

УДК 004.414.23, 519.876.5  
DOI: 10.25559/SITITO.14.201802.374-381

## АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА РОБАСТНЫХ СВОЙСТВ МНОГОЦЕЛЕВЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

М.В. Сотникова, А.С. Томилова

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

## ALGORITHMS FOR THE ROBUST PROPERTIES ANALYSIS OF A MULTI-PURPOSE CONTROL LAWS OF MOVING OBJECTS

Margarita V. Sotnikova, Anastasiia S. Tomilova

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

© Сотникова М.В., Томилова А.С., 2018

### Ключевые слова

Система управления; многоцелевой подход; робастная устойчивость; робастное качество; оптимизация, управление подвижными объектами.

### Аннотация

Вопросам анализа робастных свойств систем управления подвижными объектами уделяется существенное внимание в современной теории управления. Это объясняется тем, что математические модели, используемые при синтезе законов управления, практически всегда являются неточными и лишь приближенно представляют динамику реальных объектов. При этом одним из требований, предъявляемых на практике к системам управления, является сохранение их динамических свойств при вариации параметров и структуры математических моделей в определенных пределах. Если построенная система управления таким свойством не обладает, то ее нельзя считать работоспособной. В работе исследуются вопросы анализа робастной устойчивости и робастного качества многоцелевых законов управления подвижными объектами. Выбор многоцелевого подхода обусловлен тем, что он позволяет обеспечить желаемое качество функционирования системы управления в различных режимах, в том числе при действии внешних возмущений. При этом выбор настраиваемых элементов многоцелевой структуры закона управления определяет робастные свойства замкнутой системы. Рассматривается формализованная постановка задачи анализа робастных свойств законов управления с многоцелевой структурой с учетом ограниченных допустимых вариаций математической модели. Предлагается частотный подход к анализу робастной устойчивости и оптимизационный подход к анализу робастного качества. На основе полученных в работе результатов сформированы вычислительные алгоритмы анализа робастных свойств. В качестве практического примера рассмотрена система управления движением морского судна по заданному курсу. Выполнен анализ ее робастных свойств при условии допустимой вариации коэффициентов линейной математической модели судна в установленных диапазонах. Продемонстрированы примеры имитационного моделирования в среде MATLAB.

### Keywords

Control system; multi-purpose approach; robust stability; robust quality; optimization; moving objects control.

### Abstract

The problems of analyzing robust properties for control systems of moving objects are of significant importance in modern control theory. This is because the mathematical models used in the synthesis of control laws are almost always inaccurate and only approximately represent the dynamics of moving objects. At the same time, one of the requirements for control systems in practice is the preservation of their dynamic properties, when the parameters and structure of mathematical models can vary within certain limits. If the developed control system does not have this property, then it can not be considered workable. The article deals with the analysis of robust stability and robust quality for multi-purpose control laws of moving objects. The multi-purpose approach is chosen as the basis for designing the control system, since

### Об авторах:

**Сотникова Маргарита Викторовна**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, д. 35), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, [m.sotnikova@spbu.ru](mailto:m.sotnikova@spbu.ru)

**Томилова Анастасия Сергеевна**, студент, кафедра компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, д. 35), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8074-754X>, [cat8520@yandex.ru](mailto:cat8520@yandex.ru)



it allows to provide the desired quality of the control system operation in various regimes, including under the influence of external disturbances. In this case, the choice of tunable elements of the multi-purpose control law determines the robust properties of the closed-loop system. The formalized statement of the problem of robust properties analysis for control laws with a multi-purpose structure is considered taking into account the limited admissible variations of the mathematical model. Frequency-domain approach to the analysis of robust stability and optimization approach to the analysis of robust performance are proposed. On the basis of the obtained results, computational algorithms for the analysis of robust properties are formed. As a practical example, the system of ship motion control is considered. The analysis of its robust properties is performed taking into account the admissible variation of the linear model coefficients in the given ranges. Examples of simulation modeling in MATLAB environment are demonstrated.

## Введение

Исследованию вопросов анализа робастных свойств систем управления подвижными объектами придается значительное внимание в современной теории управления. Это связано с тем, что используемые математические модели неизбежно отличаются от истинной динамики реальных объектов. При этом одним из основных требований, которые необходимо учитывать при синтезе законов управления, является сохранение динамических свойств замкнутого контура при вариации параметров и структуры моделей в заданных допустимых пределах. Если построенная система управления этим свойством не обладает, то ее нельзя считать работоспособной.

Неточности математических моделей возникают в виду ряда сложностей, таких как неполнота информации об объекте управления, стремление к упрощению математической формализации, наличие различных неучтенных факторов и т. д. Все это влияет на работу системы управления и требует проведения анализа ее робастных свойств.

Вопросом робастности посвящено множество научных работ, книг и статей, например [1-4]. Существенное внимание при этом уделяется исследованию методов синтеза робастных законов управления подвижными объектами [5-8], включая морские суда [9, 10, 11]. В последнее десятилетие активно развиваются подходы к синтезу робастных алгоритмов управления на основе прогнозирующих моделей [12, 13].

Классическими вариантами синтеза стабилизирующих регуляторов для линейных стационарных систем являются линейно-квадратичный регулятор (LQR) и модальный синтез [1, 14, 15]. Известно, что любой регулятор, который обеспечивает устойчивость номинальной модели, всегда обладает определенным запасом устойчивости. Так, если используется модальный синтез, то чем дальше от мнимой оси находятся корни в открытой левой полуплоскости, тем больше запас устойчивости, но при этом система может неудовлетворительно работать при наличии шума и внешних возмущений.

Существуют два основных направления анализа робастных свойств систем управления – параметрический метод для структурированных неопределенностей и частотный метод при наличии неструктурированных неопределенностей [14, 16, 17]. К параметрическим методам анализа робастной устойчивости относится теорема Харитонова об устойчивости семейства полиномов, впервые сформулированная в работе [17]. Другой современный подход связан с применением линейных матричных неравенств [2].

К частотным методам анализа робастной устойчивости при наличии неструктурированной неопределенности относятся методы, представленные в работах [1, 3, 4, 7]. Особенностью этих методов является то, что структура модели заранее не фиксирована, в частности неизвестны степени полиномов в числителях и знаменателях передаточных функций. При этом ограничения на допустимые вариации модели накладываются в частотной области. Методы этой группы применяются в данной работе.

Цель исследования состоит в разработке методов и соответствующих вычислительных алгоритмов анализа робастной устойчивости и робастного качества многоцелевых законов управления подвижными объектами. Применение многоцелевого подхода обусловлено тем, что он позволяет обеспечить желаемое качество функционирования подвижного объекта в различных режимах, включая динамику при наличии внешних возмущений. Выбор настраиваемых элементов многоцелевой структуры определяет робастные свойства системы управления. В связи с этим возникает задача анализа робастных свойств законов управления в зависимости от выбора настраиваемых элементов.

В работе осуществляется формализованная постановка задачи анализа робастных свойств многоцелевых законов управления. Предлагаются методы ее решения. Для исследования робастной устойчивости применяется частотный подход, а для робастного качества – оптимизационный. На основе полученных результатов сформированы соответствующие вычислительные алгоритмы.

В качестве практического примера рассматривается система управления движением морского судна, выполняющего маневрирование по курсу. Цель управления судном состоит в том, чтобы обеспечить заданный командный сигнал по курсу. Рассматривается нелинейная математическая модель движения морского судна [18], осуществляется ее линеаризация, а для построения закона управления используется многоцелевой подход [19-23]. Исследуются робастные свойства многоцелевого закона управления движением судна по курсу при условии, что коэффициенты математической модели варьируются в заданных пределах. Выполняется проверка робастной устойчивости в зависимости от выбора настраиваемых элементов многоцелевого закона управления, а также проводится анализ сохранения качества процессов управления при вариациях параметров модели. Результаты работы представлены примерами имитационного моделирования в среде MATLAB/Simulink.



## Математические модели подвижного объекта и многоцелевого закона управления

Рассмотрим линейную математическую модель, представляющую динамику объекта управления в отклонениях от контролируемого движения и заданную системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\delta + \mathbf{h}d(t), \\ \dot{\delta} &= u, \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x},\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in E^n$  – вектор состояния,  $u \in E^1$  – управляющий сигнал,  $\delta \in E^1$  – отклонение исполнительных органов,  $d \in E^1$  – внешнее возмущение,  $y \in E^1$  – регулируемая переменная.

Построим многоцелевой закон управления, представленный (р)тами

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{G}(y - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ u &= \mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*) + K_\delta\delta + K_\Delta(y - \mathbf{C}\mathbf{z}) + \mathbf{K}_v\mathbf{x}^*,\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\mathbf{z} \in E^n$  – вектор состояния асимптотического наблюдателя, который позволяет восстановить информацию о неизвестных компонентах вектора состояния;  $\mathbf{x}^*$  – командный сигнал. Настраиваемыми элементами многоцелевой структуры (2) являются:

- матрицы  $\mathbf{K}$  и  $K_\delta$  базового закона управления  $u = \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + K_\delta\delta$ , определяющие динамику собственного движения системы управления;
- число  $K_\Delta$ , обеспечивающее астатизм замкнутой системы по регулируемой переменной  $y$  при наличии постоянных возмущений;
- вектор  $\mathbf{K}_v$ , обеспечивающий компенсирующую добавку при ненулевом сигнале  $\mathbf{x}^*$ ;
- матрица асимптотического наблюдателя  $\mathbf{G}$ , которая выбирается исходя из требования гурвицевости матрицы  $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$  и желаемой динамики при наличии постоянных возмущений.

Отметим, что в данной работе рассматриваются два режима функционирования системы управления – собственное движение и движение под воздействием постоянных внешних возмущений. Режим собственного движения определяется ненулевым командным сигналом  $\mathbf{x}^*$ . Основными показателями качества этого режима являются длительность переходного процесса и величина перерегулирования, а для движения, вызванного постоянными внешними возмущениями, – максимальное отклонение регулируемой переменной  $y$  от заданного значения. При этом ко второму режиму предъявляется требование астатизма по переменной  $y$ .

Динамика замкнутой системы (1), (2) определяется выбором настраиваемых элементов многоцелевой структуры (2). При этом в процессе их поиска необходимо учитывать, в том числе, ограниченность ресурсов управления. В работах [18, 19] показано, что для поиска настраиваемых элементов удобно использовать оптимизационный подход. В частности, в работах [20-23] представлены соответствующие эффективные вычислительные алгоритмы, которые могут быть реализованы на борту

в режиме реального времени. В дальнейшем будем считать, что закон управления имеет многоцелевую структуру (2) и его настраиваемые элементы выбраны с учетом предъявляемых к системе требований.

## Постановка задачи анализа робастных свойств многоцелевого закона управления

Математическая модель объекта в большинстве случаев отличается от номинальной модели, используемой при синтезе закона управления. Это связано с наличием ряда неучтенных факторов и неполнотой информации об объекте управления. Следовательно, возникает естественный вопрос: сохранятся ли свойства замкнутой системы, обеспечиваемые динамическим регулятором (2), при отклонениях коэффициентов линейной модели (1) в заданных пределах.

Будем считать, что коэффициенты модели (1) могут варьироваться в следующих пределах

$$a_{ij} \in [\hat{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij}], \quad b_i \in [\hat{b}_i, \tilde{b}_i], \quad i, j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Здесь  $\hat{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij}, \hat{b}_i, \tilde{b}_i$  – нижние и верхние границы соответственно. В работе ставится задача анализа робастной устойчивости замкнутой системы управления (1), (2) при условии, что коэффициенты модели (1) могут варьироваться в пределах (3). То есть рассматривается вопрос о том, сохранит ли устойчивость замкнутая система (1), (2) при всевозможных вариациях параметров модели (3).

Также проводится анализ робастного качества системы управления. При этом исследуются такие характеристики, как перерегулирование и длительность переходного процесса. Ставится задача оценивания интервалов, в пределах которых могут изменяться данные характеристики с учетом вариации коэффициентов модели в диапазонах (3).

Таким образом, в работе исследуются вопросы анализа робастной устойчивости и робастного качества многоцелевого закона управления (2) при условии, что коэффициенты модели (1) варьируются в пределах (3).

## Алгоритмы анализа робастных свойств систем управления подвижными объектами

Представим уравнения математической модели (1) в tf-форме, то есть в форме передаточных функций. После применения преобразования Лапласа, получим:

$$y = P_n(s)u + F_n(s)d, \quad (4)$$

$P_n(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}s^{-1}$ ,  $F_n(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{h}$  – вспомогательные передаточные функции, построенные для номинальной модели объекта управления (1).

С целью дальнейшего исследования робастной устойчивости, преобразуем формулы (2) для многоцелевого закона управления при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  к следующему виду

$$u = K(s)y, \quad (5)$$

где  $s$  – переменная Лапласа, а  $K(s)$  – передаточная функция динамического регулятора. Нетрудно проверить, что выражение для  $K(s)$  имеет следующий вид:



$$K(s) = (1 - \mathbf{K}K_1(s)\mathbf{b}s^{-1} - K_p s^{-1} + K_A cK_1(s)\mathbf{b}s^{-1})^{-1}(\mathbf{K}K_1(s)\mathbf{G} + K_A + K_A K_1(s)\mathbf{G}), \quad (6)$$

где  $-K_1(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{G}_c)^{-1}$  – вспомогательная передаточная функция.

В дальнейшем будем полагать, что передаточная функция  $K(s)$  регулятора не изменяется в процессе функционирования, а передаточные функции  $P_n(s)$  и  $F_n(s)$  объекта имеют неопределенность. Поэтому регулятор (5) фактически замыкает не объект с моделью (4), а другой объект с моделью:

$$y = P(s)u + F(s)d, \quad (7)$$

передаточные функции  $P(s)$  и  $F(s)$  которого отличаются от номинальных. Относительным возмущением модели или номинальной передаточной функции будем называть рациональную дробь

$$\Delta_0(s) = [P(s) - P_n(s)]P_n^{-1}(s). \quad (8)$$

По теореме о малом коэффициенте усиления, достаточным условием устойчивости возмущенной замкнутой системы является выполнение неравенства

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}^1} |\Delta_0(j\omega)T(j\omega)| < 1, \quad (9)$$

где  $T(s) = K(s)[1 + P_n(s)K(s)]^{-1}P_n(s)$ . С учетом (8) достаточные условия (9) могут быть преобразованы к следующей форме

$$|[P(j\omega) - P_n(j\omega)]P_n^{-1}(j\omega)| < 1/|T(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (10)$$

Здесь функция частоты  $b(\omega, P_n, K) = 1/|T(j\omega)|$  представляет предельно «широкий коридор» вариации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) объекта управления (1), в пределах которого гарантируется сохранение устойчивости замкнутой регулятором (2) системы. Таким образом, частотные границы робастной устойчивости для динамического регулятора (2) определяются следующими формулами

$$A_{up}(\omega) = \left(1 + \frac{1}{|T(j\omega)|}\right) |P_n(j\omega)|, \quad A_{lo}(\omega) = \left(1 - \frac{1}{|T(j\omega)|}\right) |P_n(j\omega)|. \quad (11)$$

Отметим, что функция  $b(\omega, P_n, K)$  зависит от выбора регулятора (5), а значит полностью определяется настраиваемыми элементами многоцелевого закона управления (2).

Теперь построим частотные границы, в пределах которых варьируется АЧХ объекта управления (1) при вариации коэффициентов модели в допустимых пределах (3). Пусть вектор  $\Theta \in E^s$  объединяет варьирующиеся коэффициенты модели (1). Введем допустимое множество  $\Omega \subseteq E^s$  вариации указанных параметров, которое определяется согласно ограничениям (3). Тогда АЧХ возмущенного объекта, соответствующая набору параметров  $\Theta$ , равна

$$A(\omega, \Theta) = |P(j\omega, \Theta)| \quad (12)$$

Теперь можно определить границы фактического «коридора», в пределах которого варьируется АЧХ объекта:

$$A_1(\omega) = \max_{\Theta \in \Omega} A(\omega, \Theta), \quad A_2(\omega) = \min_{\Theta \in \Omega} A(\omega, \Theta). \quad (13)$$

Здесь  $A_1(\omega)$  является верхней, а  $A_2(\omega)$  – нижней частотной границей. Построенный частотный «коридор» соответствует фактическим возможным изменениям модели объекта при наличии неопределенности параметрического типа. В результате анализ робастной устойчивости многоцелевого закона управления сводится к построению частотных границ робастной устойчивости по формуле (11) и сравнению этих границ с фактическим коридором (13) вариации модели объекта. Если границы робастной устойчивости заданного регулятора включают кривые (13), то требование робастной устойчивости выполнено. В противном случае, необходимо изменить настраиваемые элементы многоцелевого закона и вновь проверить выполнение указанного условия.

В итоге, сформируем следующий алгоритм анализа робастной устойчивости многоцелевого закона управления. Алгоритм состоит из следующих действий.

1. Задать настраиваемые элементы многоцелевого закона управления (2);
2. Вычислить передаточную функцию  $K(s)$  динамического регулятора (5) и соответствующую передаточную функцию  $T(s) = K(s)(1 + P_n(s)K(s))^{-1}P_n(s)$ ;
3. Построить частотную границу робастной устойчивости, обеспечиваемую регулятором  $K(s)$ ;
4. Вычислить верхнюю и нижнюю границы вариации АЧХ объекта по формулам (13);
5. Проверить, включают ли границы робастной устойчивости регулятора  $K(s)$  кривые (13) или нет. Если включают, то требование робастной устойчивости выполнено. В противном случае необходимо изменить настраиваемые элементы многоцелевой структуры (2) и перейти к п. 1.

Перейдем к исследованию робастного качества многоцелевого закона управления (2). Для этого при фиксированном наборе настраиваемых элементов многоцелевого закона управления (2) найдем значение длительности переходных процессов и перерегулирования по контролируемой переменной  $y$ . Отметим, что значения этих характеристик зависят от коэффициентов математической модели (1). Пусть  $J_p(\theta)$  – перерегулирование и  $T_p(\theta)$  – длительность для вектора  $\theta$  коэффициентов модели (1).

Построим верхнюю и нижнюю границу изменений характеристик качества. Для этого введем в рассмотрение следующие функции:

$$J_p^{up}(K(s)) = \sup_{\theta \in \Omega} J_p(\theta, K(s)), \quad J_p^{lo}(K(s)) = \inf_{\theta \in \Omega} J_p(\theta, K(s)), \quad (14)$$

$$T_p^{up}(K(s)) = \sup_{\theta \in \Omega} T_p(\theta, K(s)), \quad T_p^{lo}(K(s)) = \inf_{\theta \in \Omega} T_p(\theta, K(s)), \quad (15)$$

где  $\Omega$  – допустимое множество коэффициентов модели, удовлетворяющих условиям (3). Тогда множества значений функционалов  $J_p(\theta)$  и  $T_p(\theta)$  определяются следующим образом:

$$\mathfrak{R}_1 = (J_p^{lo}(K(s)), J_p^{up}(K(s))) \text{ и} \\ \mathfrak{R}_2 = (T_p^{lo}(K(s)), T_p^{up}(K(s))). \quad (16)$$





Таким образом, величины (14) и (15) определяют верхнюю и нижнюю границу перерегулирования и длительности переходного процесса соответственно для заданных настраиваемых элементов многоцелевого закона управления (2).

В результате, сформируем следующий алгоритм анализа робастного качества многоцелевого закона управления. Алгоритм состоит из следующих действий.

1. Задать настраиваемые элементы многоцелевого закона управления (2);

2. Вычислить передаточную функцию  $K(s)$  динамического регулятора (5) и соответствующую передаточную функцию  $T(s) = K(s)(1 + P_n(s)K(s))^{-1}P_n(s)$ ;

3. Вычислить верхнюю и нижнюю границу изменений характеристик качества по формулам (14), (15);

4. Сформировать интервалы (16), которым принадлежат значения перерегулирования и длительности переходных процессов при вариации параметров модели в пределах (3).

Отметим, что предложенные методы могут использоваться для анализа робастных свойств систем управления подвижными объектами различных классов [24, 25].

## Пример анализа робастных свойств системы управления движением судна по курсу

Будем считать, что линейная математическая модель движения судна по курсу имеет вид (1), причем матрицы этой модели равны

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = (0 \ 0 \ 1) \quad (17)$$

а вектор состояния  $\mathbf{x}$  и внешнее возмущение  $\mathbf{d}$  имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{x} = (V_z, \omega_y, \varphi)^T; \quad \mathbf{d} = F_z$$

Здесь  $V_z$  – боковая скорость,  $\omega_y$  – угловая скорость вращения по курсу,  $\varphi$  – угол курса,  $F_z$  – боковая сила.

Численные значения элементов матриц, приведенных в формуле (17), равны [18]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -9.7347 \cdot 10^{-3} V; & a_{12} &= 1.6284575 V; & b_1 &= -1.9801 \cdot 10^{-3} V^2; \\ a_{21} &= 4.0748 \cdot 10^{-4} V; & a_{22} &= -7.1699 \cdot 10^{-2} V; & b_2 &= -3.8596 \cdot 10^{-4} V^2; \\ h_1 &= 1.540467 \cdot 10^{-3}; & h_2 &= c_2 L/2 = 1.4142 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (18)$$

Данные значения представляют номинальную модель объекта. Будем считать, что эти коэффициенты могут варьироваться в пределах  $\pm 30\%$  от номинальных значений, то есть

$$a_{ij} \in [\hat{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij}], \quad b_i \in [\hat{b}_i, \tilde{b}_i], \quad i, j = \overline{1, 2}. \quad (19)$$

Здесь

$$\hat{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} - 0,3\bar{a}_{ij}, \quad \tilde{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} + 0,3\bar{a}_{ij}, \quad \hat{b}_i = \bar{b}_i - 0,3\bar{b}_i, \quad \tilde{b}_i = \bar{b}_i + 0,3\bar{b}_i,$$

$\bar{a}_{ij}$ ,  $\bar{b}_i$  – номинальные значения, приведенные в формуле (18).

Выберем следующие значения настраиваемых элементов многоцелевого закона управления (2):

$$\mathbf{K} = (0.1267 \ 21.49 \ 5.9409), \quad K_s = -1.3073$$

$$K_\Delta = 662.1373, \quad \mathbf{K}_v = (0.1267 \ 21.49 \ 0)$$

$$\mathbf{G} = (1773.2 \ 7.7737 \ 5.1857)^T$$

Соответствующая им передаточная функция динамического регулятора (5) равна

$$K(s) = \frac{662.1s^4 + 961.8s^3 + 422.3s^2 + 47.53s}{s^4 + 7.307s^3 + 20.7s^2 + 2.988s + 1.624 \cdot 10^{-15}} \quad (20)$$

Покажем, что регулятор  $\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}$  обеспечивает устойчивость замкнутой системы при любой вариации коэффициентов модели в заданных пределах (19). Для этого приведем графики (рис. 1) границ робастной устойчивости регулятора (20) и частотного коридора, в пределах которого варьируются АЧХ объекта управления при допустимых вариациях коэффициентов (19), и сравним их.

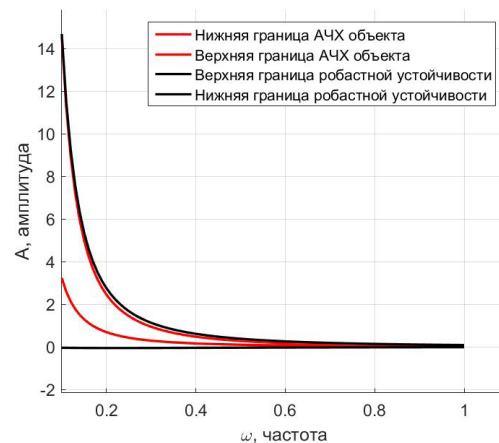


Рис. 1. Сравнение частотных коридоров  
Fig. 1. Comparison of frequency corridors

Из рисунка можно сделать вывод, что частотный коридор вариации АЧХ объекта находится внутри границ робастной устойчивости. Таким образом, полученный результат гарантирует сохранение устойчивости при любых вариациях коэффициентов модели объекта в заданных пределах (19).

Рассмотрим вопрос анализа робастного качества для динамического регулятора  $\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}$ . С этой целью построим границы интервалов (16) для перерегулирования и длительности при фиксированных значениях настраиваемых элементов закона управления с многоцелевой структурой. В результате проведенных вычислений были получены следующие значения с учетом вариации коэффициентов в пределах (19):

$$J_p^{up} = 19.2294, \quad J_p^{lo} = 0, \quad (21)$$

$$T_p^{up} = 53.1565, \quad T_p^{lo} = 16.6489.$$

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены графики изменения угла курса  $\varphi(t)$  для случая, когда берутся только максимальные и минимальные отклонения коэффициентов матриц



(17) в соответствующих диапазонах (19). Отметим, что приведенный на графиках результат получается только при условии, что ограничения на управление не учитываются. В противном случае, существуют такие комбинации коэффициентов математической модели, для которых ограничения на ресурс управления приводят к потере устойчивости замкнутой системы. Отметим, что значения длительности и перерегулирования для приведенных на рис. 2 переходных процессов находятся в пределах интервалов с границами (21).

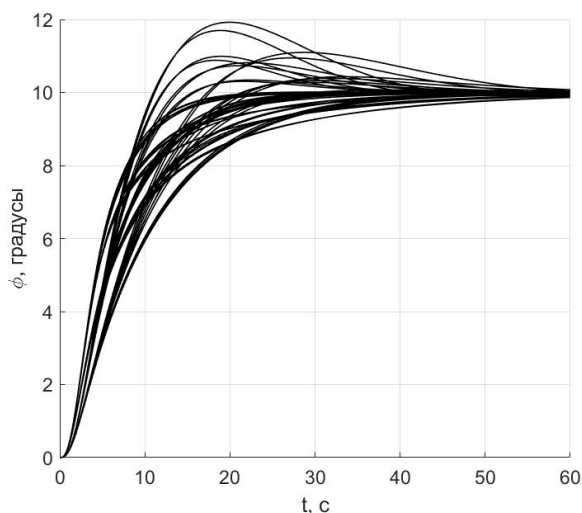


Рис. 2. Углы курса для различных комбинаций коэффициентов модели  
Fig. 2. Course angles for different combinations of model coefficients

На рис. 3 приведен пример переходного процесса по курсу для заданного командного сигнала  $\phi^* = 10^\circ$  при наличии постоянного внешнего возмущения  $d = -42$ . При этом используется многоцелевой закон управления (2) с приведенными ранее значениями настраиваемых элементов. Из рисунка можно сделать вывод, что построенный регулятор обеспечивает астатизм замкнутой системы по контролируемой переменной, то есть компенсирует действие внешнего возмущения.

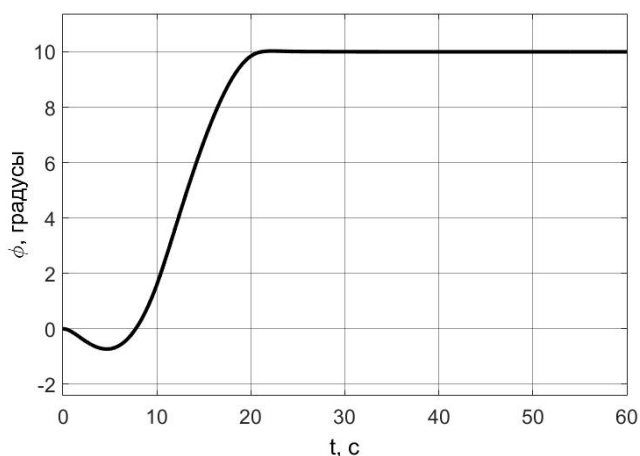


Рис. 3. Угол курса номинальной модели  
Fig. 3. The course angle of the nominal model

## Заключение

В работе предложены алгоритмы анализа робастной устойчивости и робастного качества для многоцелевых законов управления подвижными объектами. При проведении исследования учитывалось, что коэффициенты модели известны неточно и могут варьироваться в заданных пределах. Представлены результаты вычислительных экспериментов, выполненных для системы управления движением судна по заданному курсу. Предложенные в работе подходы могут быть использованы для анализа робастных свойств систем управления подвижными объектами различных классов.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 17-07-00361 а.

## Список использованных источников

- [1] Веремей Е.И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Издательство «Лань», 2013. 544 с.
- [2] Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in systems and control theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p. DOI: 10.1137/1.9781611970777
- [3] Doyle J.C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties // IEE Proceedings D – Control Theory and Applications. 1982. Vol. 129, issue 6. Pp. 242–250. DOI: 10.1049/ip-d.1982.0053
- [4] Kwakernaak H.  $H_2$ -optimization – Theory and applications to robust control design // Annual Reviews in Control. 2002. Vol. 26, issue 1. Pp. 45–56. DOI: 10.1016/S1367-5788(02)80010-4
- [5] Сотникова М.В. Синтез робастного цифрового регулятора для системы магнитной левитации // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2012. № 8. С. 1033–1040. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23020501> (дата обращения: 15.05.2018).
- [6] MAGLEV: Magnetic Levitation Plant. User Manual. Quanser Inc. Ontario, Canada, 2006. 18 p.
- [7] Yedavalli R.K. Robust Control of Uncertain Dynamic Systems: A Linear State Space Approach. Springer, New York, NY, 2014. 204 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-9132-3
- [8] Hua C., Zhang L., Guan X. Robust Control for Nonlinear Time-Delay Systems. Springer, Singapore, 2018. 300 p. DOI: 10.1007/978-981-10-5131-9
- [9] Andrikov D., Dereviankina A. Control Design of Ship Robust Active Rolling Stabilizer // Procedia Computer Science. 2017. Vol. 103. Pp. 470–474. DOI: 10.1016/j.procs.2017.01.027
- [10] Du J., Hu X., Krstić M., Sun Y. Dynamic positioning of ships with unknown parameters and disturbances // Control Engineering Practice. 2018. Vol. 76. Pp. 22–30. DOI: 10.1016/j.coneng-prac.2018.03.015
- [11] Peri D. Robust Design Optimization for the refit of a cargo ship using real seagoing data // Ocean Engineering. 2016. Vol. 123. Pp. 103–115. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2016.06.029



- [12] Сотникова М.В. Синтез робастных алгоритмов управления с прогнозирующими моделями // Системы управления и информационные технологии. 2012. Т. 50, № 4. С. 99-102.
- [13] Веремей Е.И., Сотникова М.В. Управление с прогнозирующими моделями. Воронеж: ООО «Издательство «Научная книга»», 2016. 214 с.
- [14] Doyle J., Francis B. Tannenbaum A. Feedback control theory. New York: Macmillan Publ. Co., 1992. 227 p.
- [15] Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. Wiley, New York, 1972. 575 p.
- [16] Поляк Б.Т., Щербаков Л.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
- [17] Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1978. № 11. С. 2086–2088.
- [18] Веремей Е.И., Корчанов В.М., Коровкин М.В., Погожев С.В. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 370 с.
- [19] Веремей Е.И., Сотникова М.В. Многоцелевая структура законов управления морскими подвижными объектами // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва: ИПУ РАН, 2014. С. 3289–3300. URL: <http://vspu2014.ipu.ru/node/8581> (дата обращения: 15.05.2018).
- [20] Veremey E.I. Dynamical correction of control laws for marine ships' accurate steering // Journal of Marine Science and Application. 2014. Vol. 13, issue 2. Pp. 127-133. DOI: 10.1007/s11804-014-1250-1
- [21] Veremey E., Sotnikova M. Spectral Approach to  $H_{\infty}$ -Optimal SISO Synthesis Problem // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. Vol. 9(43). Pp. 405-414. URL: <http://www.wseas.org/multimedia/journals/control/2014/a445703-248.pdf> (дата обращения: 15.05.2018).
- [22] Veremey E.I., Sotnikova M.V. Visual Image Based Dynamical Positioning Using Control Laws with Multipurpose Structure // IFAC-PapersOnLine. Part of special issue: 10th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft MCMC 2015: Copenhagen, 24–26 August 2015. 2015. Vol. 48, issue 16. Pp. 184-189. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.10.278
- [23] Veremey E., Sotnikova M. Optimal filtering correction for marine dynamical positioning control system // Journal of Marine Science and Application. 2016. Vol. 15, issue 4. Pp. 452-462. DOI: 10.1007/s11804-016-1370-x
- [24] Fagerholt K., Psaraftis H.N. On two speed optimization problems for ships that sail in and out of emission control areas // Transportation Research Part D: Transport and Environment. 2015. Vol. 39. Pp. 56-64. DOI: 10.1016/j.trd.2015.06.005
- [25] Bhattacharyya S.K., Gupta D.K. Target Path Iteration method for trajectory control of ships // Applied Ocean Research. 2014. Vol. 48. Pp. 55-65. DOI: 10.1016/j.apor.2014.07.012

Поступила 15.05.2018; принята в печать 10.06.2018;  
опубликована онлайн 30.06.2018.

## References

- [1] Veremey E.I. Linear systems with feedback. SPb.: Izdatel'stvo "Lan", 2013. 544 p. (In Russian)
- [2] Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in systems and control theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p. DOI: 10.1137/1.9781611970777
- [3] Doyle J.C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings D – Control Theory and Applications*. 1982; 129(6):242–250. DOI: 10.1049/ip-d.1982.0053
- [4] Kwakernaak H.  $H_2$ -optimization – Theory and applications to robust control design. *Annual Reviews in Control*. 2002; 26(1):45-56. DOI: 10.1016/S1367-5788(02)80010-4
- [5] Sotnikova M.V. Synthesis of robust digital controller for magnetic levitation system. *Modern Information Technology and IT-education*. 2012. 8:1033-1040. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23020501> (accessed 15.05.2018). (In Russian)
- [6] MAGLEV: Magnetic Levitation Plant. User Manual. Quanser Inc. Ontario, Canada, 2006. 18 p.
- [7] Yedavalli R.K. Robust Control of Uncertain Dynamic Systems: A Linear State Space Approach. Springer, New York, NY, 2014. 204 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-9132-3
- [8] Hua C., Zhang L., Guan X. Robust Control for Nonlinear Time-Delay Systems. Springer, Singapore, 2018. 300 p. DOI: 10.1007/978-981-10-5131-9
- [9] Andrikov D., Dereviankina A. Control Design of Ship Robust Active Rolling Stabilizer. *Procedia Computer Science*. 2017; 103:470-474. DOI: 10.1016/j.procs.2017.01.027
- [10] Du J., Hu X., Krstić M., Sun Y. Dynamic positioning of ships with unknown parameters and disturbances. *Control Engineering Practice*. 2018; 76:22-30. DOI: 10.1016/j.conengprac.2018.03.015
- [11] Peri D. Robust Design Optimization for the refit of a cargo ship using real seagoing data. *Ocean Engineering*. 2016; 123:103-115. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2016.06.029
- [12] Sotnikova M.V. Robust model predictive control algorithm synthesis. *Automation and Remote Control*. 2012; 50(4)99-102. (In Russian)
- [13] Veremey E.I., Sotnikova M.V. Management with predictive models. Voronezh: Izdatel'stvo "Nauchnaya kniga", 2016. 214 p. (In Russian)
- [14] Doyle J., Francis B. Tannenbaum A. Feedback control theory. New York: Macmillan Publ. Co., 1992. 227 p.
- [15] Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. Wiley, New York, 1972. 575 p.
- [16] Polyak B.T., Shcherbakov L.S. Robust stability and control. Moscow: Nauka, 2002. 303 p. (In Russian)
- [17] Kharitonov V.L. Asymptotic stability of the equilibrium position of a family of systems of differential equations. *Differential Equations*. 1978; 11:2086 -2088. (In Russian)
- [18] Veremey E.I., Korchanov V.M., Kоровкин M.V., Pогожев S.V. Computer modeling of motion control systems for marine moving objects. St. Petersburg: Research Institute of Chemistry of St. Petersburg State University, 2002. 370 p. (In Russian)
- [19] Veremey E.I., Sotnikova M.V. Multipurpose structure of control laws for marine moving objects. *Proceedings of the XII All-Russian Conference on Control Problems*. Moscow: IPU RAS, 2014. pp. 3289-3300. Available at: <http://vspu2014.ipu.ru/>



- node/8581 (accessed 15.05.2018). (In Russian)
- [20] Veremey E.I. Dynamical correction of control laws for marine ships' accurate steering. *Journal of Marine Science and Application*. 2014; 13(2):127-133. DOI: 10.1007/s11804-014-1250-1
- [21] Veremey E., Sotnikova M. Spectral Approach to  $H_\infty$ -Optimal SISO Synthesis Problem. *WSEAS Transactions on Systems and Control*. 2014; 9(43):405-414. Available at: <http://www.wseas.org/multimedia/journals/control/2014/a445703-248.pdf> (accessed 15.05.2018).
- [22] Veremey E.I., Sotnikova M.V. Visual Image Based Dynamical Positioning Using Control Laws with Multipurpose Structure. *IFAC-PapersOnLine*. Part of special issue: 10th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft MCMC 2015: Copenhagen, 24–26 August 2015. 2015; 48(16):184-189. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.10.278
- [23] Veremey E., Sotnikova M. Optimal filtering correction for marine dynamical positioning control system. *Journal of Marine Science and Application*. 2016; 15(4):452-462. DOI: 10.1007/s11804-016-1370-x
- [24] Fagerholt K., Psaraftis H.N. On two speed optimization problems for ships that sail in and out of emission control areas. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*. 2015; 39:56-64. DOI: 10.1016/j.trd.2015.06.005
- [25] Bhattacharyya S.K., Gupta D.K. Target Path Iteration method for trajectory control of ships. *Applied Ocean Research*. 2014; 48:55-65. DOI: 10.1016/j.apor.2014.07.012

Submitted 15.05.2018; revised 10.06.2018;  
published online 30.06.2018.

#### About the authors:

**Margarita V. Sotnikova**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Computer Applications and Systems, Saint-Petersburg State University (35 University Ave., Peterhof, St. Petersburg 198504, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, [m.sotnikova@spbu.ru](mailto:m.sotnikova@spbu.ru)

**Anastasiia S. Tomilova**, student of the Department of Computer Applications and Systems, Saint-Petersburg State University (35 University Ave., Peterhof, St. Petersburg 198504, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8074-754X>, [cat8520@yandex.ru](mailto:cat8520@yandex.ru)



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted reuse, distribution, and reproduction in any medium provided the original work is properly cited.

