УДК 51-7+530.145

Еферина Е.Г.[1], Велиева Т.Р.[1], Королькова А.В.[1], Гнатич М.[3,4,5], Кулябов Д.С.[1,2], Севастьянов Л. А.[1,3]

[1]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
[2]Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия
[3]Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия
[4]Институт экспериментальной физики, Кошице, Словакия
[5]Университет Павола Йозефа Шафарика, Кошице, Словакия

ДИАГРАММНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО ФОРМАЛИЗМА ОДНОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

АННОТАЦИЯ

В развиваемом группой методе стохастизации одношаговых процессов из исходной стохастической системы получаются упрощённые математические модели. Эти модели возможно исследовать стандартными методами, в отличии от исходной системы. Однако сам процесс стохастизации зависит от типа исследуемой системы. Мы хотим получить унифицированный абстрактный формализм для стохастизации одношаговых процессов. Данный формализм должен быть эквивалентен ранее введёному. Для унификации методов построения основного кинетического уравнения предлагается использовать диаграммную технику. Предложена диаграммная техника, позволяющая получать унифицированным образом основное кинетическое уравнение для исследуемой системы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Представление чисел заполнения, пространство Фока, нотация Дирака, одношаговые процессы, основное кинетическое уравнение, диаграммная техника.

Eferina E.G.[1], Velieva T.R.[1], Hnatich M.[3,4,5], Korolkova A.V.[1], Kulyabov D.S.[1,2], Sevastianov L.A.[1,3]

[1]RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia
[2]Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow region, Russia
[3]Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow region, Russia
[4]Institute of Experimental Physics, Košice, Slovakia
[5]Pavol Jozef Šafárik University in Košice (UPJŠ), Košice, Slovak Republic

DIAGRAM REPRESENTATION FOR THE OPERATOR APPROACH OF ONE-STEP PROCESSES STOCHASTIZATION

ABSTRACT

By the means of the method of stochastization of one-step processes we get the simplified mathematical model of the original stochastic system. We can explore these models by standard methods, as opposed to the original system. The process of stochastization depends on the type of the system under study. We want to get a unified abstract formalism for stochastization of one-step processes. This formalism should be equivalent to the previously introduced. To unify the methods of construction of the master equation, we propose to use the diagram technique. We get a diagram technique, which allows to unify getting master equation for the system under study.

KEYWORDS

Occupation numbers representation, Fock space, Dirac notation, one-step processes, master equation, diagram technique.

Введение

При моделировании разных физических и технических систем их зачастую можно моделировать в форме одношаговых процессов [1–4]. Тогда встаёт задача адекватного представления и изучения полученной модели. Для статистических систем кроме представления векторов состояния (комбинаторный подход) [1, 2] также используется и представление чисел заполнения (операторный подход) [5–10], особенно хорошо подходящее для описания систем с переменным числом элементов. Однако, техника получения моделей для комбинаторного достаточно сильно отличается от техники для операторного подхода. В данной работе мы хотим предложить унифицированную методику для обоих подходов на основе диаграммной техники.

Общее описание методики

Наша методика полностью формализована таким образом, что для её применения достаточно сформулировать исходную задачу соответствующим образом. Следует заметить, что большинство исследуемых нами моделей можно было формализовать как одношаговые процессы [12, 13]. Собственно, для этого типа моделей и развивалась нами эта методика. Что не исключает возможности расширения её и на другие процессы. Итак, первым шагом мы приводим нашу модель к виду одношагового процесса. Далее необходимо формализовать этот процесс в виде схем взаимодействия. Аналогами схем взаимодействия являются уравнения химической кинетики, реакции частиц и т.д. [1, 2, 5]. Каждой схеме взаимодействия приписывается собственная семантика. Эта семантика приводит непосредственно к основному кинетическому уравнению. Однако основное кинетическое уравнение [12, 13]. имеет обычно достаточно сложную структуру, что затрудняет его решение и исследование. Тогда возможны два пути:

- вычислительный подход — решение основного кинетического уравнения, например, по теории возмущений;
- модельный подход — получение приближённых моделей в виде уравнений Фоккера–Планка и Ланжевена.

Вычислительный подход позволяет получать конкретное решение для изучаемой модели. В нашей методике данный подход связан с решением по теории возмущений [14–16]. Модельный подход позволяет получить модели, которые удобно исследовать численно и качественно.

По методам построения основного кинетического уравнения (и, соответственно, последующих упрощённых моделей) можно выделить два подхода:

- комбинаторный подход;
- операторный подход.

В комбинаторном подходе все действия выполняются в пространстве векторов состояния системы, то есть мы на протяжении всех модельных манипуляций имеем дело с конкретной исследуемой системой.

В операторном подходе мы отвлекаемся от конкретной реализации исследуемой системы, работая с абстрактными операторами. В пространство векторов состояний мы переходим только в конце вычислений. Кроме того, конкретную операторную алгебру мы выбираем, исходя их симметрии задачи.

Основное кинетическое уравнение

Для описания системы используется основное кинетическое уравнение (master equation):

$$\frac{\partial p(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1)}{\partial t} = \int [w(\varphi_2; \psi, t_2) p(\psi, t_2; \varphi_1, t_1) - w(\psi; \varphi_2, t_2) p(\varphi_2, t_2; \varphi_1, t_1)]\, d\psi,$$

где $w(\varphi|\psi,t)$ есть вероятность перехода из состояния ψ в состояние φ за единицу времени.

При дискретной области определения множества состояний системы φ можно записать (пронумеровав состояния числами n и m):

$$\frac{\partial p_n(t)}{\partial t} = \sum w_{nm}\, p_m(t) - w_{mn} p_n(t),$$

где p_n — вероятность нахождения системы в состоянии n в момент времени t, w_{nm} — вероятность перехода системы из состояния m в состояние n за единицу времени.

Операторный подход

Представление чисел заполнение является основным языком при описании физики многих тел. Главными элементами этого языка являются волновые функции системы, содержащие информацию о том, сколько частиц находится в каждом одночастичном состоянии. Для изменения состояния системы используют операторы рождения и уничтожения. Методика применения формализма вторичного квантования для неквантовых систем (статистических, детерминированных) была рассмотрена в целом ряде статей [7, 19–21]. Для записи представления чисел заполнения обычно используют нотацию Дирака. В нотации, предложенной П. А. М. Дираком состояние системы описывается элементом проективного гильбертового пространства.

$$\varphi *_i := \varphi_i = (\varphi^i)^+ =< i| = |i > \quad ^+.$$

Скалярное произведение имеет следующий вид:

$$\varphi_i \varphi^i = \langle i|i \rangle.$$

Тензорное произведение имеет вид:

$$\varphi_j \varphi^i = |i >< j|.$$

В формализме чисел заполнения основное кинетическое уравнение переходит в уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t) >= L|\varphi(t) >.$$

Оператор Лиувилля L удовлетворяет соотношению:

$$< 0|L = 0.$$

Диаграммная запись

Опишем предлагаемую нами диаграммную технику для стохастизации одношаговых процессов.

Рис. 1. Прямое взаимодействие

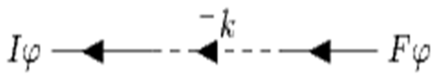

Рис. 2. Обратное взаимодействие

Будем записывать схемы взаимодействия в виде диаграмм. Каждой схеме взаимодействия соответствует пара диаграмм (рис. 1 и 2) для прямого и обратного взаимодействия соответственно. Диаграмма состоит из следующих элементов:

- входящие линии (на рисунке 1 обозначено сплошной линией). Эти линии направлены к линии взаимодействия. Линия помечается количеством и типом взаимодействующих сущностей. Можно записывать по одной сущности на линию или группировать их;
- исходящие линии (на рисунке 1 обозначено сплошной линией). Эти линии направлены от линии взаимодействия. Линия помечается количеством и типом взаимодействующих сущностей. Можно записывать по одной сущности на линию или группировать их;
- линия взаимодействия. (на рисунке 1 обозначена пунктирной линией). Направление времени обозначено стрелкой. Линия помечается коэффициентом интенсивности взаимодействия.

Каждой линии приписывается определённый фактор (в зависимости от выбранного подхода). Результирующее выражение получается перемножением этих факторов.

При применении операторного подхода с помощью диаграмм взаимодействия мы получаем оператор Лиувилля. Каждой линии присвоим соответствующий фактор. Результирующий членом будет получен из нормального произведения (нормальное произведение есть запись произведения операторов в виде, когда все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. факторов).

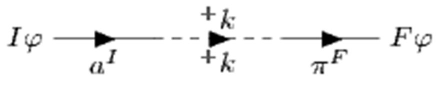

Рис. 3. Прямое взаимодействие (операторный подход)

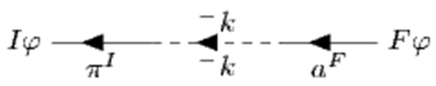

Рис. 4. Обратное взаимодействие (операторный подход)

Будем использовать следующие факторы для каждого типа линий (рис. 3).

- Входящая линия. Линия соответствует выводу одной сущности из системы. Следовательно, ей соответствует оператор уничтожения a. Очевидно, что комбинированной линии мощности I соответствует оператор a^I.

- Исходящая линия. Линия соответствует появлению в системе новой сущности. Следовательно, ей соответствует оператор рождения π. Очевидно, что комбинированной линии мощности F соответствует оператор π^F.
- Линия взаимодействия. Этой линии соответствует собственно коэффициент интенсивности взаимодействия.

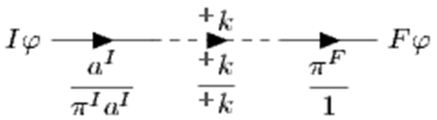

Рис. 5. Прямое взаимодействие (операторный подход), расширенная нотация

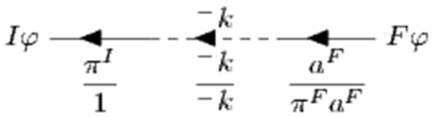

Рис. 6. Обратное взаимодействие (операторный подход), расширенная нотация

Для корректировки диаграммы 3 мы должны вычесть количество сущностей, вступивших во взаимодействие, помноженное на интенсивность взаимодействия. Тогда получим следующий член оператора Лиувилля:

$$ {}^{+}k\pi^F a^I - {}^{+}k\pi^I a^I = {}^{+}k(\pi^F - \pi^I)a^I. $$

Для обратных взаимодействий (рис. 4) используются эти же правила.

Для учёта дополнительного фактора будем использовать расширенные диаграммы (см. рис. 5 и 6). Здесь из нормального произведения числителей вычитается нормальное произведение знаменателей.

Таким образом, получаем оператор Лиувилля:

$$ L = \sum \Big[{}^{+}k_\alpha \left((\pi_i)^{F^{i\alpha}} - (\pi_i)^{I^{i\alpha}} \right) (a_i)^{I^{i\alpha}} + {}^{-}k_\alpha \left((\pi_i)^{I^{i\alpha}} - (\pi_i)^{F^{i\alpha}} \right) (a_i)^{F^{i\alpha}} \Big]. $$

<u>Модель Ферхюльста</u>

В качестве демонстрации метода рассмотрим модель Ферхюльста [24–26], описывающую ограниченный рост (привлекательность этой модели в том, что она одномерна и нелинейна). Изначально эта модель описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$ \frac{d\varphi}{dt} = \lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2, $$

здесь λ — коэффициент интенсивности размножения, β — коэффициент интенсивности вымирания, γ — коэффициент интенсивности уменьшения популяции. Здесь мы оставляем те же обозначения, что и в исходной модели [24]. Построим стохастический вариант данной модели. Запишем схемы взаимодействия:

$$ \varphi \overset{\lambda}{\underset{\gamma}{\Leftrightarrow}} 2\varphi, $$

$$ \varphi \overset{\beta}{\Rightarrow} 0. $$

Первое соотношение означает, что индивидуум, который съедает единицу пищи, немедленно репродуцируется, в обратную сторону – соперничество между индивидуумами. Второе — смерть индивидуума.

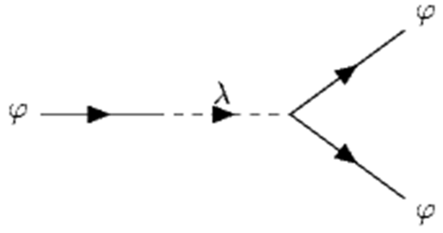

Рис. 7. Первое прямое взаимодействие

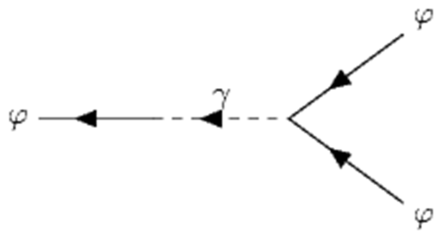

Рис. 8. Первое обратное взаимодействие

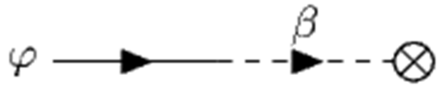

Рис. 9. Второе взаимодействие

Применим операторный подход. Для схем взаимодействия (10, 11 и 12) получаем оператор Лиувилля:

$$
\begin{gathered}
L = \lambda(\pi^2 - \pi)a + \gamma(\pi - \pi^2)a^2 + \beta(1 - \pi)a = \\
= \lambda((a^+)^2 - a^+)a + \gamma(a^+ - (a^+)^2)a^2 + \beta(1 - a^+)a = \\
= \lambda(a^+ - 1)a^+a + \beta(1 - a^+)a + \gamma(1 - a^+)a^+a^2.
\end{gathered}
$$

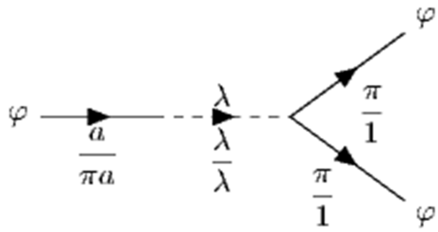

Рис. 10. Первое прямое взаимодействие (операторный подход)

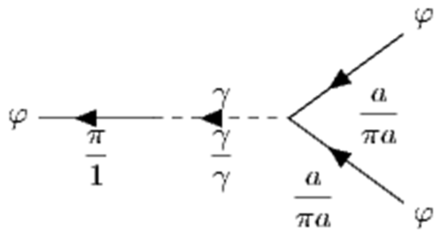

Рис. 11. Первое обратное взаимодействие (операторный подход)

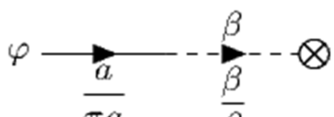

Рис. 12. Второе взаимодействие (операторный подход)

Запишем основное кинетическое уравнение через оператор Лиувилля:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial p_n(t)}{\partial t} = \frac{1}{n!}\langle n|L|\varphi\rangle = \\
= \frac{1}{n!}\langle n| - [\lambda a^+a + \beta a^+a + \gamma a^+a^+aa] + [\beta a + \gamma a^+aa] + \lambda a^+a^+a\varphi\rangle = \\
= -[\lambda n + \beta n + \gamma n(n-1)]\langle n|\varphi\rangle + [\beta(n+1) + \gamma(n+1)n]\langle n+1|\varphi\rangle + \lambda(n-1)\langle n-1|\varphi\rangle = \\
= -[\lambda n + \beta n + \gamma n(n-1)]p_n(t) + [\beta(n+1) + \gamma(n+1)n]p_n + 1(t) + \lambda(n-1)p_n - 1(t).
\end{gathered}
$$

Результат полностью совпадает с формулой, полученной комбинаторным методом.

Заключение

Авторами предложена диаграммная техника для стохастизации одношаговых процессов. На данный момент эта техника позволяет получить основное кинетическое уравнение. Также эта техника позволяет унифицировать разные подходы к стохастизации одношаговых процессов.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008).

Литература

1. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. The method of stochastization of one-step processes // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna : JINR, 2013. — P. 67.
2. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. The method of constructing models of peer to peer protocols // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — P. 557–562. — 1504.00576.
3. Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S. Designing installations for verification of the model of active queue management discipline RED in the GNS3 // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — P. 570–577. — 1504.02324.
4. Basharin G. P., Samouylov K. E., Yarkina N. V., Gudkova I. A. A new stage in mathematical teletraffic theory // Automation and Remote Control. — 2009. — dec. — Vol. 70, no. 12. — P. 1954–1964.
5. Hnatič M., Eferina E. G., Korolkova A. V. et al. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process // EPJ Web of Conferences. — 2016. — Vol. 108. — P. 02027. — 1603.02205.
6. Korolkova A. V., Eferina E. G., Laneev E. B. et al. Stochastization of one-step processes in the occupations number representation // Proceedings - 30th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2016. — 2016. — P. 698–704.
7. Grassberger P., Scheunert M. Fock-Space Methods for Identical Classical Objects // Fortschritte der Physik. — 1980. — Vol. 28, no. 10. — P. 547–578.
8. Tauber U. C. Field-Theory Approaches to Nonequilibrium Dynamics // Ageing and the Glass Transition. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — Vol. 716. — P. 295–348. — 0511743.
9. Janssen H.-K., Tauber U. C. The field theory approach to percolation processes // Annals of Physics. — 2005. — jan. — Vol. 315, no. 1. — P. 147–192. — 0409670.
10. Mobilia M., Georgiev I. T., Tauber U. C. Fluctuations and correlations in lattice models for predator-prey interaction // Physical Review E. — 2006. — apr. — Vol. 73, no. 4. — P. 040903. — 0508043.
11. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М. : Мир, 1987. — Т. 1.
12. Ван-Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М. : Высшая школа, 1990.
13. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — Мир, 1986.
14. Hnatič M., Honkonen J., Lučivjansk§ T. Field-theoretic technique for irreversible reaction processes // Physics of Particles and Nuclei. — 2013. — Vol. 44, no. 2. — P. 316–348.
15. Hnatich M., Honkonen J. Velocity-fluctuation-induced anomalous kinetics of the A + A → reaction // Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics. — 2000. — Vol. 61, no. 4 Pt A. — P. 3904–3911.
16. Гнатич М., Хонконен Ю., Лучивянски Т. Теоретико-полевой подход к описанию кинетических реакций. Роль случайных источников и стоков // Теоретическая и математическая физика. — 2011. — Т. 169, № 1. — С. 146–157.
17. Waage P., Gulberg C. M. Studies concerning affinity // J. Chem. Educ. — 1986. — Vol. 63, no. 12. — P. 1044.
18. Gorban A. N., Yablonsky G. S. Three Waves of Chemical Dynamics // Math. Model. Nat. Phenom. Vol. — 2015. — Vol. 10, no. 5. — P. 1–5.
19. Doi M. Second quantization representation for classical many-particle system // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1976. — Vol. 9, no. 9. — P. 1465–1477.
20. Doi M. Stochastic theory of diffusion-controlled reaction // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1976. — Vol. 9, no. 9. — P. 1479–1495.
21. Peliti L. Path integral approach to birth-death processes on a lattice // Journal de Physique. — 1985. — Vol. 46, no. 9. — P. 1469–1483.
22. Cajori F. A History of Mathematical Notations. — 1929. — Vol. 2. — P. 367.
23. Dirac P. A. M. A new notation for quantum mechanics // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1939. — Vol. 35, no. 03. — P. 416.
24. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. — 1838. — Vol. 10. — P. 113–117.
25. Feller W. Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung // Acta Biotheoretica. — 1939. — Bd. 5, H. 1. — S. 11–40.
26. Feller W. On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications // Proceedings of the First. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. — 1949. — P. 403–432.

References

1. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. The method of stochastization of one-step processes // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna : JINR, 2013. — P. 67.
2. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. The method of constructing models of peer to peer protocols // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — P. 557–562. — 1504.00576.
3. Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S. Designing installations for verification of the model of active queue management discipline RED in the GNS3 // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — P. 570–577. — 1504.02324.
4. Basharin G. P., Samouylov K. E., Yarkina N. V., Gudkova I. A. A new stage in mathematical teletraffic theory // Automation and Remote Control. — 2009. — dec. — Vol. 70, no. 12. — P. 1954–1964.
5. Hnatič M., Eferina E. G., Korolkova A. V. et al. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process // EPJ Web of Conferences. — 2016. — Vol. 108. — P. 02027. — 1603.02205.
6. Korolkova A. V., Eferina E. G., Laneev E. B. et al. Stochastization of one-step processes in the occupations number representation // Proceedings - 30th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2016. — 2016. — P. 698–704.

7. Grassberger P., Scheunert M. Fock-Space Methods for Identical Classical Objects // Fortschritte der Physik. — 1980. — Vol. 28, no. 10. — P. 547–578.
8. Tauber U. C. Field-Theory Approaches to Nonequilibrium Dynamics // Ageing and the Glass Transition. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — Vol. 716. — P. 295–348. — 0511743.
9. Janssen H.-K., Tauber U. C. The field theory approach to percolation processes // Annals of Physics. — 2005. — jan. — Vol. 315, no. 1. — P. 147–192. — 0409670.
10. Mobilia M., Georgiev I. T., Tauber U. C. Fluctuations and correlations in lattice models for predator-prey interaction // Physical Review E. — 2006. — apr. — Vol. 73, no. 4. — P. 040903. — 0508043.
11. R. Penrose, W. Rindler, Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Vol. 1, Cambridge University Press, 1987.
12. N. G. van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North-Holland Personal Library, Elsevier Science, 2011.
13. C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Springer Series in Synergetics, 1985.
14. Hnatič M., Honkonen J., Lučivjansk§ T. Field-theoretic technique for irreversible reaction processes // Physics of Particles and Nuclei. — 2013. — Vol. 44, no. 2. — P. 316–348.
15. Hnatich M., Honkonen J. Velocity-fluctuation-induced anomalous kinetics of the A + A → reaction // Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics. — 2000. — Vol. 61, no. 4 Pt A. — P. 3904–3911.
16. M. Hnatich, J. Honkonen, T. Lučivjanský, Field theory approach in kinetic reaction: Role of random sources and sinks, Theoretical and Mathematical Physics 169 (1) (2011) 1489–1498. arXiv:1109.6435, doi:10.1007/s11232-011-0125-8.
17. Waage P., Gulberg C. M. Studies concerning affinity // J. Chem. Educ. — 1986. — Vol. 63, no. 12. — P. 1044.
18. Gorban A. N., Yablonsky G. S. Three Waves of Chemical Dynamics // Math. Model. Nat. Phenom. Vol. — 2015. — Vol. 10, no. 5. — P. 1–5.
19. Doi M. Second quantization representation for classical many-particle system // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1976. — Vol. 9, no. 9. — P. 1465–1477.
20. Doi M. Stochastic theory of diffusion-controlled reaction // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1976. — Vol. 9, no. 9. — P. 1479–1495.
21. Peliti L. Path integral approach to birth-death processes on a lattice // Journal de Physique. — 1985. — Vol. 46, no. 9. — P. 1469–1483.
22. Cajori F. A History of Mathematical Notations. — 1929. — Vol. 2. — P. 367.
23. Dirac P. A. M. A new notation for quantum mechanics // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1939. — Vol. 35, no. 03. — P. 416.
24. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. — 1838. — Vol. 10. — P. 113–117.
25. Feller W. Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung // Acta Biotheoretica. — 1939. — Bd. 5, H. 1. — S. 11–40.
26. Feller W. On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications // Proceedings of the First. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. — 1949. — P. 403–432.

Поступила 2.10.2016

Об авторах:

Еферина Екатерина Геннадьевна, магистрантка Российского университета дружбы народов, eg.eferina@gmail.com;

Велиева Татьяна Рефатовна, ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов, trvelieva@gmail.com;

Королькова Анна Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов, akorolkova@sci.pfu.edu.ru;

Гнатич Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор Департамента теоретической физики Института экспериментальной физики Словацкой академии наук в Кошице, Словакия; научный факультет Университета Павла Йозефа Шафарика в Кошице, Словакия; заместитель директора Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, Дубна, Россия, hnatic@saske.sk;

Кулябов Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов; Лаборатория информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, yamadharma@gmail.com;

Севастьянов Леонид Антонович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов; Лаборатория теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, leonid.sevast@gmail.com.