



УДК 378

DOI: 10.25559/SITITO.14.201801.281-292

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ РЕСУРС ПО КАЧЕСТВЕННО-ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.В. Киселева

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия

Аннотация

Основной целью и результатом процесса обучения при современном компетентностном подходе в образовании является формирование у обучающихся компетенций, необходимых для осуществления профессиональной деятельности. Обязательным условием эффективного формирования компетенций является самостоятельная работа обучающихся. Новое понимание целей образовательного процесса требует модернизации образовательных программ. Основные методологические подходы такой модернизации, опирающейся на принципы Болонского процесса, были развиты при выполнении ряда отечественных и международных проектов, в которых активное участие принимал Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. Одним из таких подходов является интенсивное применение в учебном процессе электронных образовательных средств. В статье описывается электронный образовательный ресурс в виде программного комплекса качественно-численного исследования неавтономных динамических систем для поддержки самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Качественно-численные методы исследования динамических систем», которая читается автором для бакалавров направления подготовки «Прикладная математика и информатика». Электронный образовательный ресурс включает краткое описание используемых алгоритмов качественно-численного исследования неавтономных динамических систем, руководство пользователя программного комплекса и пример. Программный комплекс позволяет отыскивать периодические решения динамической системы, определять их тип и характер устойчивости, строить сепаратрисные инвариантные кривые неподвижных точек отображения Пуанкаре, временные реализации. Комплекс может использоваться как для изучения системы при конкретных значениях параметров, так и для выяснения ее эволюции и бифуркаций в зависимости от параметров и построения бифуркационных диаграмм в пространстве параметров. Самостоятельная работа по дисциплине с использованием программного комплекса предусматривает выполнение исследовательских заданий и обсуждение результатов исследования, проводится в интерактивной форме с представлением презентации. Использование комплекса в учебном процессе привело к повышению мотивации студентов при изучении дисциплины и уровня освоения ими профессиональных компетенций.

Об авторе:

Киселева Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и динамики систем, заместитель директора по магистратуре Института информационных технологий, математики и механики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, проспект Гагарина, д. 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0642-7075>, natalja.kiseleva@itmm.unn.ru

©Киселева Н.В., 2018



Ключевые слова

Электронный образовательный ресурс; компетенции; самостоятельная работа; качественно-численное исследование неавтономных динамических систем; отображение Пуанкаре; неподвижная точка; фазовый портрет

ELECTRONIC EDUCATIONAL RESOURCE ON QUALITATIVE-NUMERIC RESEARCH OF NON-AUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEMS

Natalja V. Kiseleva

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract

The main goal and the result of the learning process based on competence-oriented approach in education are development of competences necessary for learners to carry out professional activities. Independent work of learners is one of the required conditions for effective competences development. New understanding of the educational process goals requires the modernization of educational programs. Basic methodological approaches to such modernization, based on the principles of the Bologna Process, were developed with the involvement of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. One of such approaches is the intensive use of electronic educational tools in the educational process. The article describes the electronic educational resource in a form of computer complex on qualitative-numeric research of non-autonomous dynamic systems. The electronic educational resource includes description of algorithms used for qualitative-numeric research of non-autonomous dynamic systems, the user's guide and the example. The computer complex allows users to search for periodic solutions of dynamic systems, determine their type and character of stability, construct separatrix invariant curves of the Poincare map fixed points and time implementations.

It can be used both for studying dynamic systems with certain values of parameters and for studying system evolution over time and finding bifurcations depending on used parameters, as well as constructing bifurcation diagrams in the parameter space. Independent work of learners on the course involves carrying out research assignments and discussing the research results. The use of the computer complex to support independent work of learners has led to increased motivation of learners and higher level of professional competences development.

Keywords

Electronic educational resource; competences; independent work; qualitative-numeric research of non-autonomous dynamic systems; Poincare map; fixed point; phase portrait.

Введение

Основной целью и результатом процесса обучения при современном компетентностном подходе в образовании является формирование у обучающихся общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций, необходимых для осуществления профессиональной деятельности [1-6]. Это центральная идея современных федеральных государственных образовательных стандартов [7]. Новое понимание целей образовательного

процесса требует модернизации образовательных программ [8-10]. Основные методологические подходы такой модернизации, опирающейся на принципы Болонского процесса, были развиты при выполнении ряда отечественных и международных проектов, в частности, проектов TUNING RUSSIA [11-14] и META-MATH [15-16], в которых активное участие принимал Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского. Опыт выполнения этих проектов послужил основой для разработки



собственных образовательных стандартов университета в области информационно-коммуникационных технологий [17-18]. Одним из современных подходов в организации обучения является интенсивное применение электронных образовательных средств [19-29]. Значительный вклад в развитие профессиональных компетенций вносит изучение специальных дисциплин, относящихся к вариативной части образовательной программы по направлению подготовки. Обязательным условием эффективного формирования профессиональных компетенций является самостоятельная работа обучающихся.

Настоящая статья посвящена описанию электронного образовательного ресурса в виде программного комплекса NaDyS, разработанного для методической поддержки самостоятельной работы обучающихся по вариативной дисциплине «Качественно-численные методы исследования динамических систем», которая читается автором для бакалавров направления подготовки «Прикладная математика и информатика». Самостоятельная работа предусматривает выполнение исследовательских заданий и обсуждение результатов исследования, проводится в интерактивной форме с представлением презентации.

Комплекс NaDyS предназначен для качественно-численного исследования нелинейных неавтономных динамических систем второго порядка

$$\begin{cases} dx/dt = P(t, x, y, \mu) \\ dy/dt = Q(t, x, y, \mu) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь t – время, x, y – искомые функции, μ – параметр (4-мерный вектор с компонентами a, b, h, f), P, Q – функции, непрерывные по совокупности переменных, дифференцируемые по переменным x и y , периодические по переменной t периода τ и, может быть, по переменной x периода 2π .

Задача качественно-численного исследования динамической системы (1) состоит в разбиении пространства параметров на области, в каждой из которых система является структурно-устойчивой, и построении фазового портрета, соответствующего каждой области, а также в изучении бифуркаций, происходящих на ограничивающих эти области поверхностях.

Программный комплекс NaDyS позволяет выполнить следующие этапы качественно-

численного исследования системы (1):

Отыскание периодических решений;

Определение типа и характера устойчивости найденных периодических решений;

Построение инвариантных кривых неподвижных точек отображения Пуанкаре, порождаемого траекториями системы;

Построение итерационных последовательностей отображения Пуанкаре;

Построение временных реализаций $x(t), y(t)$.

Комплекс может использоваться как для изучения системы (1) при конкретных значениях параметров, так и для выяснения ее эволюции и бифуркаций в зависимости от параметров и построения бифуркационных диаграмм в пространстве параметров.

Электронный образовательный ресурс включает краткое описание используемых алгоритмов качественно-численного исследования неавтономных динамических систем, руководство пользователя комплекса NaDyS и пример.

Алгоритмы качественно-численного исследования неавтономной динамической системы второго порядка

Сведение задачи исследования периодических решений к отысканию циклов неподвижных точек отображения Пуанкаре. Рассматриваемая динамическая система (1) является неавтономной и нелинейной. При ее анализе найти аналитическое решение в большинстве случаев невозможно, поэтому используется численное исследование. Для изучения периодических решений $\Gamma_{p,q}: x = x^*(t), y = y^*(t)$, удовлетворяющих условиям $x^*(t + 2\pi p) = x^*(t) + 2\pi q, y^*(t + 2\pi p) = y^*(t)$, где $p = 1, 2, \dots; q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, используется метод точечных отображений [30], который позволяет задачу изучения структуры фазового пространства динамической системы (1), описываемой дифференциальными уравнениями, свести к исследованию точечного отображения T , порождаемого фазовыми траекториями системы (1) на секущей плоскости $t=0$ (отображение Пуанкаре). В случае, когда система (1) периодична по x с периодом 2π , отображение T можно рассматривать как отображение поверхности $H\{x(\text{mod } 2\pi), y\}$ кругового цилиндра с образующей, параллельной оси y .

Периодическому решению $\Gamma_{p,q}$ системы (1)



соответствует цикл p -кратных неподвижных точек отображения Пуанкаре. При этом тип и характер устойчивости цикла неподвижных точек отображения T совпадает с типом и характером устойчивости соответствующего ему периодического решения системы (1).

Для большинства систем получить точечное отображение T в явном виде представляется затруднительным или вообще невозможным, поэтому для построения отображения T используется численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка [31] интегрирования системы (1) в интервале $t \in [0, \tau]$ с постоянным шагом $h = \tau/N$, где N – заданное целое число.

Отыскание неподвижных точек отображения Пуанкаре. Пусть оператор T точечного отображения секущей плоскости в себя при фиксированных значениях вектора параметров μ_0 имеет вид

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x, y) \\ \bar{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Обозначим через $M^*(x^*, y^*)$ его неподвижную точку: $TM^* = M^*$. Задача поиска неподвижной точки сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x - f(x, y) = 0 \\ y - g(x, y) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \tilde{f}(x, y) = 0 \\ \tilde{g}(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (2) по выбору пользователя находится методом Ньютона последовательных приближений [31], методом секущих [31] или методом последовательных отображений (последовательное применение оператора T) с заданной точностью ε (малое положительное число). Все методы являются итерационными и по заданному начальному приближению $M_0(x_0, y_0)$ неподвижной точки $M^*(x^*, y^*)$ находят последовательность точек $\{M_k(x_k, y_k)\}$, которые являются приближениями искомой неподвижной точки $M^*(x^*, y^*)$. Процесс построения итерационной последовательности заканчивается, если выполнено условие

$$|\tilde{f}(x_{k+1}, y_{k+1})| + |\tilde{g}(x_{k+1}, y_{k+1})| < \varepsilon \quad (3)$$

либо число итераций стало равным заданному максимальному числу k_{max} . При выполнении условия (3) точка $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ считается неподвижной точкой отображения T .

Определение характера устойчивости неподвижных точек. Линеаризуем систему (1) в

окрестности периодического решения $\Gamma_{p,q}$: $x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$, соответствующего циклу неподвижных точек отображения T , сделав замену переменных $\xi = x - x^*(t)$, $\eta = y - y^*(t)$, и запишем систему уравнений в вариациях

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (\partial P / \partial x)_{\Gamma_{p,q}} \xi + (\partial P / \partial y)_{\Gamma_{p,q}} \eta \\ \dot{\eta} = (\partial Q / \partial x)_{\Gamma_{p,q}} \xi + (\partial Q / \partial y)_{\Gamma_{p,q}} \eta \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $Z(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) & \xi_2(t) \\ \eta_1(t) & \eta_2(t) \end{pmatrix}$ фундаментальная

матрица системы (4), нормированная в точке $t=0$ (матрица монодромии), так что $Z(0) = E$. Вычислим $Z(t)$ при $t = \tau$. Характеристическое уравнение для периодического решения $\Gamma_{p,q}$ запишется в виде

$$|Z(\tau) - \rho E| = \begin{vmatrix} \xi_1(\tau) - \rho & \xi_2(\tau) \\ \eta_1(\tau) & \eta_2(\tau) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

или $\rho^2 - \sigma\rho + \Delta = 0$, где $\sigma = \xi_1(\tau) + \eta_2(\tau)$, $\Delta = \xi_1(\tau)\eta_2(\tau) - \xi_2(\tau)\eta_1(\tau)$. Его корни

$\rho_{1,2} = -\sigma/2 \pm \sqrt{\sigma^2/4 - \Delta}$ (мультипликаторы) определяют тип и характер устойчивости периодического решения $\Gamma_{p,q}$ и

соответствующего цикла $M^* = \{M_1^*, K, M_p^*\}$ p -кратных неподвижных точек отображения T . Если корни лежат внутри круга единичного радиуса ($|\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1$), то цикл M^* является асимптотически устойчивым. Если оба корня расположены вне этого круга ($|\rho_1| > 1, |\rho_2| > 1$), то цикл M^* неустойчив. Цикл M^* имеет седловой тип, если корни действительны и удовлетворяют неравенствам $|\rho_1| < 1, |\rho_2| > 1$. Случай, когда один или оба корня лежат на границе круга $|\rho| = 1$, является бифуркационным.

Построение инвариантных кривых седловых неподвижных точек. Обозначим через $M^*(x^*, y^*)$ седловую p -кратную неподвижную точку отображения T , через ρ_1 и ρ_2 – корни ее характеристического уравнения и через χ_1 и χ_2 – соответствующие им тангенсы углов наклона критических направлений (т.е. касательных к инвариантным кривым в точке M^*). Величины $\chi_{1,2}$ определяются из уравнения

$$\xi_2(\rho\tau)\chi^2 + (\xi_1(\rho\tau) - \eta_2(\rho\tau))\chi - \eta_1(\rho\tau) = 0,$$

где $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ – элементы фундаментальной



матрицы $Z(t)$ системы уравнений в вариациях (4), вычисленные при $t = p\tau$ (напомним, что τ – период системы (1) по переменной t).

Алгоритм численного построения сепаратрисной инвариантной кривой состоит из двух этапов: линейной аппроксимации в малой окрестности седловой неподвижной точки $M^*(x^*, y^*)$ и ее численного построения путем последовательного применения некоторой степени отображения T к точкам начального отрезка.

На первом этапе на критическом направлении на расстоянии d_0 от неподвижной точки выбирается точка M_0^0 и строится начальный отрезок $[M_0^0, M_0^1]$, соединяющий точки M_0^0 и $M_0^1 = AM_0^0$, где оператор A выбирается в зависимости от значения мультипликатора ρ , соответствующего выбранному критическому наклону:

$$A = \begin{cases} T^p, & \text{если } \rho > 1 \\ (T^{-1})^p, & \text{если } 0 < \rho < 1 \\ (T^{-1})^{2p}, & \text{если } -1 < \rho < 0 \\ T^{2p}, & \text{если } \rho < -1 \end{cases}$$

Если расстояние $r(M_0^0, M_0^1) < d_m$, где d_m – максимальное расстояние от начальной точки до ее отображения, задаваемое пользователем ($d_m \leq 0.05$), то начальный отрезок делится на m

частей и к каждой точке деления применяется n раз оператор A . В противном случае вместо d_0 берется $d_0 / 2$ и процесс поиска точки M_0^0 повторяется, но не более l_d раз. Величина l_d максимального числа делений начального смещения при поиске начального отрезка также задается пользователем ($l_d \leq 20$). Если за $l \leq l_d$ шагов точку M_0^0 найти не удастся, то работа алгоритма прекращается. Необходимо уточнить координаты неподвижной точки M^* .

Число n определяет длину инвариантной кривой. Увеличив n , можно продолжить ее построение. Увеличив число m , можно продолжить деление начального отрезка $[M_0^0, M_0^1]$ и, построив итерационные последовательности для каждой из дополнительных точек, уточнить построение инвариантной кривой.

Руководство пользователя программного комплекса NaDyS

Программный комплекс NaDyS является Windows-приложением. После запуска исполняемого файла `nadis.exe` появляется главное окно комплекса, содержащее кнопки запуска соответствующих модулей (рис.1).

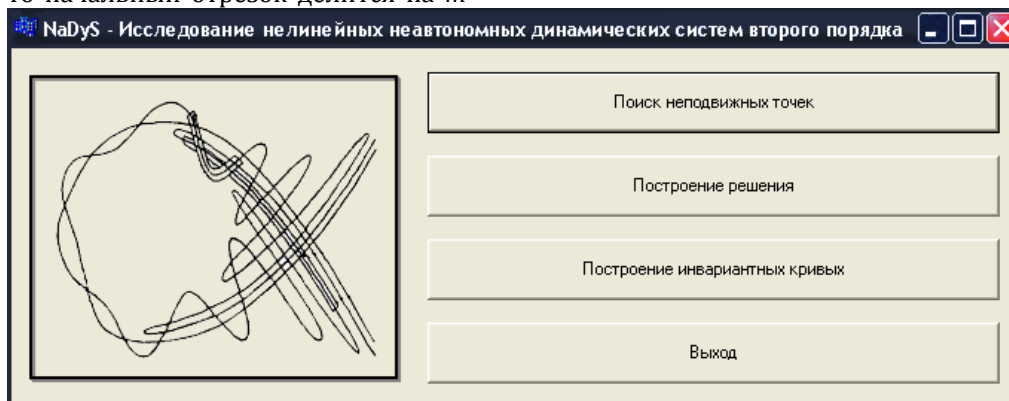


Рис. 1 Главное окно комплекса NaDyS

Опишем каждый модуль подробнее.

Модуль “Поиск неподвижных точек” (рис.2) предназначен для отыскания координат неподвижных точек, соответствующих периодическим решениям системы вида

$$\begin{cases} dx/dt = P(t, x, y, a, b, h, f) \\ dy/dt = Q(t, x, y, a, b, h, f) \end{cases} \quad (5)$$

при изменении одного (называемого активным) параметра с заданным шагом (остальные параметры при этом имеют постоянные значения).

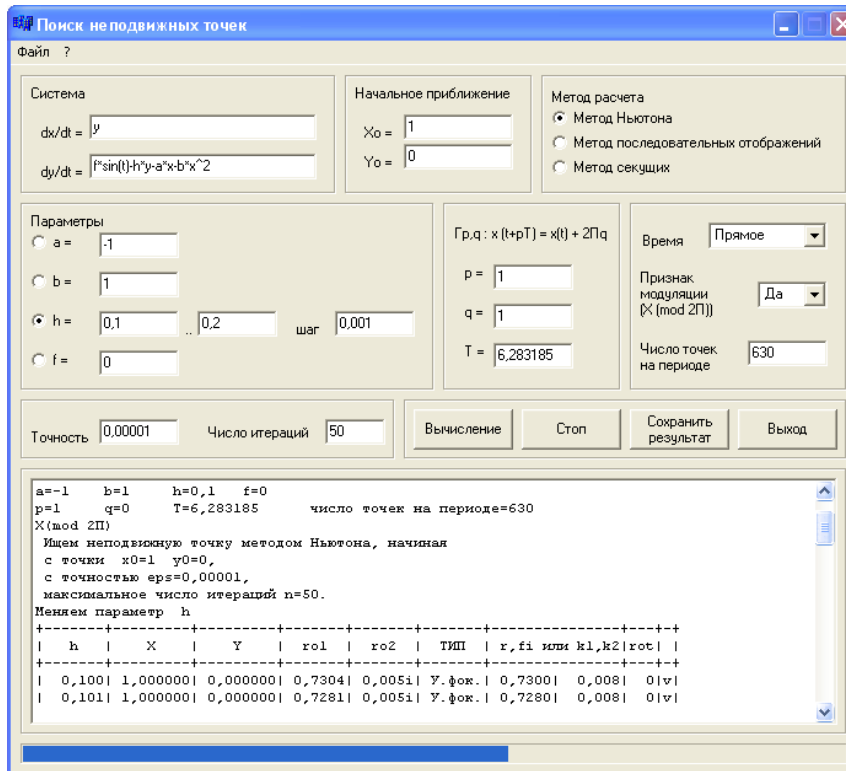


Рис. 2 Окно модуля "Поиск неподвижных точек"

Инициализация программного модуля прежде всего состоит в задании правых частей системы, периода $T=\tau$ системы (5) по переменной t , признака необходимости модуляции $x(\text{mod}2\pi)$, числа N точек на периоде τ при численном интегрировании системы (5) методом Рунге-Кутты, чисел p и q , характеризующих соответствующее неподвижной точке периодическое решение $\Gamma_{p,q}$. (Эти данные вводятся при инициализации всех трех модулей программного комплекса и в дальнейшем описываться не будут.)

Правые части системы задаются выражениями, строящимися по определенным правилам. Разрешено использовать:

- переменные x, y, t ;
- параметры a, b, h, f ;
- операции
 - « + » – сложение
 - « - » – вычитание
 - « * » – умножение
 - « / » – деление
 - « ^ » – возведение в степень;
- круглые скобки;
- функции

$\sin, \cos, \text{tg}, \text{ctg}, \exp, \text{sh}, \text{ch}, \text{th}, \text{cth}, \text{sqrt}, \text{arcsin}, \text{arccos}, \text{arctg}, \text{arctctg}, \ln, \lg, \text{sec}, \text{cosec}, \text{sech}, \text{cosech},$

$\text{arcsec}, \text{arccosec}, \text{arsh}, \text{arch}, \text{arth}, \text{arcth}, \text{arsech}, \text{arcosech}.$

После заполнения общих полей требуется задать начальное приближение неподвижной точки, точность ε ее отыскания, максимальное число k_{max} итераций, а также начальное, конечное значения и постоянный шаг изменения активного параметра. Поиск координат неподвижной точки может осуществляться методом Ньютона, методом последовательных отображений и методом секущих, поэтому далее следует выбрать один из этих методов.

Расчет осуществляется после нажатия кнопки "Вычисление". Результаты вычислений заносятся в таблицу, в которой указаны текущее значение активного параметра, координаты x, y найденной неподвижной точки, значения мультипликаторов $ro1$ и $ro2$, характер устойчивости и тип неподвижной точки, критические наклоны $k1$ и $k2$ (в случае действительных мультипликаторов), модуль r и угол поворота fi (в случае комплексных сопряженных мультипликаторов), число вращений rot (число применений модуляции $x(\text{mod}2\pi)$), а также признак v совпадения числа rot с числом p .



Таблицу можно сохранить в виде файла с расширением *.dat нажатием кнопки “Сохранить результат”.

Модуль “Построение решения” (рис.3) предназначен для построения временных реализаций $x(t)$, $y(t)$ системы (2).

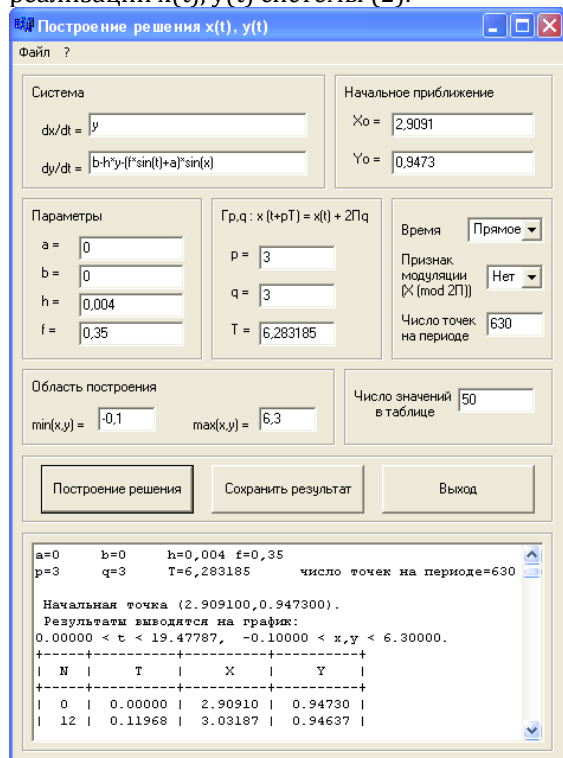


Рис.3 Окно модуля “Построение решения”

Для инициализация программного модуля после заполнения общих полей задаются начальное приближение (начальная точка), область построения. После нажатия кнопки “Построение решения” осуществляется построение реализации $x(t)$, $y(t)$, которое отображается в виде соответствующего графического изображения в новом окне. Информация о построении заносится в таблицу, в которой указаны номер N итерации, соответствующее значение T времени и координаты точек x , y .

Таблицу можно сохранить в виде файла с расширением *.dat нажатием кнопки “Сохранить результат”.

Модуль “Построение инвариантных кривых” (рис.4) реализует построение инвариантных кривых седловых неподвижных точек системы (5).

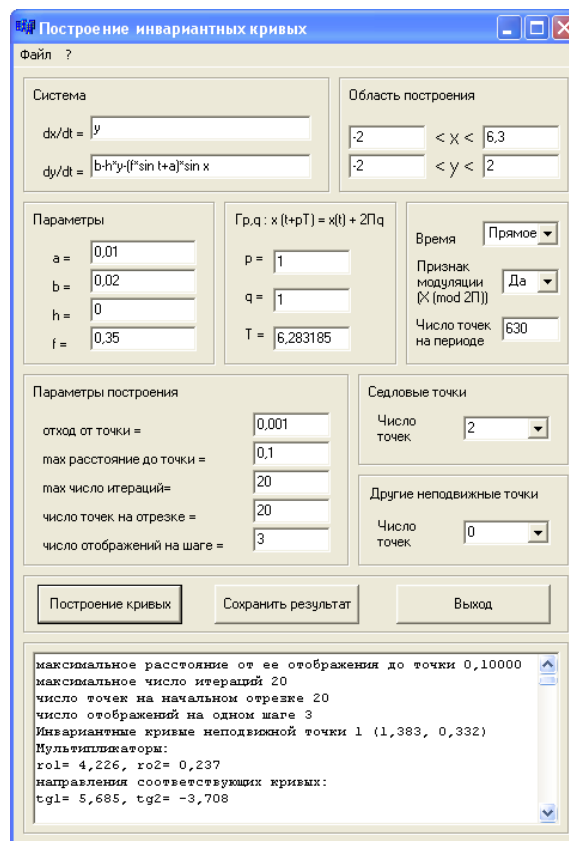
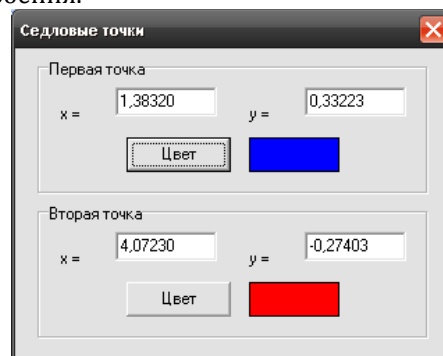
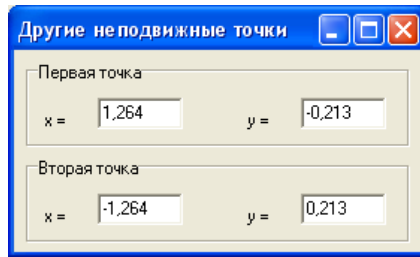


Рис. 4 Окно модуля “Построение инвариантных кривых”

Инициализация модуля после заполнения общих полей состоит в задании размеров областей изображения и цвета кривой (в программе допускается одновременное построение инвариантных кривых не более шести седловых точек), числа седловых неподвижных точек и их координат в всплывающем окне (рис. 5а), числа других неподвижных точек, которые отмечаются на фазовом портрете, и их координат в другом всплывающем окне (рис. 5б), параметров построения.



а)



б)

Рис. 5 Всплывающее окно модуля "Построение инвариантных кривых" для задания неподвижных точек

Параметрами построения являются отход d_0 от неподвижной точки на начальном отрезке, максимальное расстояние d_m от начальной точки до ее отображения, максимальное число l_d итераций поиска начального отрезка, число t точек на начальном отрезке и число n применений отображения A на одном шаге работы алгоритма.

После нажатия кнопки "Построение кривых" появляется графическое изображение сепаратрисных инвариантных кривых в новом окне (рис. 6). Если на том же графике необходимо построить инвариантные кривые других седловых точек, необходимо поставить галочку «Продолжить вывод» и ввести новые данные.

Построенные кривые можно сохранить. Для этого нужно нажать кнопку «Сохранить». При этом будет вызван стандартный диалог сохранения картинки.

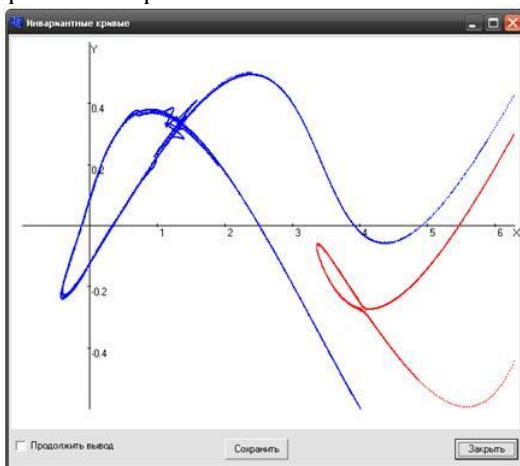


Рис. 6 Всплывающее окно модуля "Построение инвариантных кривых" с изображением сепаратрисных инвариантных кривых

Информация о построении каждой кривой заносится в таблицы, в которых указаны номер

К полученной точки на кривой, число N повторного применения отображения к начальному отрезку и координаты точек x , y кривых.

Информацию о построении кривых можно сохранить нажатием кнопки "Сохранить результат" в виде файла с расширением **.dat*.

Пример использования комплекса NaDyS

Исследовать фазовый портрет системы

$$\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = b - hy - (a + f \sin t) \sin x \end{cases}$$

описывающей поведение параметрически возбуждаемого ротора. Дана неавтономная система $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b - hy - (a + v \sin t) \sin x \end{cases}$.

Качественно – численными методами исследовать периодические решения $\Gamma_{1,1}$ и $\Gamma_{1,-1}$ при фиксированных значениях параметров $a = 0$, $b = 0.1$, $h = 0.05$ и изменении параметра f от 0 до 1.2.:

1. Найти соответствующие им неподвижные точки отображения Пуанкаре, исследовать их тип и характер устойчивости.
2. Выяснить бифуркации, приводящие к их возникновению.
3. Построить фазовый портрет отображения Пуанкаре.

С помощью комплекса NaDyS установлено, что первая бифуркация происходит при $f = 0.11$. При этом возникает сложная неподвижная точка типа седло-узел, которая с ростом параметра f распадается на две: устойчивую A^+ и седловую B^+ , отвечающие периодическим решениям $\Gamma_{1,1}$. На рис.7 построен фазовый портрет при $f = 0.15$. Существуют неподвижная точка A^+ (5.429, 0.972) типа устойчивый фокус и седловая неподвижная точка B^+ (0.829, 1.028).

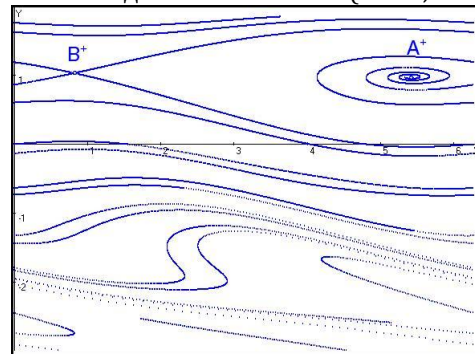


Рис. 7 Фазовый портрет при $a = 0$, $b = 0.1$, $h = 0.05$, $f = 0.15$

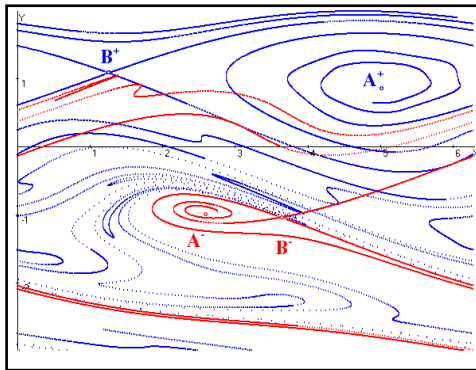


Рис.8 Фазовый портрет при $a = 0$, $b = 0.1$, $h = 0.05$, $f = 0.35$

При $f = 0,301$ рождается еще одна сложная неподвижная точка типа седло-узел, которая с ростом параметра f распадается на две неподвижные точки: устойчивую A - и седловую B -, отвечающие периодическим решениям $\Gamma_{1,-1}$. На рис.8 построен фазовый портрет при $f = 0.35$. Имеются неподвижные точки $A+$ (4.988, 0.914) типа устойчивый фокус, $B+$ (1.269, 1.081) типа

седло, $A-$ (2.565, -0.952) типа устойчивый фокус и $B-$ (3.643, -1.042) типа седло.

Заключение

В статье описан электронный образовательный ресурс в виде программного комплекса качественно-численного исследования неавтономных динамических систем для поддержки самостоятельной работы обучающихся. Предлагаемый контент включает краткое описание используемых алгоритмов, руководство пользователя и пример. Использование комплекса в учебном процессе привело к повышению мотивации студентов при изучении дисциплины «Качественно-численные методы исследования динамических систем» и уровня освоения ими профессиональных компетенций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Goldstein H. Statistical information and the measurement of education outcomes (editorial) // Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society). 1992. Vol. 155, no. 3. Pp. 313-315. URL: <http://www.jstor.org/stable/2982887> <http://www.nica.ru/> (дата обращения: 20.02.18).
- [2] Gonzales H., Wangenaar R. Universities contribution to Bologna Process. An introduction. 2nd Edition. Bilbao: University of Deusto, 2008. 160 p.
- [3] Delamare F., Winterton J. What is competence? // Human Resource Development International. 2005. Vol. 8, issue 1. Pp. 27-46. DOI: <https://doi.org/10.1080/1367886042000338227>
- [4] Baartman L.K.J., Bastiaens T.J., Kirschner P.A., Cees P.M. van der Vleuten. Teachers' opinions on quality criteria for Competency Assessment Programs // Teaching and Teacher Education. 2007. Vol. 23, issue 6. Pp. 857-867. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.04.043>
- [5] Alpers B. Das SEFI Maths Working Group „Curriculum Framework Document“ und seine Realisierung in einem Mathematik-Curriculum für einen praxisorientierten Maschinenbaustudiengang. In: Hoppenbrock A., Biehler R., Hochmuth R., Rück HG. (eds) Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016. Pp. 645-659. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_40
- [6] Дудаков С.М., Захарова И.В. Мониторинг сформированности математических компетенций у студентов ИТ – специальностей // Инженерное образование. 2017. № 21. С. 90-95. URL: http://www.ac-raee.ru/files/io/m21/art_11.pdf (дата обращения: 20.02.18).
- [7] Захарова И.В., Кузенков О.А. Опыт реализаций требований образовательных и профессиональных стандартов в области ИКТ в российском образовании // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12, № 3, Часть 1. С. 17-31. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27411971> (дата обращения: 20.02.18).
- [8] Modernization of math-related courses in engineering education in Russia based on best practices in European and Russian universities / I. Soldatenko [et al.] // Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016). 12-15 September 2016, Tampere, Finland. 16 p. URL: <http://sefibenvw.h.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/soldatenko-modernization-of-math-related-courses-in-engineering-education-in-russia-based-133.pdf> (дата обращения: 20.02.18).
- [9] Захарова И.В., Дудаков С.М., Солдатенко И.С. Проектирование образовательных программ в области ИКТ с учетом профессиональных стандартов // Инженерное образование. 2017. № 21. С. 140-144. URL: http://www.ac-raee.ru/files/io/m21/art_19.pdf (дата обращения: 20.02.18).
- [10] Бедный Б.И., Кузенков О.А. Интегрированные программы подготовки научно-педагогических кадров высшей квалификации // Интеграция образования. 2017. Т. 21, № 4. С. 637-650. DOI: <https://doi.org/10.15507/1991-9468.089.021.201704.637-650>



- [11] Petrova I., Zaripova V., Ishkina E., Militskaya S., Malikov A., Kurmishv N., et al. Tuning Russia: Reference points for the design and delivery of degree programmes in information and communication technologies. Bilbao: University of Deusto, 2013. 198 p.
- [12] Karavayeva Y.V., Kovtun Y.N. Adapting the Tuning Programme Profiles to the Need of Russian Higher Education // Tuning Journal for Higher Education. 2013. Vol. 1, no 1. Pp. 187-202. DOI: [http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1\(1\)-2013pp187-202](http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1(1)-2013pp187-202)
- [13] Bedny A., Erushkina L., Kuzenkov O. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology // Tuning Journal for Higher Education. 2014. Vol. 1, no. 2. Pp. 387-404. DOI: [http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1\(2\)-2014pp387-404](http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1(2)-2014pp387-404)
- [14] Кузенков О.А., Тихомиров В.В. Использование методологии «TUNING» при разработке национальных рамок компетенций в области ИКТ // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2013. № 9. С. 77-87. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23020512> (дата обращения: 20.02.18).
- [15] Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia / I. Zakharova [et al.] // Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016). 12-15 September 2016, Tampere, Finland. 15 p. URL: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/zakharova-using-sefi-framework-for-modernization-of-requirements-system-for-mathematical-education-155.pdf> (дата обращения: 20.02.18).
- [16] Кузенков О.А., Кузенкова Г.В., Бирюков Р.С. Разработка фонда оценочных средств с использованием пакета Mathbridge // Образовательные технологии и общество. 2016. Т. 19, № 4. С. 465-478.
- [17] Гергель В.П., Кузенков О.А. Разработка самостоятельно устанавливаемых образовательных стандартов Нижегородского госуниверситета в области информационно-коммуникационных технологий // Школа будущего. 2012. № 4. С. 100-105.
- [18] Гузина Е.В., Кузенков О.А. Образовательные стандарты Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Инновации в образовании. 2014. № 3(4). С. 39-44.
- [19] Sosnovsky S., Dietrich M., Andres E., Goguadze G., Winterstein S., Libbrecht P., Siekmann J., Melis E. Math-Bridge: Bridging the gaps in European remedial mathematics with technology-enhanced learning. 201. Pp. 437-451. DOI: 10.13140/2.1.1142.3367.
- [20] Sosnovsky S. Math-Bridge: Closing Gaps in European Remedial Mathematics with Technology-Enhanced Learning. In: Wassong T., Frischmeier D., Fischer P., Hochmuth R., Bender P. (eds) Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014. Pp. 437-451. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-03104-6_31
- [21] Representation for Interactive Exercises / G. Goguadze // Proceedings of the 16th Symposium, 8th International Conference. Held as Part of CICM '09 on Intelligent Computer Mathematics (Calcuemus '09/МКМ '09), Jacques Carette, Lucas Dixon, Claudio Sacerdoti Coen, and Stephen M. Watt (Eds.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. Pp. 294-309. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0_25
- [22] Басалин П.Д., Безрук К.В. Архитектура оболочки гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2012. № 8. С. 26-35.
- [23] Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Интерактивные формы обучения компьютерным наукам // Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе: материалы Междунар. науч.-метод. конф. (16-17 мая 2017 г.) / науч. ред. Е.К. Хеннер. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т., 2017. С. 4-8. URL: <https://elis.psu.ru/node/425200> (дата обращения: 20.02.18).
- [24] Басалин П.Д., Кузагина Е.А., Неймарк Е.А., Тимофеев А.Е., Фомина И.А., Чернышова Н.Н. ИТ-образование с применением интеллектуальной обучающей среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13, № 4. С. 105-111. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.2017.4.384>
- [25] Грезина А.В., Панасенко А.Г. Изучение курса физики в институте информационных технологий, математики и механики ННГУ на базе системы электронного обучения // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 487-493.
- [26] Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.
- [27] Медведева О.Н., Супонев Н.П., Солдатенко И.С., Захарова И.В., Язенин А.В. Об электронной образовательной среде и системе оценки качества образовательной деятельности в Тверском государственном университете // Образовательные технологии и общество. 2014. Т.17, № 4. С. 610-624.
- [28] Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Оболочка гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений // Системы управления и информационные технологии. 2018. Т. 71, № 1. С. 24-28.
- [29] Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Оболочка гибридной интеллектуальной обучающей среды производственного типа // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21, № 1. С. 396-405.
- [30] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1976. 471 с.
- [31] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017. 636 с.

Поступила 20.01.2018; принята к публикации 20.02.2018; опубликована онлайн 30.03.2018.

REFERENCES

- [1] Goldstein H. Statistical information and the measurement of education outcomes (editorial). *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*. 1992; 155(3):313-315. Available at: <http://www.jstor.org/stable/2982887> (accessed 20.02.18).
- [2] Gonzales H., Wangenaar R. Universities contribution to Bologna Process. An introduction. 2nd Edition. Bilbao: University of Deusto, 2008. 160 p.
- [3] Delamare F., Winterton J. What is competence? *Human Resource Development International*. 2005; 8(1):27-46. DOI: <https://doi.org/10.1080/1367886042000338227>
- [4] Baartman L.K.J., Bastiaens T.J., Kirschner P.A., Cees P.M. van der Vleuten. Teachers' opinions on quality criteria for Competency Assessment Programs. *Teaching and Teacher Education*. 2007; 23(6):857-867. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.04.043>
- [5] Alpers B. Das SEFI Maths Working Group „Curriculum Framework Document“ und seine Realisierung in einem Mathematik-Curriculum für einen praxisorientierten Maschinenbaustudiengang. In: Hoppenbrock A., Biehler R., Hochmuth R., Rück HG. (eds)



- Lehren und Lernen von Mathematik in der Studiengangphase. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016. Pp. 645–659. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_40
- [6] Dudakov S.M., Zakharova I.V. Monitoring the formation of mathematical competences in students of IT-specialties. *Engineering education*. 2017; 21:90-95. Available at: http://www.ac-raee.ru/files/io/m21/art_11.pdf (accessed 20.02.18). (In Russian)
 - [7] Zakharova I., Kuzenkov O. Experience in implementing the requirements of the educational and professional standards in the field of ICT in Russian education. *Modern information technologies and IT-education*. 2016; 12(30)-1:17-31. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27411971> (accessed 20.02.18). (In Russian)
 - [8] Soldatenko I., Kuzenkov O., Zakharova I., Balandin D., Biryukov R., Kuzenkova G., Yazenin A., Novikova S. Modernization of math-related courses in engineering education in Russia based on best practices in European and Russian universities. *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016)*. 12-15 September 2016, Tampere, Finland. 16 p. Available at: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/soldatenko-modernization-of-math-related-courses-in-engineering-education-in-russia-based-133.pdf> (accessed 20.02.18).
 - [9] Zakharova I.V., Dudakov S.M., Soldatenko I.S. Designing educational programs in the field of ICT taking into account professional standards. *Engineering Education*. 2017; 21:140-144. Available at: http://www.ac-raee.ru/files/io/m21/art_19.pdf (accessed 20.02.18). (In Russian)
 - [10] Bednyi B.I., Kuzenkov O.A. Integrated programmes for master's degree and PhD students. *Integratsiya obrazovaniya = Integration of Education*. 2017; 21(4):637-650. (In Russian) DOI: <https://doi.org/10.15507/1991-9468.089.021.201704.637-650>
 - [11] Petrova I., Zaripova V., Ishkina E., Militskaya S., Malikov A., Kurmishev N., et al. Tuning Russia: Reference points for the design and delivery of degree programmes in information and communication technologies. Bilbao: University of Deusto, 2013. 198 p.
 - [12] Karavayeva Y.V., Kovtun Y.N. Adapting the Tuning Programme Profiles to the Need of Russian Higher Education. *Tuning Journal for Higher Education*. 2013; 1(1):187-202. DOI: [http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1\(1\)-2013pp187-202](http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1(1)-2013pp187-202)
 - [13] Bedny A., Erushkina L., Kuzenkov O. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology. *Tuning Journal for Higher Education*. 2014; 1(2):387-404. DOI: [http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1\(2\)-2014pp387-404](http://dx.doi.org/10.18543/tjhe-1(2)-2014pp387-404)
 - [14] Kuzenkov O.A., Tikhomirov V.V. Using the methodology of "TUNING" in the development of a national ICT competency framework. *Modern information technologies and IT-education*. 2013; 9:77-87. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23020512> (accessed 20.02.18). (In Russian)
 - [15] Zakharova I., Kuzenkov O., Soldatenko I., Yazenin A., Novikova S., Medvedeva S., Chukhnov A. Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia. *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016)*. 12-15 September 2016, Tampere, Finland. 15 p. Available at: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/zakharova-using-sefi-framework-for-modernization-of-requirements-system-for-mathematical-education-155.pdf> (accessed 20.02.18).
 - [16] Kuzenkov O.A., Kuzenkova G.V., Biryukov R.S. Development of a fund of evaluation tools using the Mathbridge package. *Educational Technology & Society*. 2016; 19(4):465-478. (In Russian)
 - [17] Gergel V.P., Kuzenkov O.A. Development of independently established educational standards of Nizhny the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod in the field of information and communication technologies. *The School of the Future*. 2012; 4:100-105. (In Russian)
 - [18] Gugina E.V., Kuzenkov O.A. Educational standards of the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Series: Innovations in Education*. 2014; 3(4):39-44. (In Russian)
 - [19] Sosnovsky S., Dietrich M., Andres E., Goguadze G., Winterstein S., Libbrecht P., Siekmann J., Melis E. Math-Bridge: Bridging the gaps in European remedial mathematics with technology-enhanced learning. 201. Pp. 437-451. DOI: 10.13140/2.1.1142.3367.
 - [20] Sosnovsky S. Math-Bridge: Closing Gaps in European Remedial Mathematics with Technology-Enhanced Learning. In: Wassong T., Frischmeier D., Fischer P., Hochmuth R., Bender P. (eds) *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014. Pp. 437-451. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-03104-6_31
 - [21] Goguadze G. Representation for Interactive Exercises. *Proceedings of the 16th Symposium, 8th International Conference*. Held as Part of CICM '09 on Intelligent Computer Mathematics (Calculemus '09/MKM '09), Jacques Carette, Lucas Dixon, Claudio Sacerdoti Coen, and Stephen M. Watt (Eds.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. Pp. 294-309. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0_25
 - [22] Basalin P.D., Bezruk K.V. Hybrid intellectual decision making support system architecture. *Journal Neurocomputers*. 2012; 8:26-35. (In Russian)
 - [23] Basalin P.D., Timofeev A.E. Interactive forms of teaching computer sciences // Teaching mathematics and computer science in higher education: materials of the International. scientific-method. Conf. (May 16-17, 2017) / scientific. Ed. E.K. Henner. Perm: Perm. State. Nat. Issled. Univ., 2017. p. 4-8. (In Russian)
 - [24] Basalin P.D., Kumagina E.A., Neumark E.A., Timofeev A.E., Fomina I.A., Chernyshova N.N. IT-education using intelligent learning environments. *Modern information technologies and IT-education*. 2017; 13(4):105-111. (In Russian) DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.2017.4.384>
 - [25] Grezina A.V., Panasenka A.G. A course in physics at the Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics of the UNN on the basis of the e-learning system. *Educational Technology & Society*. 2018; 21(1):487-493. (In Russian)
 - [26] Kiseleva N.V. Computer complex on the qualitative theory of differential equations to support independent work. *Educational Technology & Society*. 2018; 21(1):423-434. (In Russian)
 - [27] Medvedeva O.N., Suponev N.P., Soldatenko I.S., Zakharova I.V., Yazenin A.V. On the electronic educational environment and the system for assessing the quality of educational activities in the Tver State University. *Educational Technology & Society*. 2014; 17(4): 610-624. (In Russian)
 - [28] Basalin P.D., Timofeev A.E. Hybrid intelligent decision support system shell. *Management systems and information technologies*. 2018; 71(1):24-28. (In Russian)



- [29] Basalin P.D., Timofeev A.E. The shell of a hybrid intellectual learning environment of the production type. *Educational Technology & Society*. 2018; 21(1):396-405. (In Russian)
- [30] Nejmark Ju.I. The method of point maps in the theory of nonlinear oscillations. M: Nauka. 1976. 471 p.
- [31] Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Numerical methods. M.: Binom. Laboratorija znaniy, 2017. 636 p.

Submitted 20.01.2018; Revised 20.02.2018; Published 30.03.2018.

About the author:

Natalja V. Kiseleva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Theory of Control and Dynamics of Systems, Deputy Director of the Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0642-7075>, natalja.kiseleva@itmm.unn.ru



This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License which unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited (CC BY 4.0).