УДК 519.237.5
DOI: 10.25559/SITITO.14.201803.552-559

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЗАМКНУТОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ИСТОЧНИКОВ ДАННЫХ И ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ ДЛЯ ИХ ОБРАБОТКИ

Г.Ж.К. Уанкпо[1], Д.В. Козырев[1,2]
1 Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия
[2] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия

ANALYTICAL MODELING AND SIMULATION OF RELIABILITY OF A CLOSED HOMOGENEOUS SYSTEM WITH AN ARBITRARY NUMBER OF DATA SOURCES AND LIMITED RESOURCES FOR THEIR PROCESSING

Hector G.K. Houankpo[1], Dmitry V. Kozyrev[1,2]
[1] Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
[2] V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

Ключевые слова

Надежность резервированных систем; стационарное распределение; чувствительность; математическое моделирование; имитационное моделирование.

Аннотация

Непрерывное развитие компьютерных сетей и систем передачи данных подчеркивает возрастающую потребность в адекватных математических моделях и методах для анализа показателей эффективности и надежности этих систем с учетом производительности их резервированных составляющих элементов. Мы рассматриваем математическую модель восстанавливаемой системы передачи данных как модель замкнутой однородной системы холодного резервирования с одним ремонтным устройством с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её элементов. Мы изучаем надежность системы, определяемую как стационарную вероятность безотказной работы системы. Предлагаемая аналитическая методология позволила оценить надежность всей системы в случае отказов её элементов. Получены явные аналитические выражения для стационарной вероятности безотказной работы системы и стационарных вероятностей состояний системы, которые позволяют анализировать другие операционные характеристики системы относительно производительности резервных элементов. Явные аналитические выражения для стационарного распределения рассматриваемой системы удается получить не всегда, поэтому для получения результатов в случае произвольного распределения времени восстановления элементов была построена дискретно-событийная имитационная модель, аппроксимирующая аналитическую модель системы. Алгоритм имитационного моделирования был программно реализован на языке R. Сравнение численных и графических результатов, полученных с использованием как аналитических, так и имитационных подходов, показала, что они имеют близкое соответствие, поэтому предложенная имитационная модель может использоваться в случаях, когда аналитическое решение в явном виде не может быть получено или как часть более сложной имитационной модели. Также изучалась проблема анализа чувствительности характеристик надежности рассматриваемой системы к видам исходных распределений. Полученные формулы показали наличие явной зависимости этих характеристик от типов функций распределения времени восстановления элементов системы. Однако численные исследования и анализ построенных графиков показали, что эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении элементов системы.

Об авторах:

Уанкпо Гектор Жибсон Кинманон, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5725-0313, gibsonhouankpo@yahoo.fr
Козырев Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6); Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0538-8430, kozyrev-dv@rudn.ru

Keywords

System-level reliability; steady state probabilities distribution; sensitivity; mathematical modeling; simulation.

Abstract

Continuous development of computer networks and data transmission systems underlines the growing need for adequate mathematical models and methods for analyzing the performance and reliability metrics of these systems, taking into account the performance of their redundant components.
We consider a mathematical model of a repairable data transmission system as a model of a closed homogeneous cold standby system with a single repair facility and with exponentially distributed lifetimes and generally distributed repair times of the system's elements. We study the system-level reliability, defined as the stationary probability of failure-free operation of the considered system. The proposed analytical methodology made it possible to evaluate the reliability of the entire system in case of failures of its elements. Explicit analytical expressions were obtained for the stationary probability of the system's failure-free operation and stationary system state probabilities, which allow analyzing other operational characteristics of the system with respect to the performance of its redundant elements.
Explicit analytical expressions for the stationary state probabilities of the considered system cannot always be obtained; therefore, to obtain results in the case of general distribution of elements' repair time, a discrete-event simulation model was constructed to approximate the analytical model of the system. The simulation algorithm was programmatically implemented in R. The comparison of numerical and graphical results obtained using both analytical and simulation approaches showed that they were in close agreement, so the proposed simulation model can be used in cases where the analytical solution cannot be obtained explicitly or as part of a more complex simulation model.
We've also studied the problem of analyzing the sensitivity of the reliability characteristics of the system at hand to the shape of input distributions. The obtained formulas showed the presence of an explicit dependence of these characteristics on the types of distribution functions of the repair time of the system's elements. However, numerical studies and graphical analysis have shown that this dependence becomes vanishingly small with the "fast" restoration of the system's elements.

Введение и мотивация

Благодаря стремительному распространению технологий беспроводной связи, вызванному лавинообразным ростом новых требовательных к сетевым ресурсам сервисов, мобильные пользователи ожидают гораздо более высокий уровень обслуживания, чем когда-либо прежде. Это создает беспрецедентную нагрузку на существующие и новые беспроводные инфраструктуры [1]. Действительно, количество подключенных портативных устройств резко возросло за последнее десятилетие [2], и ожидается, что этот рост только продолжится с расширением линейки носимых устройств. Сегодняшний переход к технологиям мобильной связи следующего поколения (5G) приносит с собой поразительное разнообразие интегрированных в информационную сеть устройств, таких как носимая электроника low-end сегмента, очки дополненной и виртуальной реальности, беспилотные автомобили, и многие другие [3, 4]. Этот сдвиг парадигмы открывает большое разнообразие совершенно новых приложений и сценариев, которые требуют не только обычных ресурсов (например, полосы пропускания), но и накладывают другие новые важные ограничения, в первую очередь, по задержкам и надежности [5, 6]. Последнее связано с продолжающейся эволюцией существующей сетевой экосистемы, поскольку в ней происходит переход от обслуживания преимущественно H2H-приложений (human-to-human) к разнообразным сервисам связи машинного типа (MTC - machine-type communications) [7]. Перспективные мобильные коммуникационные системы следующих поколений должны будут не только справляться с все возрастающим объемом пользовательского трафика и возрастающей плотностью абонентских устройств, но и обеспечивать обслуживание более широкого круга автоматизированных приложений с новыми уникальными требованиями относительно их надежности, скорости, доступности и эффективности функционирования в новой экосистеме Интернета надежных вещей (Internet of Reliable Things - IoRT). Примерами областей применения этого быстро растущего множества приложений, требующих сверхвысокой надежности связи (Ultra-Reliable Communication - URC), являются интеллектуальные транспортные системы, системы умного дома, умного города, мониторинга объектов, системы безопасности на автодорогах, системы общественной безопасности и др. Сетевое оборудование должно легко взаимодействовать с несколькими различными программными платформами, в условиях постоянного обновления программного обеспечения. Кроме того, устройства могут подвергаться сильно меняющимся внешним воздействиям: резким тепловым колебаниям, жидкостям, влаге, вибрациям и ударам. Перечисленные особенности развития компьютерных сетей и систем передачи данных последующих поколений в экосистеме IoRT обуславливают возрастающую потребность в адекватных математических моделях и инструментах, позволяющих исследовать их производительность и надежность.

В свете вышесказанного, выбор тематики исследования настоящей работы обусловлен, во-первых, практической необходимостью и возрастающим интересом к исследованию гибридных систем передачи данных. Во-вторых, анализ данной проблемы может стать составной частью решения большого числа задач по оценке надёжности и связности систем передачи данных между различными взаимодействующими устройствами.

Одним из эффективных способов повышения надежности технических устройств, в частности, систем передачи данных, является резервирование их элементов. Существует несколько подходов к моделированию надежности резервированных систем с произвольными распределениями времени жизни и ремонта. В любом случае все они сводятся к марковизации процесса, описывающего поведение системы.

Расчет надежности и исследование чувствительности характеристик надежности системы является одной из основных проблем теории надежности. Впервые эти проблемы обсуждалась в книге [12] для случая однородной восстанавливаемой системы облегчённого дублирования с помощью методов теории восстановления. Эта же проблема для системы с неоднородными элементами теми же методам обсуждалась также в [13]. В работе [14] для изучения сложных систем надежности использовался аппарат многомерных альтернирующих процессов. Была исследована система в случае отсутствия ограничений на количество ремонтных сооружений.

Ранее в серии работ авторов настоящей статьи [3, 8, 9, 10] была исследована надёжность однородной системы холодного резервирования двойного и тройного резерва в случае, когда функция распределения (ФР) времени безотказной работы (в.б.р) элементов системы является экспоненциальной, а время ремонта отказавших элементов имеет произвольное распределение. В работе [4] был проведен расчет надежности резервированной гетерогенной системы с произвольным распределением времени восстановления. Был обобщен предыдущий результат для гетерогенных систем, а также была решена проблема расчета функции надежности для особого случая модели надежности с ограниченным количеством ремонтных приборов. В работе [11] изучалась функция надежности и среднее время до отказа однородной ремонтируемой системы горячего резерва с экспоненциальным распределением в.б.р. и произвольным ФР времени ремонта её элементов.

В настоящей работе продолжены предыдущие исследования и построена математическую модель восстанавливаемой системы передачи данных как модель замкнутой однородной системы n-кратного холодного резервирования с одним ремонтным устройством с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её элементов.

Описание модели и постановка задачи

В качестве математической модели резервированной системы передачи данных, состоящей из n разнотипных каналов передачи данных, рассмотрим восстанавливаемую систему многократного холодного резервирования $<M_n/(GI/1)>$ с одним ремонтным устройством, с экспоненциальным законом распределения в.б.р. её элементов и произвольным законом распределения времени их ремонта.

В данной работе будет рассмотрена зависимость вероятности безотказной работы системы $<M_n/(GI/1)>$ от относительной скорости восстановления.

Ставится задача нахождения явных аналитических выражений для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности безотказной работы системы как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений. Для этого рассмотрим случайный процесс $v(t)$ - число отказавших элементов системы в момент времени t, и множество состояний системы $E=\{0,1,2,\cdots,n\}$. Для марковизации этого процесса, то есть для описания поведения системы с помощью Марковского процесса (МП), введём дополнительную переменную $x(t)\in R_+^{□}$ - время, затраченное в момент t на ремонт отказавшего элемента, и воспользуемся расширенным пространством состояний $\varepsilon=E\times R_+^{□}$. В результате получим двумерный процесс $(v(t),x(t))$ с расширенным пространством состояний $\varepsilon=\{(0),(1,x),(2,x),\cdots,(n,x)\}$.

Вычисление стационарного распределения вероятностей состояний системы $<M_n/(GI/1)>$ Общий случай

Предположим, что элементы системы функционируют независимо друг от друга и введем следующие обозначения:

$\upsilon(t)$ – число отказавших элементов в момент времени t,

A – случайная величина (с.в.), время до отказа основного элемента,

B – с.в., время восстановления отказавшего элемента,

B(x) – функция распределения (ФР) с.в. B,

b(x) – плотность распределения (ПР) с.в. B,

$\tilde{b}(s)=\int_0^\infty e^{(-sx)} b(x)dx$ – преобразование Лапласа (ПЛ) плотности b(x),

EA – среднее время безотказной работы основного элемента,

EB – среднее время ремонта отказавшего элемента,

DB – дисперсия времени ремонта отказавшего элемента,

$\rho=EA/EB$ – относительная скорость восстановления,

$\delta(x)=(b(x))/(1-B(x))$ – условная ПР остаточной длительности ремонта элемента, находящегося в ремонте время t (интенсивность восстановления [11]),

α – параметр экспоненциального распределения времени безотказной работы элемента.

Обозначим через $p_0(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии i=0, и через $p_i(t,x)$ - ПР (по непрерывной компоненте) вероятностей того, что в момент времени t система находится в состоянии $(i=\overline{(1,n)})$, и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале (x,x+dx),

$p_0(t)=p\{v(t)=0\}$,

$p_i(t,x)dx=p\{v(t)=i,x<x(t)<x+dx\},i=\overline{(1,n)}$.

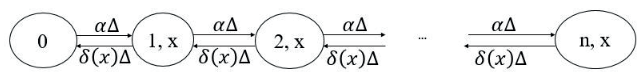


Рис. 1. Граф интенсивностей переходов

Fig. 1. Conversion intensity graph

Рассмотрим вероятности некоторых событий, которые будут использоваться в дальнейших расчетах.

Первое событие: за время Δ элемент системы сломается, при условии, что он отработал безотказно x единиц времени.

$P\{x\le A<x+\Delta|A\ge x\}=P\{x\le A<x+\Delta\}/P\{A\ge x\}=(A(x+\Delta)-A(x))/(1-P\{x<A\})=a(x)\Delta/(1-A(x))=(\alpha e^{(-\alpha x)}\Delta)/e^{(-\alpha x)}=\alpha\Delta+o(\Delta)$

Второе событие: начиная с рассматриваемого момента времени, за время Δ прибор восстановится (будет отремонтирован), при условии, что он находился в ремонте x единиц времени

$P\{x\le B<x+\Delta|B\ge x\}=P\{x\le B<x+\Delta\}/P\{B\ge x\}=(B(x+\Delta)-B(x))/(1-P\{x<B\})==b(x)\Delta/(1-B(x))=\delta(x)\Delta$

С помощью формулы полной вероятности получим:

$$p_0(t+\Delta)=(1-\alpha\Delta)\cdot p_0(t)+\int_0^t p_1(t,x)\cdot\delta(x)\Delta dx \quad (1.1)$$

$$p_1(t+\Delta,x+\Delta)=p_1(t,x)\cdot(1-\alpha\Delta)\cdot(1-\delta(x)\Delta) \quad (1.2)$$

$$p_i(t+\Delta,x+\Delta)=p_i(t,x)\cdot(1-\alpha\Delta)\cdot(1-\delta(x)\Delta)+p_{(i-1)}(t,x)\cdot\alpha\Delta \quad (1.3)$$

$$p_n(t+\Delta,x+\Delta)=p_n(t,x)\cdot(1-\delta(x)\Delta)+p_{(n-1)}(t,x)\cdot\alpha\Delta \quad (1.4)$$

Граничное условие:

$$p_1(t+\Delta,0)=\alpha\cdot p_0(t)+\int_0^t p_2(t,x)\cdot\delta(x)dx \quad (1.5)$$

$$p_i(t+\Delta,0)=\int_0^t p_{i+1}(t,x)\cdot\delta(x)dx;i=\overline{(2,n-1)} \quad (1.6)$$

С предельным переходом при Δ→0 перейдем к выводу системы дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющей найти вероятности состояний рассматриваемой системы.

$$\frac{\partial p_0(t)}{\partial t} = -\alpha \cdot p_0(t) + \int_0^t p_1(t,x)\cdot\delta(x)dx. \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p_1(t,x)}{\partial x} = -p_1(t,x)\cdot(\alpha+\delta(x)). \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p_i(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p_i(t,x)}{\partial x} = -(\alpha+\delta(x))\cdot p_i(t,x) + \alpha\cdot p_{i-1}(t,x). \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p_n(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p_n(t,x)}{\partial x} = -p_n(t,x)\cdot\delta(x) + \alpha\cdot p_{n-1}(t,x). \quad (2.4)$$

Из (1.5) и (1.6), граничное условие в пределе при Δ→0 примет вид:

$$p_1(t,0) = \alpha\cdot p_0(t) + \int_0^t p_2(t,x)\cdot\delta(x)dx. \quad (2.5)$$

$$p_i(t,0) = \int_0^t p_{i+1}(t,x)\cdot\delta(x)dx\,;\ i=\overline{2,n-1} \quad (2.6)$$

Предположим, что для описанного процесса существует стационарное распределение вероятностей при t→∞. Тогда преобразованные уравнения примут следующий вид (система уравнения баланса):

$$\begin{cases} \alpha\cdot p_0 = \int\limits_0^\infty p_1(x)\cdot\delta(x)dx & (3.1)\\ \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x} = -(\alpha+\delta(x))\cdot p_1(x). & (3.2)\\ \dfrac{\partial p_i(x)}{\partial x} = -(\alpha+\delta(x))\cdot p_i(x) + \alpha\cdot p_{i-1}(x); i=\overline{2,n-1} & (3.3)\\ \dfrac{\partial p_n(x)}{\partial x} = -p_n(x)\cdot\delta(x) + \alpha\cdot p_{n-1}(x) & (3.4) \end{cases}$$

Граничное условие:

$$p_1(0) = \alpha\cdot p_0 + \int_0^\infty p_2(x)\cdot\delta(x)dx. \quad (3.1)$$

$$p_i(0) = \int_0^\infty p_{i+1}(x)\cdot\delta(x)dx\,;\ i=\overline{2,n-1} \quad (3.2)$$

Полученную систему дифференциальных уравнений решаем, используя метод вариации постоянной:

$$p_0 = C_1\frac{\tilde{b}(\alpha)}{\alpha}.$$
$$p_1(x) = Q_1(x)e^{-\alpha x}(1-B(x))$$
$$p_i(x) = Q_i(x)e^{-\alpha x}(1-B(x)); i=\overline{2,n-1}$$
$$p_n(x) = \left(C_n - e^{-\alpha x}\sum_{j=1}^{n-1}Q_j(x)\right)(1-B(x)),$$

$$Q_i(x) = \sum_{j=1}^{i} C_j\frac{(\alpha x)^{i-j}}{(i-j)!};\qquad i=\overline{1,n-1}$$

Для выражения коэффициентов C_i,i=(1,n-1)¯ и C_n через C_1 используем граничные условия системы дифференциальных уравнений (уравнения (3.5) и (3.6)). Получим:

$$C_n = C_1\left(A_{n-1}\left(1-\tilde{b}(\alpha)\right) - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-1)!}\cdot\boldsymbol{I}_{j-k}\right);\quad n=2.$$

$$C_2 = C_1\left(\left(1-\tilde{b}(\alpha)\right) - \alpha\boldsymbol{I_1}\right)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(\alpha)} = C_1A_2;\quad n\geq 3$$

$$C_{i+1} = C_1\left(A_i - \sum_{j=1}^{i}A_j\frac{\alpha^{i-j+1}}{(i-j+)!}\cdot\boldsymbol{I}_{i-j+1}\right)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(\alpha)} = C_1A_{i+1};\ i=\overline{2,n-2};\quad n\geq 4$$

$$C_n = C_1\left(A_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-k)!}\boldsymbol{I}_{j-k}\right) = C_1A_n;\quad n\geq 3$$

Отсюда далее находим стационарные вероятности для макро-состояний:

$$p_i = \int\limits_0^\infty p_i(x)dx\,;\ \ i=\overline{2,n}.$$

В итоге получаем следующие аналитические выражения для стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы ⟨M_n/(GI/1)⟩ в следующем виде:

$$p_0 = C_1\frac{\tilde{b}(\alpha)}{\alpha}$$

$$p_i = C_1\left(\sum_{j=1}^{i}A_j\frac{\alpha^{i-j}}{(i-j)!}\cdot\boldsymbol{II}_{(i-j)}\right); i=\overline{1,n-1}$$

$$p_n = C_1\left(A_nb - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\boldsymbol{II}_{(j-k)}\right)$$

или

$$p_n = C_1\alpha^{-1}\left(\rho^{-1}A_n - \alpha\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\boldsymbol{II}_{(j-k)}\right)$$

где b – математическое ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента, и

$$C_1 = \left[\frac{\tilde{b}(\alpha)}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i}A_j\frac{\alpha^{i-j}}{(i-j)!}\cdot\boldsymbol{II}_{(i-j)}\right) + A_nb - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\boldsymbol{II}_{(j-k)}\right]^{-1}$$

$$A_1 = 1;$$

$$A_n = A_{n-1}\left(1-\tilde{b}(\alpha)\right) + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-1)!}\cdot\boldsymbol{I}_{j-k}; n=2;$$

$$A_2 = \left(1-\tilde{b}(\alpha)-\alpha\boldsymbol{I_1}\right)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(\alpha)}; n\geq 3$$

$$A_{i+1} = \left(A_i - \sum_{j=1}^{i}A_j\frac{\alpha^{i-j+1}}{(i-j+1)!}\cdot\boldsymbol{I}_{(i-j+1)}\right)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(\alpha)}; i=\overline{2,n-2}; n\geq 4;$$

$$A_n = A_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}A_k\frac{\alpha^{j-k}}{(j-1)!}\cdot\boldsymbol{I}_{j-k}; n\geq 3.$$

$$I_i = \int\limits_0^\infty x^ie^{-\alpha x}b(x)dx\,; i=\overline{0,n}$$

$$II_i = \int\limits_0^\infty x^ie^{-\alpha x}(1-B(x))dx\,; i=\overline{0,n},$$

Замечание: при вычислении стационарных вероятностей p_i; i=(0,n)¯ состояний системы или вероятности отказа p_n, выбранные данные должны утверждать следующее условие.

$$\boldsymbol{A_nb} \geq \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}\boldsymbol{A_k}\frac{\boldsymbol{\alpha^{j-k}}}{(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})!}\cdot\boldsymbol{II}_{(j-k)}$$

Частные случаи

В этом разделе рассмотрим частные случаи модели дублированной (n=2) системы передачи данных с разными известными распределениями времени ремонта. Получаем следующие стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы <M_2/(GI/1)> холодного дублирования:

$$p_0 = C_1 \cdot \frac{\tilde{b}(\alpha)}{\alpha}$$
$$p_1 = C_1 \cdot \left(\frac{1-\tilde{b}(\alpha)}{\alpha}\right)$$
$$p_2 = C_1 \cdot \left(\frac{\rho^{-1} - \left(1-\tilde{b}(\alpha)\right)}{\alpha}\right); \; \rho^{-1} = \frac{EB}{EA} = b \cdot \alpha,$$

где

$$C_1 = \frac{\alpha}{\rho^{-1} + \tilde{b}(\alpha)}.$$

Как видно из приведенных выражений, имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида распределений времени ремонта. Однако эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов, т.е. с ростом относительной скорости восстановления ρ. Численные и графические результаты приведены в следующем разделе, и они подтверждают этот вывод.

Полученные результаты

В этом разделе обобщены численные и графические результаты, полученные после применения предлагаемой аналитической модели к описанному выше сценарию. Представлены графики, на которых видна зависимость вероятности отказной работы системы от относительной скорости восстановления для различных распределений времени ремонта элементов (Вейбулла-Гнеденко, Парето и Логнормальное).

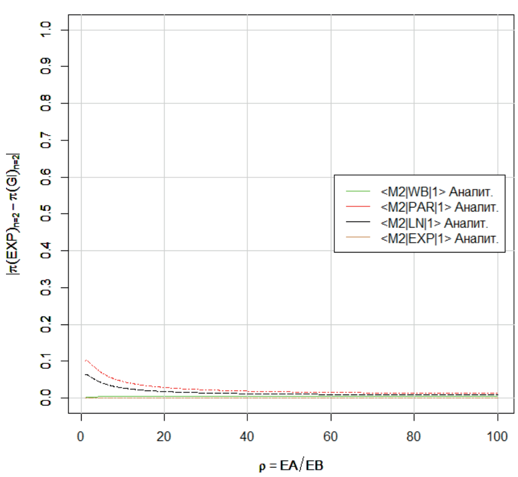


Рис. 2.a. График зависимости 1-$p_{(n=2)}$ от ρ для различных ФР времени ремонта
Fig. 2.a. Dependency graph 1-$p_{(n=2)}$ from ρ for different PR repair time

Как видно из рис. 2.b, эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении элементов системы. Полученные результаты подтверждают вышеприведенный вывод о высокой асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы, что хорошо видно из-за близости соответствующих кривых. Например, начиная со значения ρ=60, все кривые почти неотличимы.

Следует отметить, что не всегда легко удается получить явные аналитические выражения для распределения вероятностей состояний рассматриваемой системы. Для этого была построена имитационная модель на основе дискретно-событийного подхода, аппроксимирующая аналитическую модель системы. Программная реализация алгоритма имитационного моделирования была осуществлена на языке R.

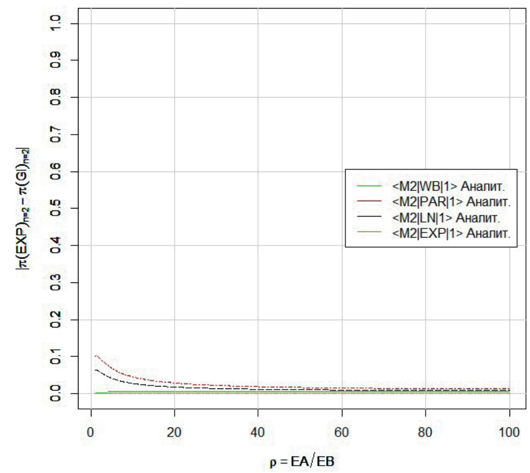
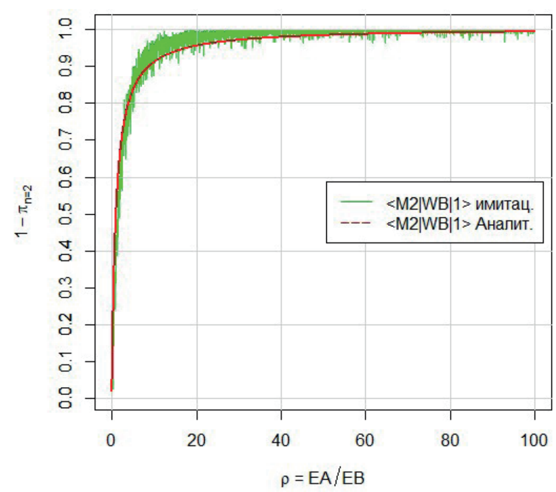
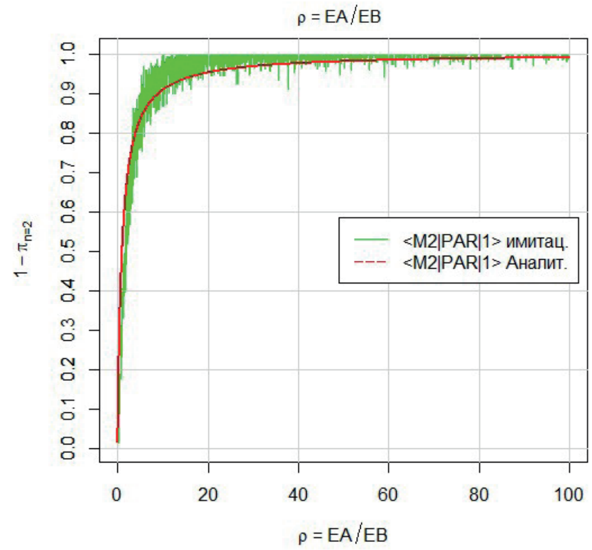


Рис. 2.b. Абсолютная разница значений стационарной надежности системы 1-$p_{(n=2)}$ с ростом ρ для различных ФР времени ремонта
Fig. 2.b. The absolute difference between the values of the stationary reliability of the system 1-$p_{(n=2)}$ with increasing ρ for different PR repair time





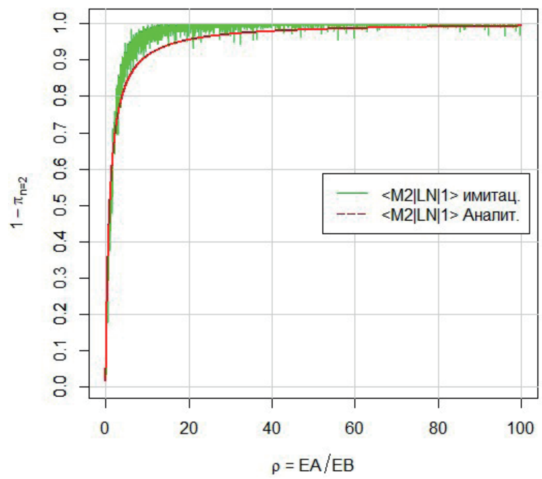


Рис. 3. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1\text{-p}_{(n=2)}$ от ρ, построенные имитационно и аналитически

Fig. 3. The graphs of the dependence of the probability of system uptime $1\text{-p}_{(n=2)}$ on ρ, plotted by simulation and analytical

На рис.3 для сравнения приведены графики зависимости вероятности безотказной работы системы от ρ, полученные как по явным аналитическим выражениям, так и с помощью разработанной имитационной модели. Приведенные на графиках имитационные кривые представляют собой усредненные значения по результатам 1000 построений. Из рис.3 также видно, что различия между кривыми с ростом ρ становятся исчезающе малыми для всех рассматриваемых распределений времени ремонта элементов системы.

Заключение

Для восстанавливаемой системы <M_n/(GI/1)> холодного резервирования с одним ремонтным устройством, с экспоненциальной ФР в.б.р. её элементов и произвольным законом распределения времени их ремонта были получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности отказа системы как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений (таких как распределение Вейбулла-Гнеденко, распределение Парето и логнормальное распределение). Полученные формулы показывают наличие явной зависимости этих характеристик от вида функции распределения времени ремонта её элементов. Однако численные исследования и анализ построенных графиков показали, что эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении, то есть с ростом относительной скорости восстановления ρ.

Было проведено имитационное моделирование системы <M_n/(GI/1)> на основе дискретно-событийного подхода. Численное и графическое сравнение результатов имитационного моделирования с аналитическими результатами показало, что, во-первых, построенная имитационная модель хорошо аппроксимирует аналитическую модель системы, а значит может быть использована в тех случаях, когда не удается получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы в явном аналитическом виде, а во-вторых, при «быстром» восстановлении, вероятность отказа системы становится нечувствительной к виду и параметрам ФР времени ремонта элементов.

Проведенное исследование надёжности резервированной системы может стать составной частью решения большого числа задач по оценке надёжности и связности систем передачи данных между различными взаимодействующими устройствами в рамках новой парадигмы Интернета надежных вещей.

Список сокращений

с.в. – случайная величина
ФР – функция распределения
ПР – плотность распределения
МП – Марковский процесс
в.б.р. – время безотказной работы

Благодарности

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00142.

Список использованных источников

[1] Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016–2021. [Электронный ресурс] / White Paper, 2017. 25 p. URL: https://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.pdf (дата обращения: 12.06.2018).

[2] Ericsson mobility report: On the pulse of the Networked Society [Электронный ресурс] / Ericsson. November 2017. 35 p. URL: https://www.ericsson.com/assets/local/mobility-report/documents/2017/ericsson-mobility-report-november-2017-middle-east-and-africa.pdf (дата обращения: 12.06.2018).

[3] *Andrews J.G., Buzzi S., Choi W.* What will 5G be? // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2014. Vol. 32, no. 6. Pp. 1065–1082. DOI: 10.1109/JSAC.2014.2328098

[4] *Orlosky J., Kiyokawa K., Takemura H.* Virtual and Augmented Reality on the 5G Highway // Journal of Information Processing. 2017. Vol. 25. Pp. 133-141. DOI: 10.2197/ipsjjip.25.133

[5] *Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V.* Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements / K.E. Samouilov, L.A. Sevastianov, D.S. Kulyabov (Eds.) // Proceedings of the VII Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems". Moscow, Russia: 24-Apr, 2017. CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1995. Pp. 107-113. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1995/paper-15-970.pdf (дата обращения: 12.06.2018).

[6] *Kozyrev D., Kimenchezhi V., Houankpo H.G.K.* Reliability Calculation of a Redundant Heterogeneous System with General Repair Time Distribution // Прикладные проблемы в теории вероятностей и математической статистике в области телекоммуникаций = Applied problems in theory of probabilities and mathematical statistics into

telecommunications. Труды XI Международного семинара / Под ред. Д. Аранити, К.Е. Самуйлова, С.Я. Шоргина. М: РУДН, 2017. С. 12. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30683416 (дата обращения: 12.06.2018).

[7] *Kozyrev D., Ometov A., Moltchanov D.* et al. Mobility-Centric Analysis of Communication Offloading for Heterogeneous Internet of Things Devices // Wireless Communications and Mobile Computing. 2018. Vol. 2018. Article ID 3761075, 11 p. DOI: 10.1155/2018/3761075

[8] *Ometov A., Kozyrev D., Rykov V., Andreev S., Gaidamaka Yu., Koucheryavy Y.* Reliability-Centric Analysis of Offloaded Computation in Cooperative Wearable Applications // Wireless Communications and Mobile Computing. 2017. Vol. 2017. Article ID 9625687, 15 p. DOI: 10.1155/2017/9625687.

[9] *Orsino A., Ometov A., Fodor G.* et al. Effects of Heterogeneous Mobility on D2D- and Drone-Assisted Mission-Critical MTC in 5G // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55, no. 2. Pp. 79–87. DOI: 10.1109/MCOM.2017.1600443CM

[10] *Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В.* Анализ чувствительности характеристик надёжности модели резервирования системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем (ИТТММ-2017). Материалы Всероссийской конференции с международным участием. М.: РУДН, 2017. С. 55-58. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29991405 (дата обращения: 12.06.2018).

[11] *Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В.* Исследование чувствительности характеристик надёжности резервированной системы передачи данных к виду распределений времени между отказами и восстановлениями элементов системы // Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (АРТСТ–2017) = 2nd International School on Applied Probability Theory & Communications Technologies (APTCT–2017): материалы молодежной научной школы. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г. / Под общ. ред. К.Е. Самуйлова, Е.А. Кучерявого, А.Н. Дудина. Москва: РУДН, 2017. С. 299-303. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=32565550 (дата обращения: 12.06.2018).

[12] *Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В.* Анализ чувствительности характеристик надёжности модели дублированной системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов // Материалы 19-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2016). / Под общей ред. В. М. Вишневского и К. Е. Самуйлова. Том 3. М.: РУДН, 2016. 2016. С. 473-480. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=27552510 (дата обращения: 12.06.2018).

[13] *Rykov V., Kozyrev D., Zaripova E.* Modeling and simulation of reliability function of a homogeneous hot double redundant repairable system // Proceedings of the 31st European Conference on Modelling and Simulation ECMS-2017 (May 23 – 26, 2017, Budapest, Hungary). Germany, Digitaldruck Pirrot GmbH. 2017. Pp. 701-705. DOI: 10.7148/2017-0701

[14] *Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyev A.D.* Mathematical Methods of Reliability Theory / Z.W. Birnbaum (Ed.). New York: Academic Press, 1969. 518 p. DOI: 10.1016/C2013-0-12300-8

[15] *Srimivasan S.K., Gopalan M.N.* Probabilistic Analysis of a Two-Unit System with a Warm Standby and a Single Repair Facility // Operations Research. 1973. Vol. 21, no. 3. Pp. 748-754. DOI: 10.1287/opre.21.3.748

[16] *Rykov V.* Multidimensional Alternative Processes Reliability Models / A. Dudin, V. Klimenok, G. Tsarenkov, S. Dudin (Eds.) // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks (BWWQT 2013). Communications in Computer and Information Science, Vol 356. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. Pp. 147-157. DOI: 10.1007/978-3-642-35980-4_17

[17] ГОСТ 27.002-2009. Надежность в технике. Термины и определения. Москва: Стандартинформ, 2011. 28 с.

Поступила 12.06.2018; принята в печать 10.09.2018; опубликована онлайн 30.09.2018.

References

[1] Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016–2021. White Paper, 2017. 25 p. Available at: https://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.pdf (accessed 12.06.2018).

[2] Ericsson mobility report: On the pulse of the Networked Society. Ericsson. November 2017. 35 p. Available at: https://www.ericsson.com/assets/local/mobility-report/documents/2017/ericsson-mobility-report-november-2017-middle-east-and-africa.pdf (accessed 12.06.2018).

[3] Andrews J.G., Buzzi S., Choi W. What will 5G be? *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 2014; 32(6):1065–1082. DOI: 10.1109/JSAC.2014.2328098

[4] Orlosky J., Kiyokawa K., Takemura H. Virtual and Augmented Reality on the 5G Highway // *Journal of Information Processing*. 2017. Vol. 25. Pp. 133-141. DOI: 10.2197/ipsjjip.25.133

[5] Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V. Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements. K.E. Samouilov, L.A. Sevastianov, D.S. Kulyabov (Eds.) *Proceedings of the VII Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems"*. Moscow, Russia: 24-Apr, 2017. CEUR Workshop Proceedings. 2017; 1995:107-113. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1995/paper-15-970.pdf (accessed 12.06.2018).

[6] Kozyrev D., Kimenchezhi V., Houankpo H.G.K. Reliability Calculation of a Redundant Heterogeneous System with General Repair Time Distribution. D. Araniti, K.E. Samujlov, S.Ja. Shorgin (Eds.). *Prikladnye problemy v teorii verojatnostej i matematicheskoj statistike v oblasti telekommunikacij* = Applied problems in theory of probabilities and mathematical statistics into telecommunications. M: RUDN, 2017. Pp. 12. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30683416 (accessed 12.06.2018).

[7] Kozyrev D., Ometov A., Moltchanov D. et al. Mobility-Centric Analysis of Communication Offloading for Heterogeneous Internet of Things Devices. *Wireless Communications and Mobile Computing*. 2018. Vol. 2018. Article ID 3761075, 11 p. DOI: 10.1155/2018/3761075

[8] Ometov A., Kozyrev D., Rykov V., Andreev S., Gaidamaka Yu., Koucheryavy Y. Reliability-Centric Analysis of Offloaded Computation in Cooperative Wearable Applications. *Wireless Communications and Mobile Computing*. 2017. Vol. 2017. Article ID 9625687, 15 p. DOI: 10.1155/2017/9625687.

[9] Orsino A., Ometov A., Fodor G. et al. Effects of Heterogeneous Mobility on D2D- and Drone-Assisted Mission-Critical MTC in 5G. *IEEE Communications Magazine*. 2017; 55(2):79–87. DOI: 10.1109/MCOM.2017.1600443CM

[10] Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V. Sensitivity analysis of steady state reliability characteristics of a repairable cold standby data transmission system to the shapes of lifetime and repair time distributions of its elements. *Proceedings of the Conference "Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems"*. M.: RUDN, 2017. Pp. 55-58. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=29991405 (accessed 12.06.2018). (In Russian)

[11] Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V. Investigation of the sensitivity of the reliability characteristics of a redundant data transmission system to the type of time distribution between failures and restoration of system elements. *Proceedings of the 2nd International School on Applied Probability Theory & Communications Technologies (APTCT–2017). M.: RUDN, 2017*. Pp. 299-303. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=32565550 (accessed 12.06.2018). (In Russian)

[12] Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V. Sensitivity analysis of steady state reliability characteristics of a cold redundant data transmission system to the shapes of lifetime and repair time distributions of its elements. *Proceedings of the Conference Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016)*. Vol. 3. M.: RUDN, 2016. Pp. 473-480. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=27552510 (accessed 12.06.2018). (In Russian)

[13] Rykov V., Kozyrev D., Zaripova E. Modeling and simulation of reliability function of a homogeneous hot double redundant repairable system. *Proceedings of the 31st European Conference on Modelling and Simulation ECMS-2017* (May 23 – 26, 2017, Budapest, Hungary). Germany, Digitaldruck Pirrot GmbH. 2017. Pp. 701-705. DOI: 10.7148/2017-0701

[14] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyev A.D. Mathematical Methods of Reliability Theory Z.W. Birnbaum (Ed.). New York: Academic Press, 1969. 518 p. DOI: 10.1016/C2013-0-12300-8

[15] Srimivasan S.K., Gopalan M.N. Probabilistic Analysis of a Two-Unit System with a Warm Standby and a Single Repair Facility. *Operations Research*. 1973; 21(3):748-754. DOI: 10.1287/opre.21.3.748

[16] Rykov V. Multidimensional Alternative Processes Reliability Models. A. Dudin, V. Klimenok, G. Tsarenkov, S. Dudin (Eds.) *Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks (BWWQT 2013).* Communications in Computer and Information Science, Vol 356. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. Pp. 147-157. DOI: 10.1007/978-3-642-35980-4_17

[17] GOST 27.002-2009. Nadezhnost' v tehnike. Terminy i opredelenija = Reliability in technology. Terms and Definitions. M.: Standartinform, 2011. 28 p. (In Russian)

Submitted 12.06.2018; revised 10.09.2018; published online 30.09.2018.

About the authors:

Hector G.K. Houankpo, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5725-0313, gibsonhouankpo@yahoo.fr

Dmitry V. Kozyrev, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia); V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS (65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0538-8430, kozyrev-dv@rudn.ru