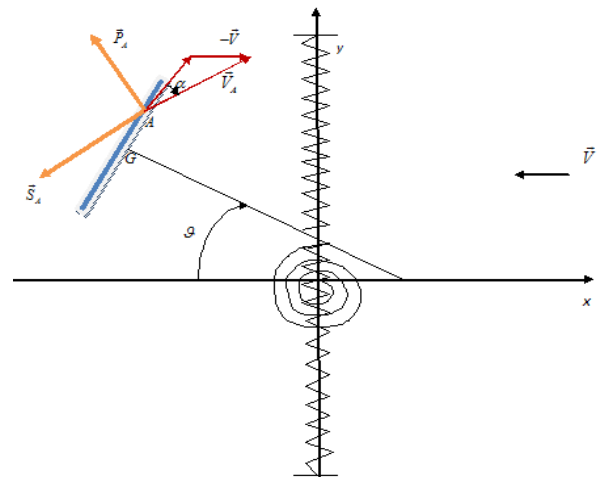


Рис. 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды

Зависимость  $l(\alpha)$  определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными [6]. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила сопротивления  $\vec{S}_A$ , направленная против скорости  $\vec{V}_A$  точки  $A$  относительно потока среды, и подъемная сила  $\vec{P}_A$ , направленные ей ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2,$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2,$$

здесь  $\alpha$  – угол атаки между вектором  $\vec{V}_A$  и пластинкой  $p, s$  – аэродинамические функции углов атаки,  $c_x, c_y$  – безразмерные аэродинамические функции,  $\rho$  – плотность воздуха,  $\sigma$  – площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций для разных форм пластинок приводится в [6]. Будем считать, что среда не влияет на стержень.

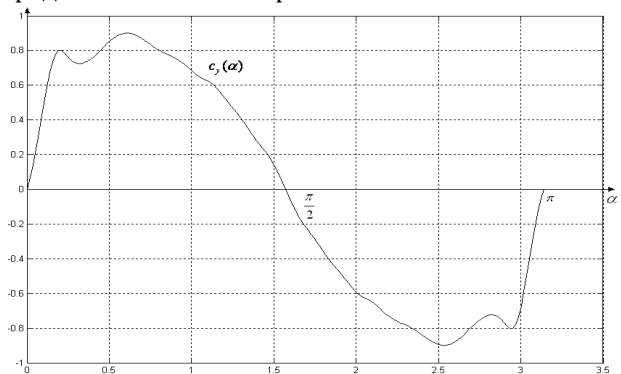


Рис. 2. Аэродинамическая функция подъемной силы

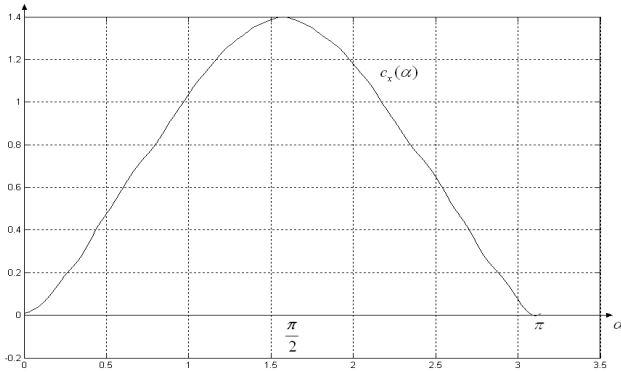


Рис. 3. Аэродинамическая функция силы сопротивления

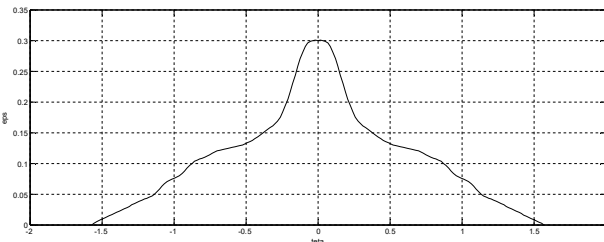


Рис. 4. Аэродинамическая функция сдвига центра давления

Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату  $y$  центра масс тела и угол  $\theta$  отклонения пластинки от горизонтали.

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось  $OY$  и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$m\ddot{y} = s(\alpha)V_A\dot{\theta} (l(\alpha)\cos\theta - r \sin\theta) - p(\alpha)V_A\dot{\theta} (r \sin\theta + l(\alpha)\cos\theta + V) - ky$$

$$J\ddot{\theta} = s(\alpha)V_A^2(rcos\alpha - l(\alpha)sin\alpha) - p(\alpha)V_A^2(rsina - l(\alpha)cosa) - c\theta \quad (1)$$

Кинематические соотношения, связывающие  $V_A$ ,  $\alpha$  с  $\theta, \dot{\theta}$ , имеют вид:

$$V_A \sin\alpha = l(\alpha)\dot{\theta} + V \cos\theta$$

$$V_A \cos\alpha = r\dot{\theta} + V \sin\theta \quad (2)$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(2).

Введем новые безразмерные переменные:

$$Y = \frac{y}{r} \text{ безразмерная координата центра масс}$$

$$\tau = \frac{V}{r} t \text{ безразмерное время;}$$

$$\Omega = \frac{r\dot{\theta}}{V} \text{ безразмерная угловая скорость;}$$

$$U = \frac{V_A}{V} \text{ безразмерная скорость центра}$$

давления

$$M = \frac{mr}{0.5\rho\sigma} \text{ безразмерная масса;}$$

$$K = \frac{kr}{0.5\rho\sigma V^2} \text{ безразмерный коэффициент}$$

жесткости пружины;

$C = \frac{c}{0.5\rho\sigma V^2}$  безразмерный коэффициент восстанавливающего момента пружины;

$$I = \frac{J}{0.5\rho\sigma b} \text{ безразмерный момент инерции;}$$

$e(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{r}$  безразмерная функция сдвига центра давления.

При переходе к новым безразмерным переменным уравнения (1) преобразуются к виду:

$$M\ddot{Y} = -c_y(\alpha)U\Omega(e(\alpha)\sin\theta - \cos\theta) + c_x(\alpha)U(\Omega(e(\alpha)\sin\theta - \cos\theta) + 1) - KY$$

$$I\ddot{\theta} = c_x(\alpha)U^2(\cos\alpha - e(\alpha)\sin\alpha) + c_y(\alpha)U^2(\sin\alpha - e(\alpha)\cos\alpha) - C\theta \quad (3)$$

После простых преобразований кинематические соотношения (2) будут иметь вид:

$$U \sin\alpha = e(\alpha)\Omega + \cos\theta,$$

$$U \cos\alpha = \Omega + \sin\theta.$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (3)-(4).

### Неоднозначность определения угла атаки

Математическая модель колебаний пластинки имеет кинематические соотношения (4). Казалось бы, определяя из них угол атаки, мы можем начать решать основные уравнения (3) с помощью численного интегрирования. Разделим первое уравнение соотношений (4) на второе и получим:

$$tg\alpha = \frac{e(\alpha)\Omega + \cos\theta}{\Omega + \sin\theta} \quad (5)$$

Получим, что угол атаки из соотношения (5) можно определить, решая нелинейное уравнение:

$$(\Omega + \sin\theta)tg\alpha - \cos\alpha = e(\alpha)\Omega \quad (6)$$

Приведем графическую интерпретацию некоторых результатов решений уравнения (6) для пластинки шириной один метр с удлинением  $\lambda = 8$ , при некоторых из которых нарушается единственность определения угла атаки из кинематических соотношений (4). Очевидно, что уравнение (6) представляет собой пересечение смещенных по вертикали и растянутых функций  $tg\alpha$  и  $e(\alpha)$ .

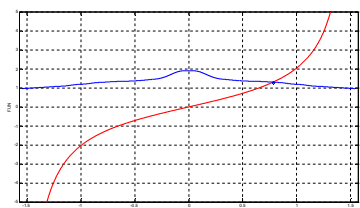
При выполнении условий:

$$\Omega > -\sin\theta, \Omega > 0 \text{ (Рис. 5 а);}$$

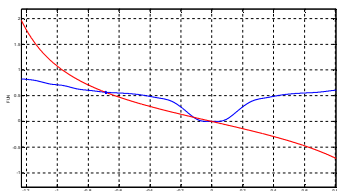
$$\Omega < -\sin\theta, \Omega < 0 \text{ (Рис. 5б)}$$

$$-\sin\theta < \Omega < 0 \text{ (Рис. 6 а)}$$

$$\Omega < -\sin\theta, \Omega < 0 \text{ (Рис. 6б)}$$

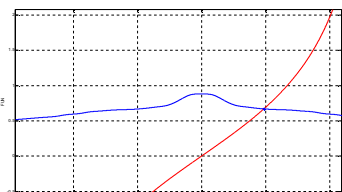


a)

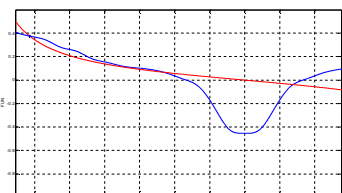


b)

Рис. 5. Неоднозначность углов атаки



a)



b)

Рис. 6. Неоднозначность углов атаки

При  $\Omega = 0$  (Рис. 4) Уравнение (6) имеет лишь

одно решение.

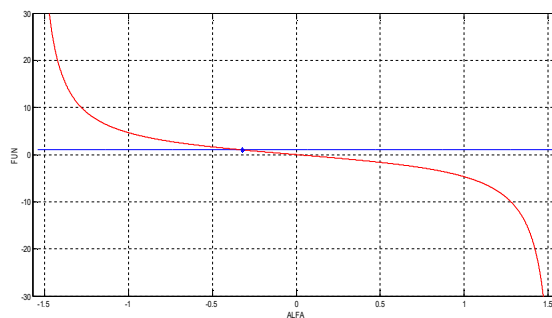


Рис. 4.

Если  $\Omega = -\sin\theta$  то уравнение (6) может иметь два решения (Рис. 5):

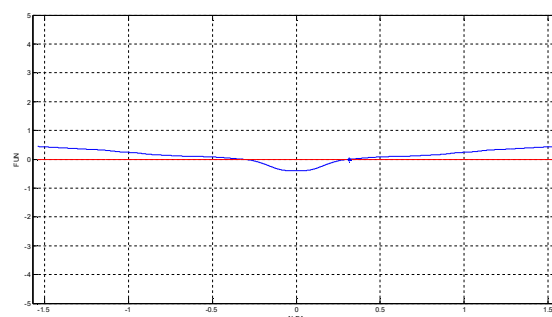


Рис. 5.

Таким образом, при определении угла атаки из нелинейного уравнения (6) возникает область неоднозначности. Границей этой области является кривая  $\Omega = -\sin\theta$ .

Изобразим, последовательно находя численное решение уравнения (6), поверхность  $\alpha = \alpha(\theta, \Omega)$  при различных значениях угла ориентации  $\theta$  и  $\Omega$ .

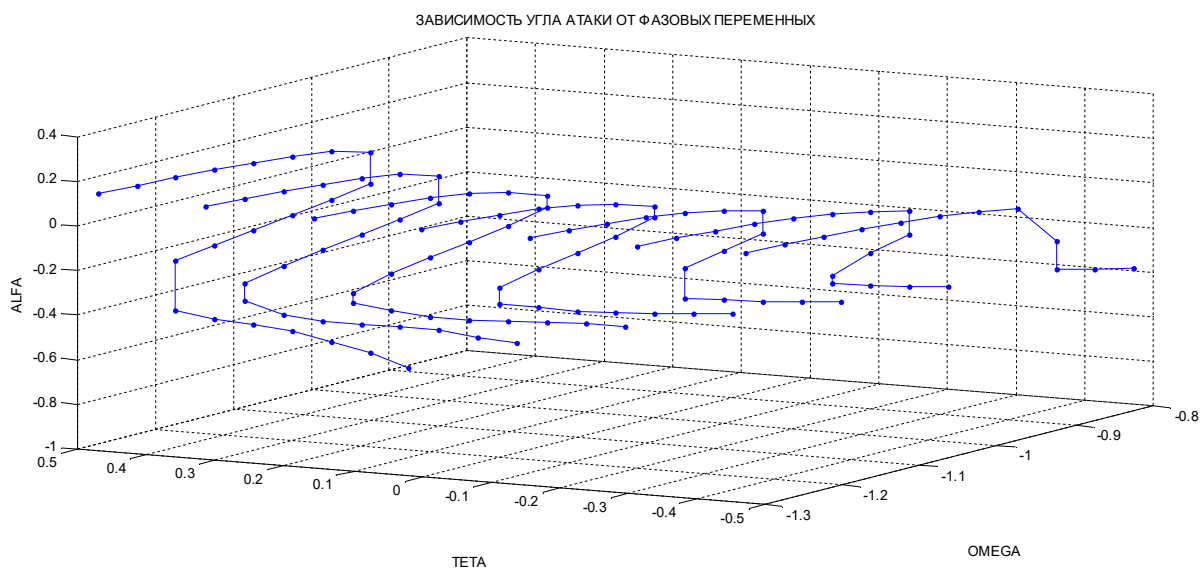


Рис. 6. Возникает проблема определения правильного угла атаки на некоторых режимах движения в случае неоднозначности, но при малых колебаниях около состояния покоя неоднозначности нет

Эта поверхность, определенная с помощью многократного численного решения уравнения (6) в математическом пакете MATLAB для пластинок с удлинением  $\lambda = 8$ , изображена на (рис. 6). На ней хорошо видно участок неоднозначности.

**Стационарные режимы**

Будем считать, что маятник совершает малые колебания около положения покоя. Исследуем устойчивость тривиального положения равновесия  $Y = 0, \theta = 0$  по первому приближению. Линеаризуем уравнения движения (3) - (4), если  $Y \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Будем считать, что маятник совершает малые колебания около положения покоя. Исследуем устойчивость тривиального положения равновесия  $Y = 0, \theta = 0$  по первому приближению. Линеаризуем уравнения движения (3) - (4), если  $Y \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$ .

$$\begin{cases} M\ddot{Y} + KY + \left( c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) \dot{\theta} - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) \theta = 0, \\ I\ddot{\theta} + \left( c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) \dot{\theta} + \left( c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) + C \right) \theta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Выпишем характеристическое уравнение системы уравнений первого приближения (7)

$$(M\lambda^2 + K)(I\lambda^2 + (c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right))\lambda + (c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) + C) = 0.$$

Оно равносильно совокупности из двух уравнений:

$$\begin{cases} M\lambda^2 + K = 0 \\ (I\lambda^2 + (c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right))\lambda + (c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) + C). \end{cases}$$

Первое уравнение имеет чисто мнимый корень:  $\lambda_{12} = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$  и для определения характера устойчивости этой точки необходимо рассмотреть второе уравнение.

При выполнении условия  $c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) < c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right)$  второе уравнение имеет два вещественных корня разных знаков и рассматриваемая точка является неустойчивой седловой точкой.

Если же выполняется условие  $c_y \left( \frac{\pi}{2} \right) > c_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - \dot{\epsilon} \left( \frac{\pi}{2} \right) c_x \left( \frac{\pi}{2} \right)$ , то судить об устойчивости рассматриваемой точки по первому приближению нельзя, но для многих прямоугольных пластинок оно выполняется.

На этом анализ устойчивости простейших положений равновесия можно закончить. Полученные результаты ведут к увеличению амплитуды колебаний рассматриваемого тела если оно проходит рассмотренное положение равновесия.

**Численное интегрирование уравнений движения**

В математическом пакете MATLAB написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений (3)-(4), описывающих колебания пластинки с неподвижным центром давления, который находится в центре пластинки G. Такая модель возможна при условии того, что длина стержня намного больше ширины пластинки. Для этой модели угол атаки определяется однозначно. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. При поиске численного решения аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном. Использование кубической сплайн-интерполяции дает хорошие результаты. В качестве результатов работы программы графически выводится зависимость  $Y = Y(\theta)$ , т.е. рисуются "фигуры Лиссажу". Далее приводятся некоторые результаты работы программы:

На рисунке 2 изображен уход траектории из неустойчивого положения равновесия  $Y = 0, \theta = 0$ .

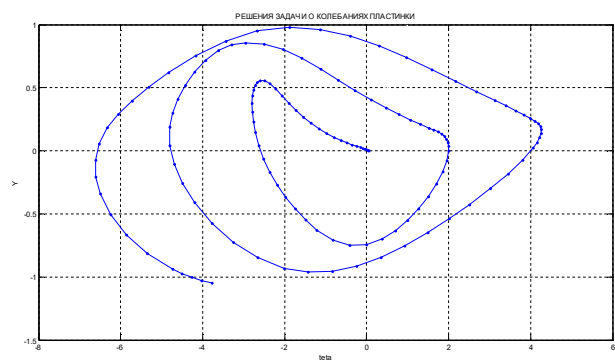


Рис. 7. Колебания аэродинамического маятника в потоке среды

**Заключение**

1. Разработана математическая модель колебаний пластинки.
2. Показано, что вопрос об устойчивости положения равновесия «состояния покоя» приводит к критическому по Ляпунову случаю.
3. Показаны условия неустойчивости состояния покоя.
4. На базе специализированной системы

компьютерной математики MATLAB 9 моделирования колебаний пластинки.  
разработана программа для имитационного

### Литература

1. Беляков Д.В., Самсонов В.А., Филиппов В.В. «Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде». Издательство «МЭИ», журнал «Вестник МЭИ», выпуск № 4, 2006 г., стр. 5-10.
2. Табачников В.Г. «Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки». Труды ЦАГИ 1974 г. выпуск 1621.
3. Самсонов В.А. Беляков Д.В. «Оптимизация движения спускающегося авторотирующего тела». Седьмой Международный Аэрокосмический Конгресс IAC'07. Полные доклады. 27-31 августа 2012 г., Москва, Россия. Электронный вид. Регистрационный номер: ISBN 7-85312-056-7.

### References

1. Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. "Study of the moving the asymmetrical body in resisting ambience". The Publishers "MEI", journal "Herald MEI", issue 4 2006, p. 5-10.
2. Tabachnikov V.G. "Stationary features wing on small velocity in all range angle attacks.". Works CAGI 1974 issue 1621.
3. Samsonov V.A. Belyakov D.V. "Optimization of the motion coming down autorotating of the body". The Seventh International Aerospace Congress IAC 07. The Full reports. the August 27-31 2012, Moscow, Russia. TheElectronictype. Registrationnumber: ISBN 7-85312-056-7.

Поступила 27.10.2017

### Об авторе:

**Беляков Дмитрий Валерьевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерная математика», Московский авиационный институт (национальный технический университет), [dimbel@rambler.ru](mailto:dimbel@rambler.ru)

### Note on the author:

**Belyakov Dmitry V.**, Candidate of Engineering Sciences, Research Officer faculty of computer mathematics, Moscow Aircraft Institute (National Exploratory University), [dimbel@rambler.ru](mailto:dimbel@rambler.ru)