УДК 519.622
DOI: 10.25559/SITITO.14.201803.533-541

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЖЁСТКОЙ ЗАДАЧИ НА СФЕРЕ МНОГОСЛОЙНЫМ МЕТОДОМ И МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ

Е.М. Будкина[1], Е.Б. Кузнецов[1], Д.А. Тархов[2], А.А. Гомзина[2], С.Д. Мальцев[2]
[1] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия

COMPARISON OF SOLVING A STIFF EQUATION ON A SPHERE BY THE MULTI-LAYER METHOD AND METHOD OF CONTINUING AT THE BEST PARAMETER

Elena M. Budkina[1], Evgenii B. Kuznetsov[1], Dmitry A. Tarkhov[2], Anastasia A. Gomzina[2], Semyon D. Maltsev[2]
[1] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia

Ключевые слова

Сфера; жёсткая задача; многослойный метод; наилучший параметр; сингулярно возмущенное уравнение.

Аннотация

Жёсткие задачи, связанные с решением сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений при применении стандартных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений часто приводят к существенным трудностям. Первой трудностью является потеря устойчивости вычислительного процесса, когда небольшие ошибки на отдельных шагах приводят к неконтролируемому росту погрешности вычислений в целом. Другая трудности, непосредственно связанная с первой, состоит в необходимости сильно уменьшать шаг интегрирования, что приводит к сильному замедлению вычислительного процесса. На примере одной жёсткой краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка на сфере проводится сравнение наших двух подходов к построению приближённых решений. Первый подход связан с построением приближённого многослойного решения задачи и основан на применении рекуррентных равенств, вытекающих из классических численных методов к интервалу переменной длины. В результате численное приближённое решение заменяется приближённым решением в виде функции, которую удобнее использовать для адаптации, построения графиков и других целей. Второй подход связан с продолжением решений по наилучшему параметру. Данный подход позволяет существенно сократить число шагов и повысить устойчивость вычислительного процесса по сравнению со стандартными методами.

Об авторах:

Будкина Елена Михайловна, старший преподаватель, кафедра математического и программного обеспечения вычислительных машин, систем, комплексов и сетей, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0787-0426, emb0909@rambler.ru

Кузнецов Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры моделирование динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет, (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9452-6577, kuznetsov@mai.ru

Тархов Дмитрий Альбертович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры высшая математика, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9431-8241, dtarkhov@gmail.com

Гомзина Анастасия Александровна, студент, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5448-0159, Gomzina.aa@edu.spbstu.ru

Мальцев Семён Дмитриевич, студент, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4798-1136, semyon.maltsev@gmail.com

Keywords

Sphere; stiff equation; multi-layer method; best parameter singularly perturbed equation.

Abstract

A stiff equation, linked with the solution of singularly perturbed differential equations with the use of standard methods of numeral solutions of simple differential equations often lead to major difficulties. First difficulty is the loss of stability of the counting process, when small errors on separate steps lead to an increase in the systematic errors in general. Another difficulty is, directly linked with the first one, consists of the need of decreasing the integrating step by a lot, which leads to a major decrease in the time taken for the calculations. On an example of a boundary value problem for a differential equation of second power on a sphere, comparison of our two approaches of constructing approximate values are held. The first approach is connected with the construction of an approximate multi-layer solution of the problem and is based on the use of recurrent equalities, that come out from classical numeral methods to the interval of a non-constant length. As a result, a numeral, approximated solution is replaced with an approximate solution in form of a function, which is easier to use for adaptation, building a graph and other needs. The second approach is linked with the continuation of the solutions by the best parameter. This method allows us to majorly decrease majorly the number of steps and increase the stability of the computing process compared to standard methods.

Введение

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенная задача [1]

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y, y'),\ y(0) = 0, y(1) = 0 \tag{1}$$

где $F(x, y, y') = A(x^2 + y^2 + (y')^2 - 4)$,

A - большой параметр.

Приведём (1) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = v \\ \dfrac{dv}{dx} = F(x, y, v) \end{cases} \tag{2}$$

При $A > 1$ решение встроенными функциями пакета Wolfram Mathematica не находится. Решение будем искать с помощью двух методов: приближенно-аналитического и численного.

Исследования, связанные с решением сингулярно возмущенных уравнений, начались в начале XX века в работах Л. Прандтля, связанных с описанием пограничного слоя в задачах движения вязкой жидкости. Впоследствии решением сингулярно возмущенных задач и задач с пограничным слоем занимались многие ученые: А. Н. Тихонов, Н. Н. Боголюбов, О. А. Олейник, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, M. Nagumo, В. С. Пугачев, С. А. Ломов, R. E. O'Malley, K. W. Chang, F. A. Howes, Н. Н. Нефедов, Н. Н. Калиткин, Г.И. Шишкин и другие. Все методы исследования сингулярно возмущенных уравнений можно разделить на численно-аналитические и численные. Становление теории сингулярно возмущенных уравнений было положено в работах Андрея Николаевича Тихонова [2-4]. Им впервые рассмотрен общий вид нелинейных уравнений и систем с малым параметром при старшей производной, дано определение области влияния решения вырожденного уравнения и вырожденной системы и доказаны первые результаты о близости решения вырожденного уравнения (системы уравнений) к решению исходной задачи. Андрей Николаевич создал известную научную школу ярким представителем которой является Аделаида Борисовна Васильева. Позднее она и ее ученики В.Ф.Бутузов, В.А Тупчиев, Н.Н.Нефедов и др. развили теорию сингулярных возмущений для уравнений, содержащих малые параметры при старших производных. Это было сделано как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для начально-краевых задач для уравнений в частных производных. В дальнейшем сингулярные уравнения с малым параметром при старшей производной будем называть сингулярно возмущенными. Ими были получены фундаментальные результаты по представлению решений сингулярно возмущенных задач асимптотическими рядами специальных видов. Основные полученные результаты изложены в монографиях [5,6]. Помимо рассмотрения задач с пограничными слоями, в работах А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова рассмотрены задачи с контрастными структурами (внутренними пограничными слоями) [7]. Обзор результатов, связанных с исследованием решений задач с контрастными структурами, дан в статье [8]. Кроме указанных работ, значительное место в исследовании существования решений задач с пограничными и внутренними слоями занимает монография К. Чанга и Ф. Хауэса [9], в которой излагается основа аппарата дифференциальных неравенств применительно к доказательству существования решений нелинейных краевых сингулярно возмущенных задач и рассмотрено множество практических приложений из математической физики. Стоит отметить, что на сегодняшний день аппарат дифференциальных неравенств играет одну из ведущих ролей при исследовании существования решения сингулярно возмущенных уравнений. В теории сингулярно возмущенных уравнений дифференциальные неравенства впервые использованы М. Нагумо [10]. В дополнение отметим вклад в теорию сингулярных возмущений С. А. Ломова и И. С. Ломова, в монографии которых [11] дана математическая теория пограничного слоя для линейных дифференциальных уравнений в одномерном и многомерном случаях для операторов с различными свойствами. Ранее С. А. Ломовым издана монография [12], в которой помимо линейных дифференциальных уравнений также рассмотрены и нелинейные. Продолжением указанных результатов за последние 5 лет являются многие работы. Отметим основные. Основные результаты в области численно-аналитических методов решения сингулярно возмущенных уравнений с пограничными и внутренними слоями принадлежат школе А. Н. Тихонова. В работах В. Ф. Бутузова с соавторами рассматривается построение асимптотики для сингулярно возмущенных краевых задач (Дирихле и Неймана) для эллиптических уравнений с внутренними и угловыми пограничными слоями

[13-15], а также для первой начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения [16]. Используется метод дифференциальных неравенств. Помимо этого, рассмотрены краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с многозонным внутренним слоем (контрастными структурами типа всплеск и ступенька) и построены асимптотические разложения для них [17].

Численно-аналитическое решение задачи многослойным методом

Приближённые решения будем строить методами [18]. Эти методы заключаются к применению формул для классических численных методов к интервалу переменной длины, что позволяет получить приближённое решение в виде функций. Данные методы позволили успешно решить ряд модельных задач [19-24] и задач построения моделей с реальными измерениями [25-28].

Применим нашу модификацию метода трапеций [29]

$$\begin{cases} y_{k+1}(x) = y_k(x) + 0.5h_k(x)(v_k(x) + v_{k+1}(x)) \\ v_{k+1}(x) = v_k(x) + 0.5h_k(x)(F(x_k(x), y_k(x), v_k(x)) + F(x_{k+1}(x), y_{k+1}(x), v_{k+1}(x))). \end{cases} \quad (3)$$

Для нашей задачи $F(x,y,v) = A(x^2 + y^2 + v^2 - 4)$ и (3) сводится к квадратному уравнению относительно v_{k+1}, которое решается явно.

Согласно [18], $h_k = \dfrac{x - x_0}{n}$, $x_k = x_0 + \dfrac{k(x - x_0)}{n}$, где n - число слоёв в формуле. В качестве приближённого решения рассматриваем $y_n(x)$. Считаем, что $v(x_0) = 0$, такая точка всегда есть при выполнении граничных условий задачи (1) по теореме Ролля. Значения x_0 и $y_0 = y(x_0)$ выбираем так, чтобы выполнялись граничные условия $y(0) = 0, y(1) = 0$. В качестве начальных значений в (3) берём $y_0(x) = y_0$, $v_0(x) = 0$.

Представим некоторые результаты вычислений. Решение из [1] не находится, в том числе, применением пакета пакета Wolfram Mathematica. При этом находится другое решение, но при $A > 1$ только методом подбора начальной точки, т.е. выбором значений x_0 и $y_0 = y(x_0)$ так, чтобы выполнялись граничные условия.

Вычисления показали, что в силу симметрии <<Eqn0020.eps>>оптимальное значение x_0 для решения, построенного по формуле (3), составляет 0.5.

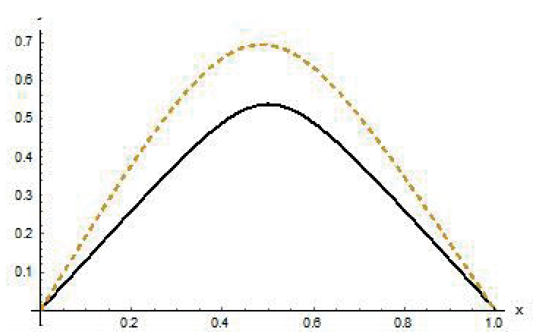

Рис. 1 График $y_n(x)$ при $n = 1$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A = 3$.

Fig. 1 Diagram $y_n(x)$ for $n = 1$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for

Для однослойного решения получается явная формула, однако ошибка в этом случае слишком велика.

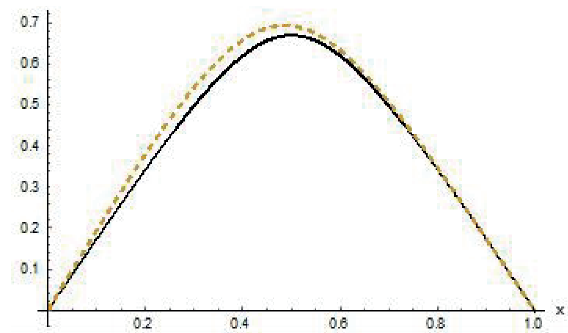

Рис. 2 График $y_n(x)$ при $n = 2$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A = 3$.

Fig. 2 Diagram $y_n(x)$ for $n = 2$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A = 3$

Двухслойное решение существенно лучше.

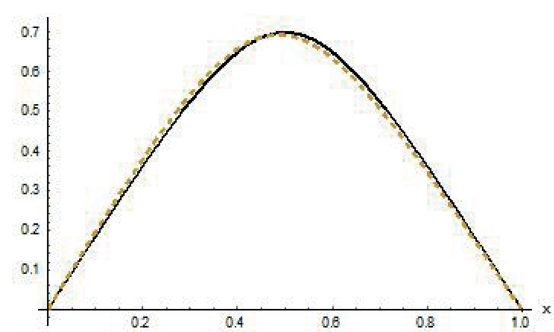

Рис. 3 График $y_n(x)$ при $n = 3$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A = 3$.

Fig. 3 Diagram $y_n(x)$ for $n = 3$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A = 3$

Трёхслойная формула получается ещё более точной. С увеличением числа слоёв точность возрастает, как и следовало ожидать.

Увеличение параметра A приводит к возрастанию погрешности $y_n(x)$, т.е. для сохранения точности приходится увеличивать число слоёв n.

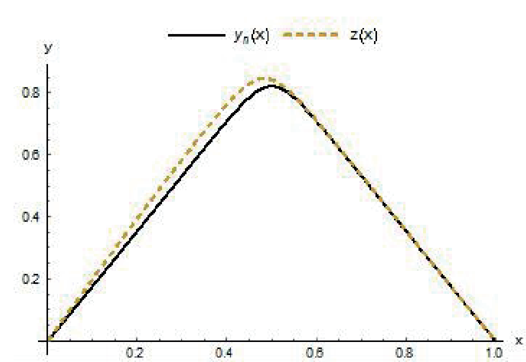

Рис. 4 График $y_n(x)$ при $n = 3$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A = 10$.

Fig. 4 Diagram $y_n(x)$ for $n = 3$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A = 10$

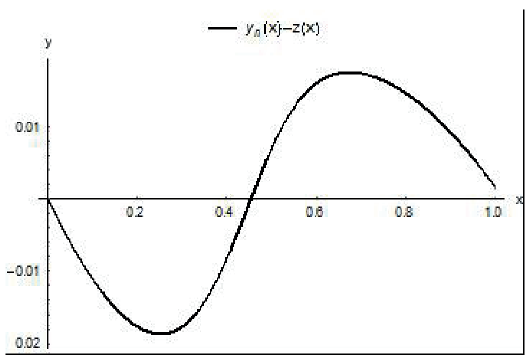

Рис. 5 График разности $y_n(x)$ при $n=3$ и приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A=10$.

Fig. 5 Diagram $y_n(x)$ for $n=3$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A=10$

Из данного графика видно, что погрешность не превышает 0.02

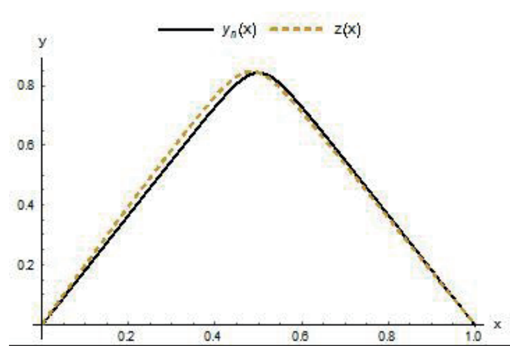

Рис. 6 График $y_n(x)$ при $n=4$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A=10$.

Fig. 6 Diagram $y_n(x)$ for $n=4$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A=10$

Также, как и при $A=3$, для $A=10$ увеличение числа слоёв повышает точность.

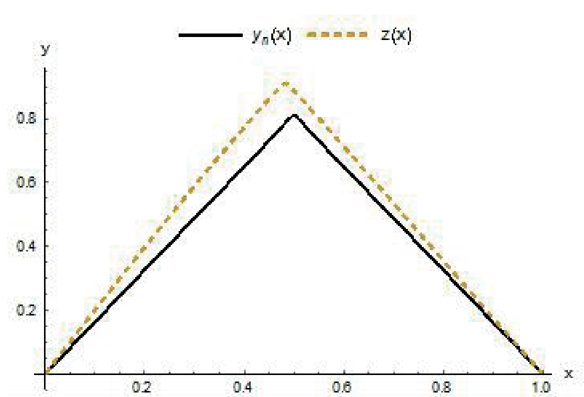

Рис. 7 График $y_n(x)$ при $n=3$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A=100$.

Fig. 7 Diagram $y_n(x)$ for $n=3$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A=100$

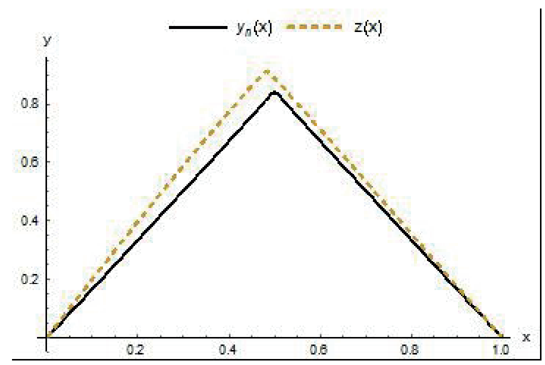

Рис. 8 График $y_n(x)$ при $n=4$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A=100$.

Fig. 8 Diagram $y_n(x)$ for $n=4$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A=100$

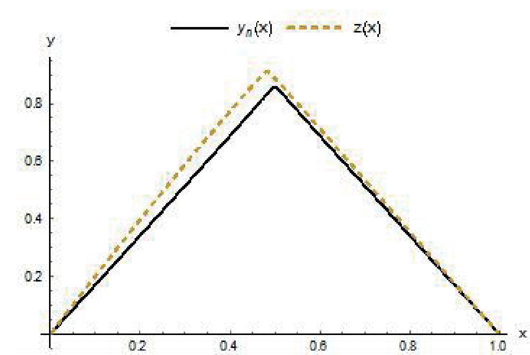

Рис. 9 График $y_n(x)$ при $n=5$ и график приближённого решения, построенного в пакете Wolfram Mathematica для $A=100$.

Рис. 9 Diagram $y_n(x)$ for $n=5$ and a diagram of the approximate solution plotted in the WolframMathematica package for $A=100$

При увеличении числа слоёв погрешность ещё более уменьшается.

Численное решение задачи методом продолжения по наилучшему параметру

Выполним параметризацию исходной системы (1). Для этого введем параметр λ - наилучший аргумент [30], такой, что: $x=x(\lambda),\ y=y(\lambda),\ v=v(\lambda)$.

Дискретный вариант параметризованной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} y-y_*-v(x-x_*)=0, \\ v-v_*-F(x,y,v)(x-x_*)=0, \\ (x-x_*)^2+(y-y_*)^2+(v-v_*)^2-\Delta\lambda^2=0 \end{cases} \quad (4)$$

Символом «*» обозначено решение, найденное на предыдущем шаге по λ. Исходную краевую задачу будем решать методом стрельбы. При решении задачи методом стрельбы краевая задача сводится к начальной задаче, т.е. краевые условия заменяются начальными условия: $y(0)=0,\quad v(0)=p$.

Решение начальной задачи зависит от параметра p, т.е.

$$y=y(\lambda,\ p),\ v=v(\lambda,\ p) \quad (5)$$

При этом функции (5) должны удовлетворять краевым условиям $y(0)=0, \quad v(0)=p, \quad y(1)=0$:

$$R(p)=b(y(0,p),v(0,p),y(1,p))=0. \tag{6}$$

Параметр p - можно найти каким-либо итерационным методом. Мы использовали метод Ньютона:

$$p_{s+1}=p_s-\left[\frac{\partial R}{\partial p}(p_s)\right]^{-1}R(p_s) \tag{7}$$

Сходимость метода Ньютона зависит от выбора начального приближения p_0. В [31] предлагается в (7) ввести новый параметр $\propto$:

$$\Phi(p,\mu)=R(p)-(1-\mu)R(p_0)=0, \quad \mu\in[0,1], \tag{8}$$

где p_0 - начальное значение параметра при $\mu=0$, при $\mu=1$ выполняется условие (7).

Решая систему (8) при

$$0=\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_m=1, \tag{9}$$

находим p итерационным методом Ньютона.

$$p_{s+1}=p_s-\left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}(p_s,\mu)\right]^{-1}\Phi(p_s,\mu). \tag{10}$$

Но т.к. параметр $\propto$ меняется не монотонно, то необходимо выполнить параметризацию (6) по наилучшему параметру [32]. Для этого кривая решения (6) разбивается на h элементов: $0=\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_h=H$. Решение находится по параметру η. Тогда в системе (6) $p_r=p(\eta_r), \quad \mu_r=p(\eta_r)$.

Параметризация по наилучшему параметру:

$$R(p)-(1-\mu)R(p_0)=0,$$

$$\sum_{r=1}(p-p_r^*)^2+(\mu-\mu_r^*)^2-\Delta\eta_r^2=0. \tag{11}$$

В этом случае метод Ньютона сходится не зависимо от начального значения и Якобиан системы (10) не является вырожденным.

Результаты вычислений приведены на рис.10-12.

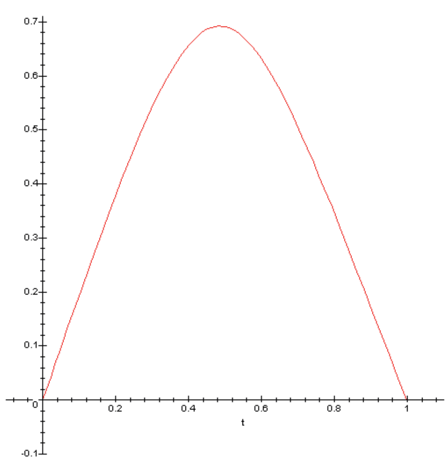

Рис. 10. График приближенного решения системы (5) для $A=3$.
Fig. 10. Plot of approximate system solutions (5) for $A=3$

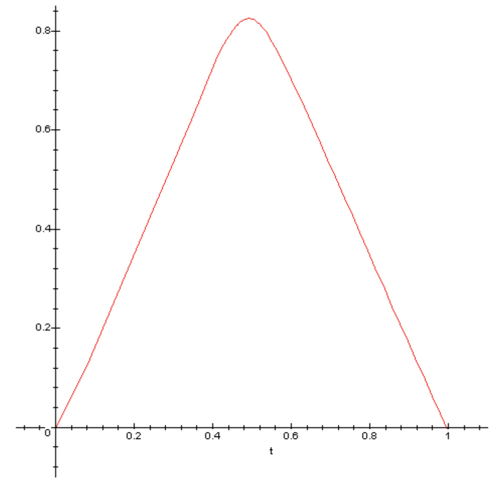

Рис. 11. График приближенного решения системы (5) для $A=10$.
Fig. 11. Plot of approximate system solutions (5) for $A=10$

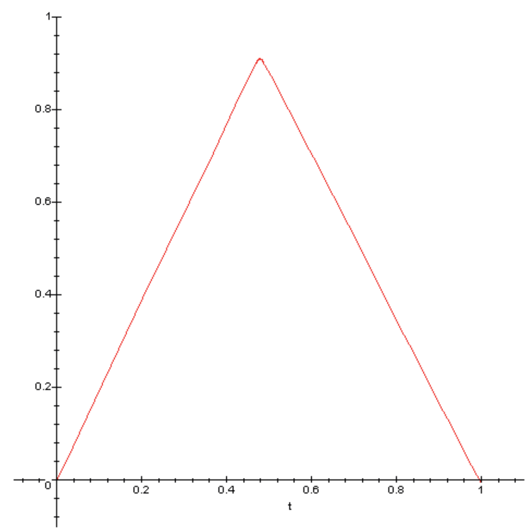

Рис. 12. График приближенного решения системы (5) для $A=100$.
Fig. 12. Plot of approximate system solutions (5) for $A=100$.

Вывод

Сравнение рисунков 10-12 с рисунками 1-9 позволяет сделать два вывода:

1) Симметрия решений относительно $x=0.5$ при двух различных подходах позволяет предположить, что асимметрия приближённых решений, построенных в пакете Wolfram Mathematica, связана с особенностями пакета, а не задачи.

2) Незначительное различие решений, построенных с помощью принципиально разных подходов даёт основание предполагать, что соответствующая им ошибка также невелика.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 18-19-00474).

Список использованных источников

[1] *Качалов В.И., Бесова М.И.* Метод голоморфной регуляризации в теории краевых задач // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина. «Понтрягинские чтения – XXIX». М: ООО «МАКС Пресс», 2018. С. 125-126. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=34926029 (дата обращения: 21.06.2018).

[2] *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22(64), № 2. С. 193-204. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=6075&option_lang=rus (дата обращения: 21.06.2018).

[3] *Тихонов А.Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Математический сборник. 1950. Т. 27(69), № 1. С. 147-156. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5907&option_lang=rus (дата обращения: 21.06.2018).

[4] *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575-586. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5548&option_lang=rus (дата обращения: 21.06.2018).

[5] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

[6] *Васильева А.Б., Плотников А.А.* Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. М.: Физический факультет МГУ, 2008. 398 с.

[7] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т 4, № 3. С. 799–851. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=344&option_lang=rus (дата обращения: 21.06.2018).

[8] *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4-32. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=2615&option_lang=rus (дата обращения: 21.06.2018).

[9] *Чанг К., Хауэс Ф.* Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М.: Мир, 1988. 248 с.

[10] *Nagumo M.* Über das Verhalten der Integrals von für 0 // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1939. Vol. 21. Pp. 529-534.

[11] *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: МГУ, 2011. 456 с.

[12] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.

[13] *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 9. С. 1427-1447. DOI: 10.7868/S0044466913090068

[14] *Бутузов В.Ф., Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в нелинейных эллиптических задачах, содержащих производные первого порядка // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 7-31. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21351116 (дата обращения: 21.06.2018).

[15] *Бутузов В.Ф., Белошапко В.А.* Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 515-528. DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-515-528

[16] *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденного уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 4. С. 605–624. DOI: 10.7868/S0044466916040074

[17] *Бутузов В.Ф.* О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 3. С. 288–308. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308

[18] *Lazovskaya T., Tarkhov D.* Multilayer neural network models, based on grid methods // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 158, no. 1. P. 012061. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012061

[19] *Тархов Д.А., Шершнева Е.А.* Приближенные аналитические решения уравнения Матьё, построенные на основе классических численных методов / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO 2016). Москва, Россия, 25-26 ноября 2016. CEUR Workshop Proceedings. Т. 1761. С. 356-362. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf (дата обращения: 21.06.2018).

[20] *Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А.* Приближенные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO 2016). Москва, Россия, 25-26 ноября 2016. CEUR Workshop Proceedings. Т. 1761. С. 393-400. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf (дата обращения: 21.06.2018).

[21] *Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A.* Multi-Layer Solution of Heat Equation / B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 17–22. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_3

[22] *Боровская О.Д., Лазовская Т.В., Сколис К.В., Тархов Д.А., Васильев А.Н.* Многослойные параметрические модели процессов в грануле пористого катализатора // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14, № 1. С. 27-37. DOI: 10.25559/SITITO.14.201801.027-037

[23] *Картавченко А.Е.,Тархов Д.А.* Сравнение методов построения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений на примере элементарных функций // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13, № 3. С. 16-23. DOI: 10.25559/SITITO.2017.3.440

[24] *Васильев А.Н., Свинцов М.В., Тархов Д.А.* Развитие анализа многослойных методов решения волнового уравнения со

специальными начальными условиями / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent'2017). Москва, Россия, 24-26 ноября 2017. CEUR Workshop Proceedings. Т. 2064. С. 393-400. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper16.pdf (дата обращения: 21.06.2018).

[25] *Тархов Д.А., Каверзнева Т.Т., Терёшин В.А., Виноходов Т.В., Капицин Д.Р., Зулькарнай И.У.* Применение новых методов построения многослойных полуэмпирических моделей к задаче нелинейного изгиба консольного стержня / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent'2017). Москва, Россия, 24-26 ноября 2017. CEUR Workshop Proceedings. Т. 2064. С. 143-149. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper17.pdf (дата обращения: 21.06.2018).

[26] *Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R.* Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging / B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 138–146. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_21

[27] *Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R.* A Two-layer Semi-Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1044, conference 1. P. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/1044/1/012005

[28] *Bortkovskaya M.R., Vasilyev P.I., Zulkarnay I.U., Semenova D.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P., Shishkina I.A.* Modeling of the membrane bending with multilayer semi-empirical models based on experimental data / V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) // Proceedings of the 2nd International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017). Moscow, Russia: November 24–26, 2017. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2064. Pp. 150-156. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf (дата обращения: 21.06.2018).

[29] *Hairer E., Norsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987. 482 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12607-3

[30] *Shalashilin V.I., Kuznetsov E.* Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Springer Netherlands, 2003. DOI: 10.1007/978-94-017-2537-8

[31] *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наукова Думка, 1986. 224 с.

[32] *Будкина Е.М., Кузнецов Е.Б.* Решение краевых задач для дифференциально - алгебраических уравнений // Материалы XIX международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015). М.: Изд-во МАИ, 2015. С. 44-46. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24658093 (дата обращения: 21.06.2018).

Поступила 21.06.2018; принята в печать 10.08.2018; опубликована онлайн 30.09.2018.

References

[1] Kachalov V.I., Besov M.I. Method of holomorph regularization in the theory of boundary problems. *Pontryagin Readings – XXIX*. M: MSU, 2018. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=34926029 (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[2] Tikhonov A.N. Dependence of solutions of differential equations on a small parameter. *Sbornik: Mathematics.* 1948; 22(64)-2:193-204. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=6075&option_lang=rus (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[3] Tikhonov A.N. On systems of differential equations containing parameters. *Sbornik: Mathematics.* 1950; 27(69)-1:147-156. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5907&option_lang=rus (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[4] Tikhonov A.N. Systems of differential equations containing small parameters for derivatives. *Sbornik: Mathematics.* 1952; 31(73)-3:575-586. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5548&option_lang=rus (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[5] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asymptotic methods in the theory of singular perturbations. M.: Higher School, 1990. 208 p. (In Russian)

[6] Vasilyeva A.B., Plotnikov A.A. Asymptotic theory of singularly perturbed problems. M.: Physics Faculty of Moscow State University, 2008. 398 p. (In Russian)

[7] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Contrast structures in singularly perturbed problems. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* = Fundamental and Applied Mathematics. 1998; 4(3):799-851. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=344&option_lang=rus (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[8] Butuzov V.F., Vasilyeva A.B., Nefedov N.N. Asymptotic theory of contrast structures (review). *Automation and Remote Control.* 1997; 58(7):1068–1091. (In Russian)

[9] Chang K., Howes F. Nonlinear Singularly Perturbed Boundary Value Problems. Theory and applications. M.: Mir, 1988. 247 p. (In Russian)

[10] Nagumo M. Über das Verhalten der Integrals von für 0. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*. 1939; 21:529-534.

[11] Lomov S.A. Lomov I.S. Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer. M.: Publishing House of Moscow University, 2011. 456 p. (In Russian)

[12] Lomov S.A. Introduction to the general theory of singular perturbations. M.: Nauka, 1981. 400 p. (In Russian)

[13] Butuzov V.F., Levashova N.T., Mel'nikova A.A. A steplike contrast structure in a singularly perturbed system of elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013. 53; 9:1239–1259. DOI: 10.1134/S0965542513090054

[14] Butuzov V.F., Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Nonlinear Elliptic Problems Containing Derivatives of First Order. *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2014; 21(1):7-31. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21351116 (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[15] Butuzov V.F., Beloshapko V.A. Singularly perturbed elliptic

Dirichlet problem with multiple root of the degenerate equation. *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2016; 23(5):515-528. (In Russian) DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-515-528

[16] Butuzov V.F., Bychkov A.I. Asymptotics of the solution of an initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in the case of a triple root of a degenerate equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016; 56(4):593-611. (In Russian) DOI: 10.1134/S0965542516040060

[17] Butuzov V.F. On contrast structures with a multi-zone inner layer. *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2017; 24(3):288-308. (In Russian) DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308

[18] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models, based on grid methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016; 158(1):012061. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012061

[19] Tarkhov D., Shershneva E. Approximate analytical solutions of Mathieu's equations based on classical numerical methods. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the XI International Scientific-Practical Conference "Modern Information Technologies and IT-Education" (SITITO 2016).* Moscow, Russia, November 25-26. 2016. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1761. Pp. 356-362. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[20] Vasilyev A., Tarkhov D., Shemyakina T. Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the XI International Scientific-Practical Conference "Modern Information Technologies and IT-Education" (SITITO 2016).* Moscow, Russia, November 25-26. 2016. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1761. Pp. 393-400. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[21] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation. B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research.* Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 17–22. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_3

[22] Borovskaya O.D., Lazovskaya T.V., Skolis X.V., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Multilayer parametric models of processes in a porous catalyst pellet. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018; 14(1):27-37. DOI: 10.25559/SITITO.14.201801.027-037

[23] Kartavchenko A.E., Tarhov D.A. Comparison of methods for construction of approximate analytical solutions of differential equations on the example of elementary functions. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2017; 13(3):16-23. (In Russian) DOI: 10.25559/SITITO.2017.3.440

[24] Vasilyev A.N., Svintsov M.V., Tarkhov D.A. Development of analysis of multilayer methods for solving wave equation with special initial conditions. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the 2nd International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017).* Moscow, Russia: November 24–26, 2017. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2064. Pp. 393-400. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper16.pdf (accessed 21.06.2018). (In Russian)

[25] Tarkhov D.A., Kaverzneva T.T., TereshinV.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R., Zulkarnay I.U. New methods of multilayer semiempirical models in nonlinear bending of the cantilever. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the 2nd International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017).* Moscow, Russia: November 24–26, 2017. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2064. Pp. 143-149. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper17.pdf (accessed 21.06.2018).

[26] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research*. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 138–146. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_21

[27] Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A Two-layer Semi-Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam. *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2018; 1044(conf. 1):012005. DOI: 10.1088/1742-6596/1044/1/012005

[28] Bortkovskaya M.R., Vasilyev P.I., Zulkarnay I.U., Semenova D.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P., Shishkina I.A. Modeling of the membrane bending with multilayer semi-empirical models based on experimental data. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the 2nd International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017).* Moscow, Russia: November 24–26, 2017. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2064. Pp. 150-156. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf (accessed 21.06.2018).

[29] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987. 482 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12607-3

[30] Shalashilin V.I., Kuznetsov E. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Springer Netherlands, 2003. DOI: 10.1007/978-94-017-2537-8

[31] Samoylenko A.M., Ronto N.I. Numerically-analytical methods for investigating solutions of boundary-value problems [Chislenno-analiticheskie metody issledovaniya reshenij kraevyh zadach]. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 224 p. (In Russian)

[32] Budkina E.M., Kuznetsov E.B. Solution of boundary value problems for differential algebraic equations. *Proceedings of the 11th International Conference on Computational Mechanics and Contemporary Applied Software Systems.* M.: Izd-vo MAI, 2015. Pp. 44-46. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24658093 (accessed 21.06.2018). (In Russian)

Submitted 21.06.2018; revised 10.08.2018; published online 30.09.2018.

About the authors:

Elena M. Budkina, Senior Lecturer, Moscow Aviation Institute (National Research University), (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0787-0426, emb0909@rambler.ru

Evgenii B. Kuznetsov, D.Sc. (Physics and Mathematics), professor, department «Modelling of dynamic system», Moscow Aviation Institute (National Research University), (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9452-6577, kuznetsov@mai.ru

Dmitry A. Tarkhov, D. Sc. (Engineering), professor, department of Higher Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnic Str., 195251 St. Petersburg, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9431-8241, dtarkhov@gmail.com.

Anastasia A. Gomzina, Mechanical Engineering student of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnic Str., 195251 St. Petersburg, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5448-0159, Gomzina.aa@edu.spbstu.ru

Semyon D. Maltsev, Mechanical Engineering student of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnic Str., 195251 St. Petersburg, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4798-1136, semyon.maltsev@gmail.com