

УДК 519.622

DOI: 10.25559/SITITO.14.201803.542-551

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С КОНТРАСТНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Е.Б. Кузнецов¹, С.С. Леонов¹, Д.А. Тархов², Е.Д. Цапко¹, А.А. Бабинцева²¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING PROBLEMS WITH CONTRAST STRUCTURES

Evgenii B. Kuznetsov¹, Sergey S. Leonov¹, Dmitry A. Tarkhov², Ekaterina D. Tsapko¹, Anastasia A. Babintseva²¹ Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

© Кузнецов Е.Б., Леонов С.С., Тархов Д.А., Цапко Е.Д., Бабинцева А.А., 2018

Ключевые слова

Контрастные структуры;
метод продолжения решения;
наилучший аргумент; плохая
обусловленность; задача
Коши; обыкновенные
дифференциальные
уравнения;
полуаналитические методы.

Аннотация

В статье исследуются особенности численного решения задач Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с контрастными структурами (внутренними пограничными слоями). Подобные задачи возникают при моделировании некоторых задач гидродинамики, химической кинетики, теории горения, вычислительной геометрии. Аналитическое решение задач с контрастными структурами удается найти только в исключительных случаях. Численное решение также затруднительно, что связано с плохой обусловленностью уравнений в окрестностях внутренних и пограничных слоев. Для достижения приемлемой точности численного решения необходимо значительно уменьшать шаг интегрирования, что приводит к возрастанию вычислительной сложности. На примере одной тестовой задачи с двумя пограничными и одним внутренним слоями показаны недостатки использования традиционных явных методов Эйлера и Рунге-Кутты 4 порядка точности, а также неявного метода Эйлера с постоянным и переменным шагом интегрирования. Для устранения вычислительных недостатков традиционных методов предложено два подхода. В качестве первого подхода применяется метод наилучшей параметризации, смысл которого состоит в переходе к новому аргументу, отсчитываемому по касательной вдоль интегральной кривой рассматриваемой задачи Коши. Этот метод позволяет получить наилучшим образом обусловленную задачу Коши и устранить вычислительные трудности, возникающие в окрестности внутренних и пограничных слоев. Вторым подходом является полуаналитический способ решения задачи Коши, разрабатываемый в работах А. Н. Васильева, Д. А. Тархова, их учеников и последователей. Данный подход позволяет получить многослойное функциональное решение, которое можно рассматривать как своего рода нелинейную асимптотику. Применительно к решению задач с контрастными структурами полуаналитический метод позволяет получать решение приемлемой точности, даже при высокой жесткости. Проводится анализ используемых методов. Полученные результаты сравниваются с аналитическим решением выбранной тестовой задачи, а также с результатами, представленными в работах других авторов.

Об авторах:

Кузнецов Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры моделирование динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет, (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

Леонов Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирование динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

Тархов Дмитрий Альбертович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры высшая математика, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, dtarkhov@gmail.com

Цапко Екатерина Дмитриевна, студент, кафедра моделирование динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4215-3510>, zapkokaty@gmail.com

Бабинцева Анастасия Андреевна, студент, кафедра прикладная математика и физика, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9326-7684>, babintseva01@mail.ru



Keywords

Contrast structures; method of solution continuation; the best argument; ill-conditionality; Cauchy problem; ordinary differential equations; semi-analytical methods.

Abstract

In this paper, we investigate the features of the numerical solution of Cauchy problems for nonlinear differential equations with contrast structures (interior layers). Similar problems arise in the modeling of certain problems of hydrodynamics, chemical kinetics, combustion theory, computational geometry. Analytical solution of problems with contrast structures can be obtained only in particular cases. The numerical solution is also difficult to obtain. This is due to the ill-conditionality of the equations in the neighborhood of the interior and boundary layers. To achieve an acceptable accuracy of the numerical solution, it is necessary to significantly reduce the step size, which leads to an increase of a computational complexity. The disadvantages of using the traditional explicit Euler method and fourth-order Runge-Kutta method, as well as the implicit Euler method with constant and variable step sizes are shown on the example of one test problem with two boundaries and one interior layers. Two approaches have been proposed to eliminate the computational disadvantages of traditional methods. As the first method, the best parametrization is applied. This method consists in passing to a new argument measured in the tangent direction along the integral curve of the considered Cauchy problem. The best parametrization allows obtaining the best conditioned Cauchy problem and eliminating the computational difficulties arising in the neighborhood of the interior and boundary layers. The second approach for solving the Cauchy problem is a semi-analytical method developed in the works of Alexander N. Vasilyev and Dmitry A. Tarkhov their apprentice and followers. This method allows obtaining a multilayered functional solution, which can be considered as a type of nonlinear asymptotic. Even at high rigidity, a semi-analytical method allows obtaining acceptable accuracy solution of problems with contrast structures. The analysis of the methods used is carried out. The obtained results are compared with the analytical solution of the considered test problem, as well as with the results of other authors.

Введение

В статье рассматривается решение задач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $n - 3$ порядка с малым параметром ε

$$\varepsilon \frac{d^n u}{dt^n} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right), \quad \varepsilon > 0$$

и начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \frac{d^k u}{dt^k}(0) = u_0^k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

В работах А. Н. Тихонова [1] дифференциальные уравнения типа (1) получили название уравнений с малым параметром при старшей производной. В дальнейшем они стали известны как сингулярно возмущенные уравнения. Особенностью задач данного класса является наличие на их интегральных кривых одного или нескольких участков быстрого изменения.

При наличии участков быстрого изменения только в одной или обеих граничных точках, задачу (1)-(2) принято называть задачей с пограничными слоями. Одним из первых эффект пограничного слоя отметил в 1905 году Л. Прандтль, рассматривая движение вязкой жидкости с малым трением, описываемое уравнениями Навье-Стокса [2]. Начиная с конца 40-х годов прошлого века в работах А. Н. Тихонова [1, 3, 4], А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова [5, 6], С. А. Ломова [7] разработан ряд методов построения решения сингулярно возмущенных задач в форме асимптотических рядов по степеням малого параметра.

Кроме пограничных слоев в сингулярно возмущенных задачах могут возникать и внутренние, в работах А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова [8] они получили название контрастных структур. Они возникают при моделировании задач гидроаэродинамики, химической кинетики, теории каталитических реакций, теории горения, а также в задачах дифференциальной геометрии и при проектировании атомных реакторов [9]. Несмотря на актуальность и большую прикладную значимость, при решении таких задач исследователи зачастую сталкиваются с вычислительными трудностями.

Когда функция правой части уравнения является нелинейной, найти аналитическое решение затруднительно. Использование асимптотических методов, разработанные для задач с контрастными структурами в статьях А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова [8, 10-12], эффективно лишь при малых значениях параметра $\ll \varepsilon \ll 0.005$. При увеличении значения параметра $\ll \varepsilon \ll 0.006$ увеличивается и количество слагаемых асимптотического ряда, которые необходимо учитывать. Использование численных методов также сопряжено с рядом трудностей. Это связано с тем, что в окрестностях пограничных и внутренних слоев явные схемы [13] теряют устойчивость. Даже существенное уменьшение шага интегрирования не всегда дает результат. При использовании неявных схем и специальных методов решения жестких задач [14] проблема потери устойчивости уходит, но появляются новые, связанные с решением нелинейных уравнений и их систем. При этом вычислительная сложность при использовании неявных схем растет вместе с размерностью системы уравнений. Более



того, ряд неявных схем не может преодолевать внутренние слои.

В работах В. И. Шалашилина, Е. Б. Кузнецова и их учеников [15] развивается метод продолжения решения по наилучшему аргументу и его модификации [16, 17]. Идея метода состоит в замене исходного аргумента задачи Коши на новый, отсчитываемый по касательной вдоль ее интегральной кривой. Доказано, что полученный аргумент делает задачу наилучшим образом обусловленной. Показано, что переход к наилучшему аргументу позволяет получить несколько преимуществ перед традиционными численными методами для плохо обусловленных задач Коши [17].

Кроме того, применяется предложенный в статье [18] полуаналитический метод, суть которого состоит в применении формул традиционных явных и неявных схем численного решения для интервалов с переменной правой границей. Данный метод был успешно применён к ряду задач [19-25], имеющих практический интерес. В частности, в работах [19-21] с помощью данного метода были получены приближённые решения, лучше соответствующие экспериментальным данным, чем точные решения исходных дифференциальных уравнений.

Цель исследования

В работах Н. Н. Калиткина и А. А. Белова [26, 27] рассмотрен ряд жестких задач Коши с контрастными структурами и методы их решения. Так как традиционные численные методы решения задачи Коши малоэффективны для задач с контрастными структурами, как указывается в работах [26, 27], для решения используется метод длины дуги (продолжения решения по наилучшему аргументу) с переменным шагом, изменяемым по правилу Рунге и кривизне интегральной кривой [28]. Но в указанных работах не проводится сравнение метода длины дуги с традиционными явными и неявными методами. Целью данной работы является сравнительный анализ методов решения задач с

контрастными структурами и разработка нового метода решения на основе полуаналитического подхода. Будет рассмотрен ряд явных и неявных методов решения задачи Коши с постоянным и переменным шагом, а также метод продолжения решения по наилучшему аргументу. Все полученные результаты будут сопоставлены друг с другом, а также с аналитическим решением и известными результатами других авторов.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши, предложенную в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [26, 27]

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\xi(t)(u^2 - a^2)^2}{(u^2 + a^2)}, \quad u(0) = 0, \quad t \in [0; 2\pi].$$

* MERGEFORMAT (3)

При $\xi(t) = \xi_0 \cos t$ задача может быть проинтегрирована аналитически

$$u(t) = -\frac{2a^2\xi_0 \sin t}{1 + \sqrt{1 + 4a^2\xi_0^2 \sin^2 t}}.$$

* MERGEFORMAT (4)

Жёсткость задачи (3) определяется величиной множителя ξ_0 , стоящего при периодической функции. При приближении косинуса к нулю скорость изменения решения так же стремится к нулю независимо от величины ξ_0 . Однако при приближении значения косинуса к единице скорость изменения решения будет достигать своего максимума. При больших значениях ξ_0 происходит резкое изменение решения в окрестности точек максимума и минимума косинуса. Таким образом, задачу можно условно разбить на три класса [27]: при $\xi_0 < 10$ задача нежесткая, при $\xi_0 \geq 10$ – жесткая, а при $\xi_0 \geq 1000$ – сверхжесткая. На рисунке 1 изображены интегральные кривые задачи (3) при различных значениях ξ_0 . Здесь и далее будем полагать $a = \pi$.

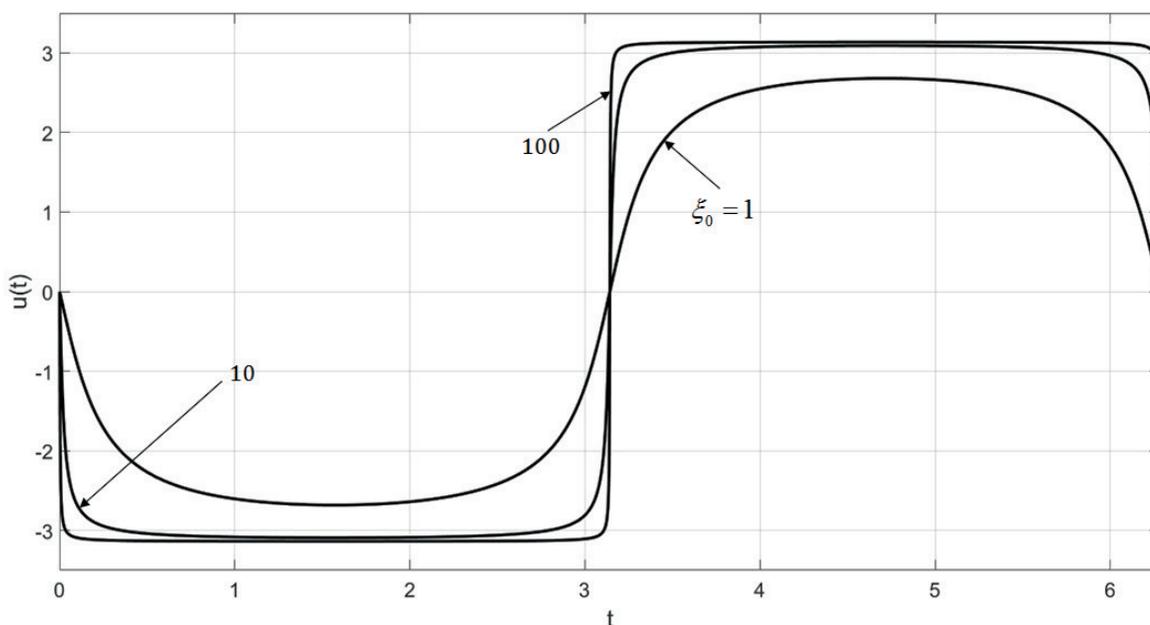


Рис. 1. Аналитическое решение задачи при $\xi_0 = 1$, $\xi_0 = 10$, $\xi_0 = 100$
Fig. 1. Analytical solution (4) of the task (3) for $\xi_0 = 1$, $\xi_0 = 10$, $\xi_0 = 100$



Традиционные численные методы с постоянным шагом

Рассмотрим применение традиционных явных и неявных схем с постоянным шагом интегрирования к решению начальных задач с контрастными структурами. К наиболее простым традиционным методам относятся явные методы Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка точности. В таблице 1 приведены средняя абсолютная погрешность полученного численного решения ε , вычисляемая с использованием аналитического решения (4), и время счета t_A для задачи (3). Можно видеть, что метод Рунге-Кутты за счёт более высокого порядка точности позволяет получить решение с меньшей погрешностью, но затрачивает в разы больше времени, по сравнению с явным методом Эйлера. Отметим, что максимальный размер шага интегрирования не может превышать величины ξ_0^{-1} . Как видно из таблицы 1, этот факт отражается в невозможности построить решение для $\xi_0 = 10$ при $h = 0.1$ и для $\xi_0 = 100$ при $h = 0.01$.

Таблица 1. Погрешность решения и время счета для задачи (3), явные методы с постоянным шагом
Table 1. Solution error and calculating time for the task (3), explicit methods with a fixed increment

Параметры		Явный метод Эйлера		Метод Рунге-Кутты	
ξ_0	h	ε	$t_{c, c}$	ε	$t_{c, c}$
1	0.1	0.4548	0.009	$2.1332 \cdot 10^{-4}$	0.0081
	0.01	0.0361	0.0095	$2.2776 \cdot 10^{-8}$	0.0656
	0.001	0.0035	0.0255	$2.1461 \cdot 10^{-12}$	0.1732
10	0.1	-	-	-	-
	0.01	0.0826	0.0109	$2.3893 \cdot 10^{-5}$	0.0168
	0.001	0.008	0.0301	$2.5136 \cdot 10^{-9}$	0.0759
100	0.1	-	-	-	-
	0.01	-	-	-	-
	0.001	0.0127	0.0381	$2.4843 \cdot 10^{-6}$	0.1011

Полученные результаты обусловлены ограниченной областью устойчивости явных методов. Для численного решения жестких задач часто используют неявные методы, которые обладают значительно большей областью устойчивости. Можно ожидать, что неявные методы не потребуют сильного измельчения шага интегрирования.

В таблице 2 приведены результаты применения неявного метода Эйлера с постоянным шагом к решению задачи (3). Получаемое в ходе решения нелинейное уравнение решается методом простой итерации (МПИ) и методом Ньютона (МН). В сравнении с явным методом Эйлера (см. таблицу 1) видно, что неявный метод Эйлера позволяет получить результат с несущественно меньшей погрешностью, но при этом затрачивает значительно больше времени счета (на порядок и более).

Таблица 2. Погрешность решения и время счета для задачи (3), неявный метод Эйлера с постоянным шагом
Table 2. Solution error and calculating time for the task (3), implicit Euler method with a fixed increment

Параметры		Неявный метод Эйлера			
ξ_0	h	МПИ		МН	
		ε	$t_{c, c}$	ε	$t_{c, c}$
1	0.1	0.3137	0.0662	0.3138	0.0255
	0.01	0.034	0.1774	0.0345	0.1457
	0.001	$8.6629 \cdot 10^{-4}$	1.188	0.0035	0.6134
10	0.1	-	-	-	-
	0.01	0.074	0.1864	0.0787	0.0878
	0.001	0.0029	1.1653	0.008	0.7302
100	0.1	-	-	-	-
	0.01	-	-	-	-
	0.001	0.0078	0.9977	0.0126	1.5954

Приведенные выше результаты показывают, что традиционные явные и неявные методы позволяют получить решение задачи (3) только для значений $\xi_0 \leq 100$. Для больших значений ξ_0 приходится значительно измельчать шаг интегрирования, что приводит к увеличению времени счета на порядки. Более эффективным методом решения задач с контрастными структурами является продолжение решения по наилучшему аргументу.

Метод продолжения решения по наилучшему аргументу

Вспользуемся методом продолжения решения по наилучшему аргументу [16]. Введем новый аргумент λ , отсчитываемый по касательной вдоль интегральной кривой исходной задачи, в форме

$$d\lambda^2 = du^2 + dt^2.$$

Используя этот аргумент, получим следующую преобразованную задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{-\xi_0 \cos t (u^2 - a^2)^2}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi_0^2 \cos^2 t (u^2 - a^2)^4}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(u^2 + a^2)}{\sqrt{(u^2 + a^2)^2 + \xi_0^2 \cos^2 t (u^2 - a^2)^4}}, \quad u(0) = 0, \quad t(0) = 0.$$

* MERGEFORMAT (5)

В таблице 3 приведены результаты решения задач (3) и (5) явным методом Рунге-Кутты с постоянным шагом. Шаг l по аргументу λ фиксировался, а шаг h по аргументу t подбирался таким образом, чтобы порядки средней ошибки ε совпадали для обеих задач. Можно видеть, что для преобразованной задачи (5) можно использовать более большой шаг интегрирования (вплоть до нескольких порядков) по сравнению с задачей (3). Для больших значений ξ_0 это позволяет значительно сократить время счета. Для явного метода Эйлера получены аналогичные результаты.

Таблица 3. Средняя погрешность ε и время счёта t_A параметризованной и непараметризованной задач методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом

Table 3. Average error ε and calculating time t_A of parametrized and non-parametrized problems by the 4th order Runge-Kutta method with a fixed increment

ξ_0	Параметризованная			Непараметризованная		
	l	ε	$t_{c, c}$	h	ε	$t_{c, c}$
1	0.1	$5.4369 \cdot 10^{-7}$	0.0213	0.02	$3.6307 \cdot 10^{-7}$	0.0418
	0.01	$2.9799 \cdot 10^{-11}$	0.183	0.002	$3.6427 \cdot 10^{-11}$	0.2405
	0.001	$5.0522 \cdot 10^{-14}$	0.5505	0.0002	$6.4592 \cdot 10^{-13}$	2.0987
10	0.1	$2.4647 \cdot 10^{-4}$	0.0236	0.02	$3.0375 \cdot 10^{-4}$	0.0422
	0.01	$3.2723 \cdot 10^{-9}$	0.0969	0.001	$2.5136 \cdot 10^{-9}$	0.4414
	0.001	$3.7533 \cdot 10^{-12}$	0.5886	0.0002	$3.662 \cdot 10^{-12}$	2.2979
100	0.1	0.3525	0.0289	0.004	0.0012	0.1303
	0.01	$4.834 \cdot 10^{-6}$	0.1178	0.001	$2.4843 \cdot 10^{-6}$	0.4484
	0.001	$5.0063 \cdot 10^{-11}$	0.5289	0.00005	$1.7076 \cdot 10^{-11}$	8.2501
1000	0.1	-	-	-	-	-
	0.01	0.0047	0.2086	0.00047	0.0012	0.9134
	0.001	$4.0885 \cdot 10^{-8}$	0.5288	0.00007	$5.9638 \cdot 10^{-8}$	5.9466

Переменный шаг интегрирования

На практике, вместо постоянного шага интегрирования часто используется переменный шаг. Существует множество методов построения неравномерных сеток [29], но традиционно используется процедура смены шага интегрирования с контролем точности по правилу Рунге [30]. В таблице 4 приведены результаты, полученные при переменном шаге интегрирования, изме-



няемому по правилу Рунге. Точность решения θ фиксировалась для преобразованной задачи (5) и равнялась 10^{-12} . Затем точность для исходной задачи (3) подбиралась из условия равенства порядков средней погрешности ε для обеих задач.

Таблица 4. Средняя погрешности ε и время счёта t_A параметризованной и непараметризованной задач методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом по правилу Рунге с точностью θ

Table 4. Average error ε and calculating time t_A of parametrized and non-parametrized problems by the 4th order Runge-Kutta method with a nonfixed increment according to the Runge Rule with accuracy θ

Параметры	Параметризованная				Непараметризованная			
	ξ_0	h	θ	ε	$t_{c, c}$	θ	ε	$t_{c, c}$
1	10	0.1	10^{-12}	$1.1561 \cdot 10^{-10}$	0.2388	10^{-10}	$2.1774 \cdot 10^{-10}$	0.4892
		0.01		$1.6079 \cdot 10^{-10}$	0.2592	$3 \cdot 10^{-10}$	$1.1338 \cdot 10^{-10}$	0.571
		0.001		$1.7008 \cdot 10^{-10}$	0.1889	10^{-10}	$2.1458 \cdot 10^{-12}$	1.3038
10	0.1	$2.365 \cdot 10^{-9}$		0.2065	10^{-7}	$1.5164 \cdot 10^{-9}$	1.6533	
	0.01	$2.2218 \cdot 10^{-9}$		0.2812	$4 \cdot 10^{-8}$	$1.1642 \cdot 10^{-9}$	2.025	
	0.001	$1.6625 \cdot 10^{-9}$		0.2691	10^{-7}	$2.5134 \cdot 10^{-9}$	1.3089	
100	0.1	$3.497 \cdot 10^{-8}$		0.2982	10^{-4}	$5.8346 \cdot 10^{-8}$	3.2128	
	0.01	$3.1933 \cdot 10^{-8}$		0.3346	10^{-5}	$2.3953 \cdot 10^{-8}$	4.0536	
	0.001	$3.0792 \cdot 10^{-8}$		0.3015	$3 \cdot 10^{-5}$	$2.3106 \cdot 10^{-8}$	4.7691	
1000	0.1	$4.2953 \cdot 10^{-7}$		0.2729	-	-	-	
	0.01	$3.2001 \cdot 10^{-7}$		0.2318	10^{-3}	$9.1802 \cdot 10^{-8}$	15.794	
	0.001	$8.7845 \cdot 10^{-7}$		0.1772	10^{-2}	$6.4254 \cdot 10^{-7}$	9.8967	

Отметим, что порядок средней погрешности исходной задачи (3) зависит от начального шага при фиксированной точности, тогда как для преобразованной задачи такой зависимости не наблюдается. Кроме того, использование метода продолжения решения по наилучшему аргументу позволяет значительно сократить время счёта при сохранении точности.

Можно было ожидать, что неявный метод Эйлера с переменным шагом даст лучшие результаты, но приведенные в таблице 5 результаты не намного отличаются от представленных в таблице 2.

Таблица 5. Погрешность решения и время счёта для задачи (3), неявный метод Эйлера с переменным шагом, выбираемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-4}$

Table 5. Solution error and calculating time for the task (3), implicit Euler method with a fixed increment chosen according to the Runge Rule with accuracy $\theta = 10^{-4}$

Параметры		Неявный метод Эйлера, МПИ	
ξ_0	h	ε	$t_{c, c}$
1	0.1	0.005	0.6852
	0.01	0.034	0.6912
	0.001	0.0031	0.6395
10	0.1	-	-
	0.01	0.0803	0.9471
	0.001	0.043	1.0648
100	0.1	-	-
	0.01	-	-
	0.001	1.45	0.9754

Полуаналитические многослойные методы.
Запишем уравнение (3) в виде

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(t, u), \\ F(t, u) = -\frac{\xi(t)(u^2 - a^2)}{(u^2 + a^2)}. \end{cases} \quad (6)$$

Применим к решению уравнения (6) метод трапеций [29]

$$u_{k+1} = u_k + 0.5 \cdot h_k \cdot (F(t_k, u_k) + F(t_{k+1}, u_{k+1})), \quad h_k = t_{k+1} - t_k.$$

Уравнение (7) можно решить с помощью одного шага метода Ньютона, линеаризуя его по $u_{k+1} - u_k$:

$$u_{k+1} = u_k + 0.5 \cdot h_k \cdot (F(t_k, u_k) + F(t_{k+1}, u_k) + F'_u(t_{k+1}, u_k) \cdot (u_{k+1} - u_k)),$$

откуда

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h_k \cdot (F(t_k, u_k) + F(t_{k+1}, u_k))}{2 - h_k F'_u(t_{k+1}, u_k)}.$$

Согласно [18] применим эту формулу к интервалу переменной длины, выбирая

$$h_k = \frac{t - t_0}{n}, \quad t_k = t_0 + k \frac{t - t_0}{n}, \quad u_0(t) = u_0.$$

Здесь $u_0 = u_0(t_0)$ некоторое стартовое значение, которое изначально считается неизвестным. В частном случае $t_0 = 0$ имеем $u_0 = 0$ из начального условия. Решение задачи получим стыковкой таких решений, построенных из нескольких начальных точек t_0 . Продемонстрируем результаты такой процедуры для $t_0 = 0$ и $t_0 = \frac{\pi}{2}$, так как это ближайшие к началу характерные

точки правой части уравнения (3).

Было бы желательно состыковать решения гладко (чтобы совпадали функции и производные), но реальные вычисления показали, что это невозможно, поэтому была реализована следующая процедура:

1. Строилось приближённое решение $v(t) = u_n(t)$ с $t_0 = 0$;
 2. Определялась точка стыка, как точка с минимальной производной;
 3. Строилось решение $w(t) = u_n(t)$ с $t_0 = \frac{\pi}{2}$ и $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_0$;
 4. Значение u_0 подбиралось так, чтобы в точке стыка выполнялось равенство $v(t) = w(t)$.
- Сстыкованное приближённое решение обозначим $s(t)$.

Результаты вычислительных экспериментов для полуаналитических многослойных методов

Представим некоторые результаты вычислений для $\xi_0 = 10$.

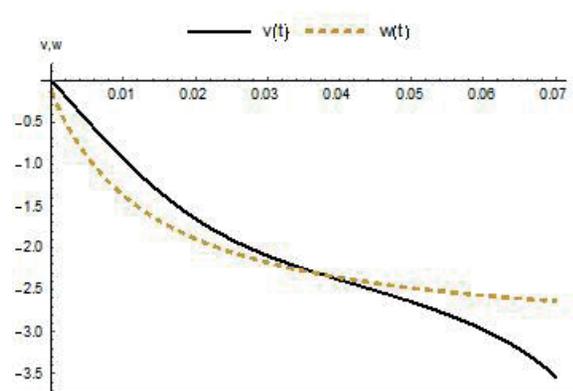


Рис. 2. Стыковка приближённого решения $v(t)$ с начальной точкой $t_0 = 0$ и приближённого решения $w(t)$ с начальной точкой $t_0 = \frac{\pi}{2}$ для $n = 2$.

Fig. 2. Blending an approximate solution $v(t)$ with the starting point $t_0 = 0$ and approximate solution $w(t)$ with the starting point $t_0 = \frac{\pi}{2}$ for $n = 2$.



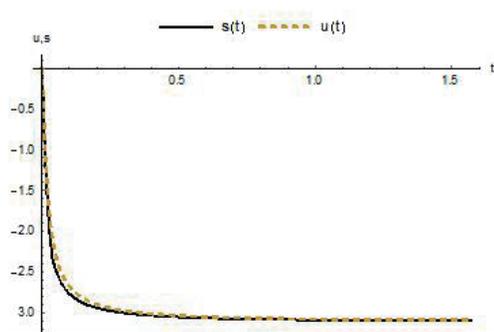


Рис. 3. Точное решение (4) и состыкованное приближённое решение $s(t)$ для $n = 2$.

Fig. 3. Exact solution (4) and blended approximate solution $s(t)$ for $n = 2$

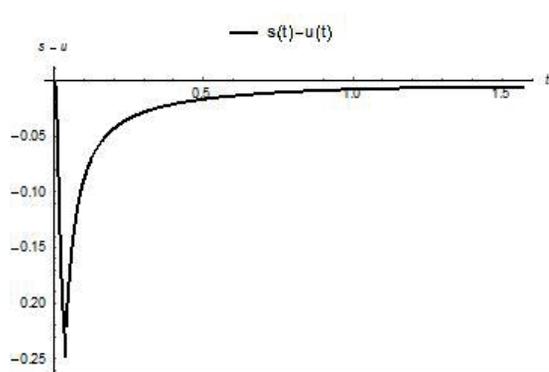


Рис. 4. Различие точного решения (4) и состыкованного приближённого решения $s(t)$ для $n = 2$.

Fig. 4. Difference between the Exact solution (4) and blended approximate solution $s(t)$ for $n = 2$

С ростом числа слоёв ошибка уменьшается:

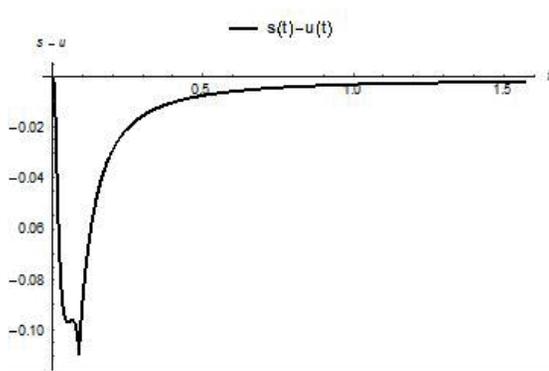


Рис. 5. Различие точного решения (4) и состыкованного приближённого решения $s(t)$ для $n = 4$.

Fig. 5. Difference between the Exact solution (4) and blended approximate solution $s(t)$ for $n = 4$

Далее строим новое приближённое решение, выбирая в качестве стартовой точки $t_0 = \pi$ и ищем значение $u(\neq)$ таким образом, чтобы обеспечить максимально гладкую стыковку с $w(t)$. В силу симметрии $w(t)$ относительно $\frac{\pi}{2}$ это не приводит к существенному возрастанию ошибки. В дальнейшем эту процедуру продолжаем на интересующий нас временной промежуток.

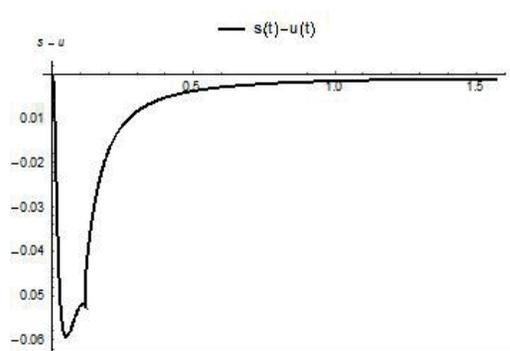


Рис. 6. Различие точного решения (4) и состыкованного приближённого решения $s(t)$ для $n = 6$.

Fig. 6. Difference between the Exact solution (4) and blended approximate solution $s(t)$ for $n = 6$

Другой подход состоит в том, чтобы не использовать приближённое решение $v(t) = u_n(t)$ с $t_0 = 0$, а подбирать u_0 так, чтобы выполнялось начальное условие $w(0) = 0$. Этот способ проще, но ошибки несколько больше, чем для первого способа.

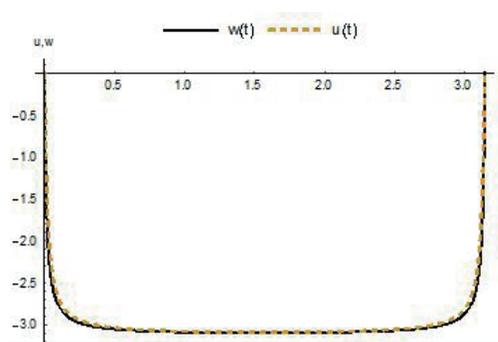


Рис. 7. Точное решение (4) и полученное вторым способом приближённое решение $w(t)$ для $n = 2$.

Fig. 7. Exact solution (4) and obtained by the second method approximate solution for $n = 2$

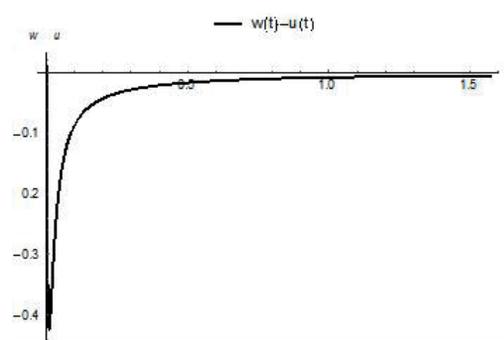


Рис. 8. Различие точного решения (4) и полученного вторым способом приближённого решения $w(t)$ для $n = 2$

Fig. 8. Difference between the Exact solution (4) and obtained by the second method approximate solution $w(t)$ for $n = 2$

Далее строим новое приближённое решение, выбирая в качестве стартовой точки $t_0 = \frac{3\pi}{2}$ и ищем значение в точке $\frac{3\pi}{2}$ таким образом, чтобы обеспечить максимально точное совпадение с $w(t)$ при $t = \pi$. В силу симметрии $w(t)$ относительно $\frac{\pi}{2}$ это не приводит к возрастанию ошибки. В дальнейшем процедуру продолжаем на интересующий нас временной промежуток.



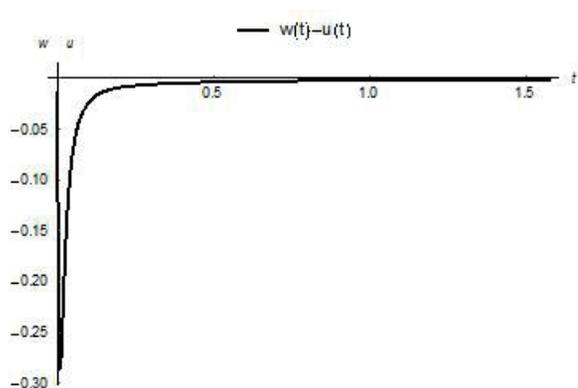


Рис. 9. Различие точного решения (4) и полученного вторым способом приближённого решения $w(t)$ для $n = 4$
Fig. 9. Difference between the Exact solution (4) and obtained by the second method approximate solution $w(t)$ for $n = 4$

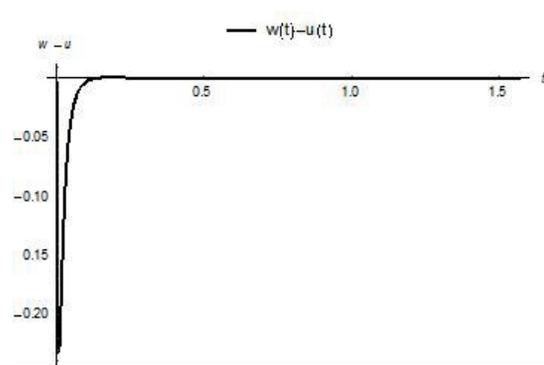


Рис. 10. Различие точного решения (4) и полученного вторым способом приближённого решения $w(t)$ для $n = 6$
Fig. 10. Difference between the Exact solution (4) and obtained by the second method approximate solution $w(t)$ for $n = 6$

Можно было бы ожидать, что увеличение параметра ξ_0 потребует существенного увеличения числа слоёв n для сохранения приемлемой точности, однако это не так, что подтверждают приведённые далее результаты.

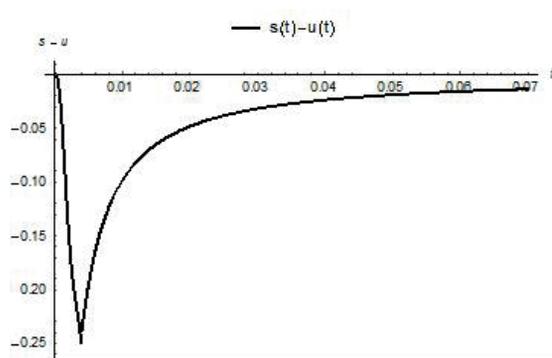


Рис. 11. Различие точного решения (4) и состыкованного приближённого решения $s(t)$ для $n = 2$ и $\xi_0 = 100$
Fig. 11. Difference between the Exact solution (4) and blended approximate solution $s(t)$ for $n = 2$ and $\xi_0 = 100$

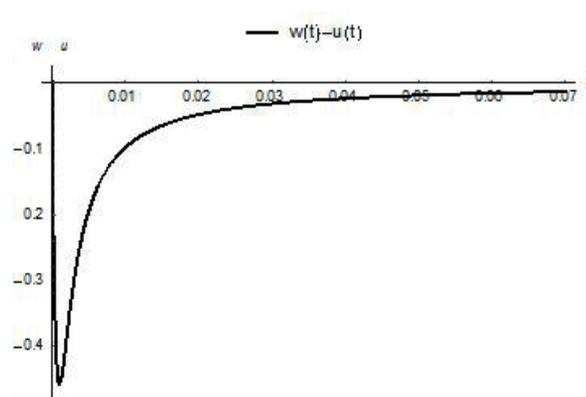


Рис. 12. Различие точного решения (4) и полученного вторым способом приближённого решения $w(t)$ для $n = 2$ и $\xi_0 = 100$
Fig. 12. Difference between the Exact solution (4) and obtained by the second method approximate solution $w(t)$ for $n = 2$ and $\xi_0 = 100$

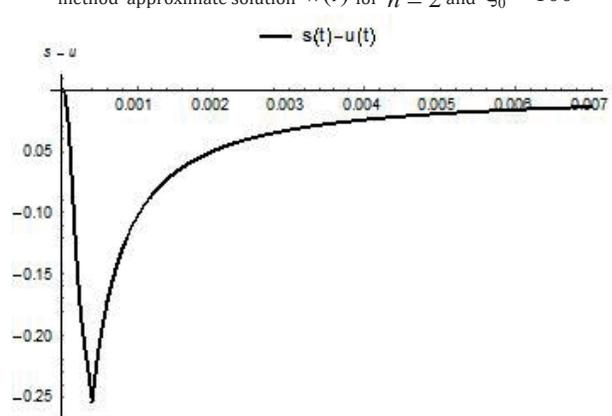


Рис. 13. Различие точного решения (4) и состыкованного приближённого решения $s(t)$ для $n = 2$ и $\xi_0 = 1000$
Fig. 13. Difference between the Exact solution (4) and blended approximate solution $s(t)$ for $n = 2$ and $\xi_0 = 1000$

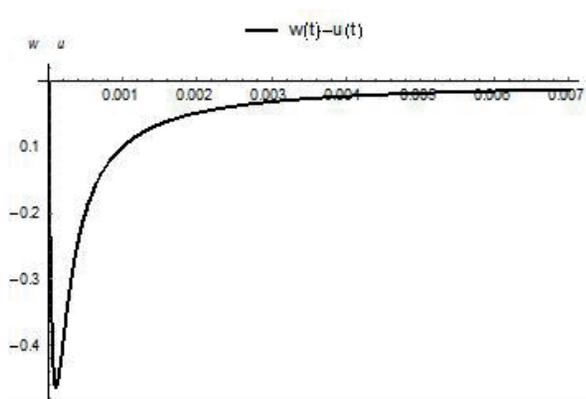


Рис. 14. Различие точного решения (4) и полученного вторым способом приближённого решения $w(t)$ для $n = 2$ и $\xi_0 = 1000$
Fig. 14. Difference between the Exact solution (4) and obtained by the second method approximate solution $w(t)$ for $n = 2$ and $\xi_0 = 1000$



Заключение

В статье нами предложены и протестированы методы, применимые к широкому кругу жёстких задач, в частности, к задачам моделирования контрастных структур. Работа методов протестирована на примере задачи Коши (3), предложенной в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [26]. Результаты проведённых нами вычислительных экспериментов показали высокую эффективность предложенных подходов в жёстком и сверхжёстком случаях.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-19-00474).

Список использованных источников

- [1] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22(64), № 2. С. 193-204. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=6075&option_lang=rus (дата обращения: 04.07.2018).
- [2] Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung // Verhandl. des III Intern. Mathem. Kongress. Heidelberg, 1904; Leipzig, 1905. Pp. 484-491.
- [3] Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Математический сборник. 1950. Т. 27(69), № 1. С. 147-156. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5907&option_lang=rus (дата обращения: 04.07.2018).
- [4] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575-586. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5548&option_lang=rus (дата обращения: 04.07.2018).
- [5] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 274 с.
- [6] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
- [7] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
- [8] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т 4, № 3. С. 799–851. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=344&option_lang=rus (дата обращения: 04.07.2018).
- [9] Chang K.W., Howes F.A. Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984. 187 p.
- [10] Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4-32. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=2615&option_lang=rus (дата обращения: 04.07.2018).
- [11] Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденно-го уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 4. С. 605–624. DOI: 10.7868/S0044466916040074
- [12] Антунов Е.А., Левашиова Н.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 10. С. 1594-1607. DOI: 10.7868/S0044466914100032
- [13] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987. 482 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12607-3
- [14] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. 614 p. DOI: 10.1007/978-3-642-05221-7
- [15] Shalashilin V.I., Kuznetsov E. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Springer Netherlands, 2003. DOI: 10.1007/978-94-017-2537-8
- [16] Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 6. С. 934-957. DOI: 10.7868/S0044466917060102
- [17] Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 6. С. 914-933. DOI: 10.7868/S0044466918060066
- [18] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models, based on grid methods // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 158, no. 1. P. 012061. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012061
- [19] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging / B. Kryzhanovskiy, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 138–146. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_21
- [20] Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A Two-layer Semi-Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1044, conference 1. P. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/1044/1/012005
- [21] Bortkovskaya M.R., Vasilyev P.I., Zulkarnay I.U., Semenova D.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P., Shishkina I.A. Modeling of the membrane bending with multilayer semi-empirical models based on experimental data / V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) // Proceedings of the 2nd International scientific conference “Convergent cognitive information technologies” (Convergent’2017). Moscow, Russia: November 24–26, 2017. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2064. Pp. 150-156. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf> (дата обращения: 04.07.2018).
- [22] Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемакина Т.А. Приближенные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO 2016). Москва, Россия, 25-26 ноября 2016. CEUR Workshop Proceedings. Т. 1761. С. 393-400. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf> (дата обращения: 04.07.2018).



- [23] Васильев А.Н., Тархов Д.А., Болгов И.П., Каверзнева Т.Т., Колесова С.А., Лазовская Т.В., Лукинский Е.В., Петров А.А., Филькин В.М. Многослойные нейросетевые модели процессов деформации и разрушения образцов на основе экспериментальных данных / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды I Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent'2016). Москва, Россия, 25-26 ноября 2016. CEUR Workshop Proceedings. Т. 1763. С. 6-14. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf> (дата обращения 04.07.2018).
- [24] Тархов Д.А., Шершневая Е.А. Приближенные аналитические решения уравнения Матъё, построенные на основе классических численных методов / В.А. Сухомлин, Е.В. Зубарева, М.А. Шнепс-Шнеппе // Избранные научные труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO 2016). Москва, Россия, 25-26 ноября 2016. CEUR Workshop Proceedings. Т. 1761. С. 356-362. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf> (дата обращения: 04.07.2018).
- [25] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation / В. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 17–22. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_3
- [26] Белов А.А., Калиткин Н.Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 10. С. 97-109. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28119117> (дата обращения: 04.07.2018).
- [27] Белов А.А., Калиткин Н.Н. Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 529-538. DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-529-538
- [28] Белов А.А., Калиткин Н.Н. Выбор шага по кривизне для жестких задач Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 11. С. 97-112. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28119129> (дата обращения: 04.07.2018).
- [29] Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005. 224 с.
- [30] Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
- [31] Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 2001. 400 с.
- [3] Tikhonov A.N. On systems of differential equations containing parameters. *Sbornik: Mathematics*. 1950; 27(69)-1:147-156. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5907&option_lang=rus (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [4] Tikhonov A.N. Systems of differential equations containing small parameters for derivatives. *Sbornik: Mathematics*. 1952; 31(73)-3:575-586. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5548&option_lang=rus (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [5] Vasil'yeva A.B., Butuzov V.F. Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations [Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy]. Nauka, Moscow, 1973. 274 p. (In Russian)
- [6] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asymptotic methods in the theory of singular perturbations [Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushchenij]. Higher School, Moscow, 1990. 208 p. (In Russian)
- [7] Lomov S.A. Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. Translated from the Russian by J.R. Schulenberg; translation edited by Simeon Ivanov. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1992. 375 p.
- [8] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Contrast structures in singularly perturbed problems. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* = Fundamental and Applied Mathematics. 1998; 4(3):799-851. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=344&option_lang=rus (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [9] Chang K.W., Howes F.A. Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984. 187 p.
- [10] Butuzov V.F., Vasilyeva A.B., Nefedov N.N. Asymptotic theory of contrast structures (review). *Automation and Remote Control*. 1997; 58(7):1068–1091. (In Russian)
- [11] Butuzov V.F., Bychkov A.I. Asymptotics of the solution of an initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in the case of a triple root of a degenerate equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016; 56(4):593-611. (In Russian) DOI: 10.1134/S0965542516040060
- [12] Antipov E.A., Levashova N.T., Nefedov N.N. Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014; 54(10):1536–1549. DOI: 10.1134/S0965542514100029
- [13] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987. 482 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12607-3
- [14] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. 614 p. DOI: 10.1007/978-3-642-05221-7
- [15] Shalashilin V.I., Kuznetsov E. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Springer Netherlands, 2003. DOI: 10.1007/978-94-017-2537-8
- [16] Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017; 57(6):931-952. DOI: 10.1134/S0965542517060094
- [17] Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Examples of Parametrization of the Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations with Limiting Singular Points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018; 58(6): 881–897. DOI: 10.1134/S0965542518060076

Поступила 04.07.2018; принята в печать 10.09.2018;
опубликована онлайн 30.09.2018.

References

- [1] Tikhonov A.N. Dependence of solutions of differential equations on a small parameter. *Sbornik: Mathematics*. 1948; 22(64)-2:193-204. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=6075&option_lang=rus (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [2] Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. des III Intern. Mathem. Kongress. Heidelberg, 1904; Leipzig, 1905. Pp. 484-491.



- [18] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models, based on grid methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016; 158(1):012061. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012061
- [19] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research*. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 138–146. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_21
- [20] Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A Two-layer Semi-Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam. *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2018; 1044(conf. 1):012005. DOI: 10.1088/1742-6596/1044/1/012005
- [21] Bortkovskaya M.R., Vasilyev P.I., Zulkarnay I.U., Semenova D.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P., Shishkina I.A. Modeling of the membrane bending with multilayer semi-empirical models based on experimental data. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the 2nd International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017)*. Moscow, Russia: November 24–26, 2017. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2064. Pp. 150-156. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf> (accessed 04.07.2018).
- [22] Vasilyev A., Tarkhov D., Shemyakina T. Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the XI International Scientific-Practical Conference "Modern Information Technologies and IT-Education" (SITITO 2016)*. Moscow, Russia, November 25-26. 2016. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1761. Pp. 393-400. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf> (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [23] Vasilyev A., Tarkhov D., Bolgov I., Kaverzneva T., Kolesova S., Lazovskaya T., Lukinskiy E., Petrov A., Filkin V. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the First International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2016)*. Moscow, Russia: November 25–26, 2016. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1763. Pp. 6-14. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf> (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [24] Tarkhov D., Shershneva E. Approximate analytical solutions of Mathieu's equations based on classical numerical methods. V. Sukhomlin, E. Zubareva, M. Shneps-Shneppe (Eds.) *Proceedings of the XI International Scientific-Practical Conference "Modern Information Technologies and IT-Education" (SITITO 2016)*. Moscow, Russia, November 25-26. 2016. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1761. Pp. 356-362. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf> (accessed 04.07.2018). (In Russian)
- [25] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation. B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (Eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research*. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer International Publishing, 2018. Pp. 17–22. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_3
- [26] Belov A.A., Kalitkin N.N. Features of calculating contrast structures in the Cauchy problem. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2017; 9(3):281-291. DOI: 10.1134/S2070048217030048
- [27] Belov A.A., Kalitkin N.N. Numerical Methods of Solving Cauchy Problems with Contrast Structures. *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2016; 23(5):529-538. (In Russian) DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-529-538
- [28] Belov A.A., Kalitkin N.N. Curvature-based grid step selection for stiff Cauchy problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2017; 9(3):305–317. DOI: 10.1134/S207004821703005X
- [29] Kalitkin N.N., Al'shin A.B., Al'shina Ye.A., Rogov B.V. Kalitkin N.N., Al'shin A.B., Al'shina E.A., Rogov B.V. Calculations on Quasi-Uniform Grids [Vychisleniya na kvaziravnomernykh setkakh]. Fizmatlit, Moscow, 2005. 224 p. (In Russian)
- [30] Arushanyan O.B., Zaletkin S.F. Numerical solution of ordinary differential equations using Fortran [Chislennoye resheniye obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy na Fortrane]. MSU, Moscow, 1990. 336 p. (In Russian)
- [31] Verzhbitskiy V.M. Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations) [Chislennyye metody. Matematicheskiy analiz i obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya]. Vysshaya shkola, Moscow, 2001. 400 p. (In Russian)

Submitted 04.07.2018; revised 10.09.2018;
published online 30.09.2018.

About the authors:

Evgenii B. Kuznetsov, D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department Modelling of dynamic system, Moscow Aviation Institute (National Research University), (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

Sergey S. Leonov, Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department Modelling of dynamic system, Moscow Aviation Institute (National Research University), (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

Dmitry A. Tarkhov, D. Sc. (Engineering), Professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnic Str., 195251 St. Petersburg, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, dtarkhov@gmail.com

Ekaterina D. Tsapko, student, Department Modelling of dynamic system, Moscow Aviation Institute (National Research University), (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4215-3510>, zapkokaty@gmail.com

Anastasia A. Babintseva, student, Department Applied Mathematics and Physics, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnic Str., 195251 St. Petersburg, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9326-7684>, babintseva01@mail.ru



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted reuse, distribution, and reproduction in any medium provided the original work is properly cited.

