УДК 517.946
DOI: 10.25559/SITITO.14.201803.639-646

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ SIN-ГОРДОН

И.А. Рудаков[1,2]
[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия
[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

NONTRIVIAL PERIODIC SOLUTIONS OF THE SIN-GORDON EQUATION

Igor A. Rudakov[1,2]
[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Ключевые слова

Волновое уравнение; периодические решения; вариационный метод; критические точки функционала; теорема о перевале.

Аннотация

В работе исследуется задача о периодических по времени решениях уравнения sin-Гордон с граничными условиями Неймана и Дирихле на отрезке. Новизна работы состоит в том, что в предшествующих работах существование периодических решений уравнения sin-Гордон на отрезке было доказано для случая граничных условий Дирихле и третьего рода. При исследовании уравнения применяется вариационный метод. Периодическое решение задачи находится как критическая точка функционала энергии. Для доказательства существования критической точки функционал ограничивается на конечномерные подпространства и применяется разновидность теоремы о "перевале", позволяющая найти седловые стационарные точки. Используя особенности спектра дифференциального оператора и нелинейного слагаемого в этих подпространствах найдены зацепляющиеся поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы о "перевале". Для осуществления предельного перехода, когда размерность подпространств стремится к бесконечности, доказаны равномерные оценки последовательности функций, являющихся стационарными точками функционала на этих подпространствах. Предельный переход использует метод компактности. Доказательство гладкости обобщенного решения проводится с помощью рядов Фурье. Для доказательства сходимости рядов Фурье и их производных исследуются собственные значения дифференциального оператора, соответствующего линейной части уравнения.

Keywords

Wave equation; periodic solutions; variation method; critical points of the functional; mountain pass theorem.

Abstract

In this paper, we study the problem of time-periodic solutions of the sin-Gordon equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions on an interval. The novelty of the paper lies in the fact that in previous papers the existence of periodic solutions of the sin-Gordon equation on an interval was proved for the case of Dirichlet and third kind boundary conditions. In the study of the equation, a variational method is used. Periodic solution of the problem is found as a critical point of the energy functional. To prove the existence of a critical point, the functional is limited to finite-dimensional subspaces and a kind of "pass" theorem is used, which allows finding saddle stationary points. Using the features of the spectrum of the differential operator and the nonlinear term in these subspaces, meshing surfaces are found that satisfy the conditions of the "pass" theorem. To implement the passage to the limit, when the dimension of the subspaces tends to infinity, we prove uniform estimates for the sequence of functions that are stationary points of the functional on these subspaces. The passage to the limit uses the compactness method. The proof of the smoothness of the generalized solution is carried out with the help of Fourier series. To prove the convergence of the Fourier series and their derivatives, we study the eigenvalues of the differential operator corresponding to the linear part of the equation.

Об авторе:

Рудаков Игорь Алексеевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры ФН-2, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4669-0532, rudakov_ia@mail.ru

Введение

Рассматривается задача о нетривиальных решениях уравнения sin-Гордон, являющихся периодическими по времени, с однородными граничными условиями Дирихле и Неймана на отрезке:

$u_{tt} - u_{xx} + sinu = 0{,}0 < x < \pi, t \in R;$ (1)
$u(x,t) = u(x, t + 2\pi), 0 < x < \pi, t \in R;$ (2)
$u(0,t) = u'(\pi, t) = 0, t \in R.$ (3)

Уравнение sin-Гордон в геометрии описывает поверхности с постоянной отрицательной кривизной. В физике оно является одной из моделей теории поля, находит применение в теории дислокаций в металлах, а также при описании нелинейных волновых свойств геофизической среды, которая имеет фрагментированное строение. В связи с приложениями в геофизике, известно одно из важных свойств сейсмичности – периодичность, то есть повторяемость наиболее сильных землетрясений в одном месте через определенный интервал времени.

Проблема периодических решений нелинейного волнового уравнения, каким является уравнение sin-Гордон, начиная с 60-70-х годов по настоящее время привлекает большое число исследователей . В работах [1], [2] выведена явная формула периодического решения линейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами и граничными условиями Дирихле. Эта формула в последующих работах используется в последующих работах [3], [4], [5] для обоснования гладкости решений в пространствах Соболева и в классическом смысле. В статьях [1], [2] доказано существование периодического решения малой амплитуды для квазилинейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами при достаточно малой правой части.

В классических работах Брезиса Х., Ниренберга Л., Рабиновитца П. [3], [4], [5],[6] получены периодические решения волнового уравнения без предположения малости амплитуды и правой части уравнения. В статьях [5], [6] доказано существование бесконечной не ограниченной последовательности периодических решений для уравнения свободных колебаний, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост. В [3],[4] исследованы случаи, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности в случае первых двух собственных значений, а также когда имеет место резонанс на собственном значении волнового оператора. В статье [7] доказана разрешимость волнового уравнения, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности для случая произвольных соседних собственных значений волнового оператора. В [8],[9] получена счетная разрешимость уравнения вынужденных колебаний струны с постоянными коэффицентами со степенной нелинейностью. В работах [10]-[23] получены результаты о существовании периодических и квазипериодических решений для волнового уравнении с переменными коэффициентами и различными граничными условиями.

Задача о периодических решениях для уравнения sin-Гордон на отрезке была поставлена Л. Ниренбергом в работе [24]. В этой статье Л. Ниренберг отметил, что для уравнения sin-Гордон на всей прямой доказано существование периодических по времени решений, для которых выведены даже явные формулы, но ничего не известно о существовании нетривиальных периодических решений уравнения sin-Гордон на отрезке. В работе [26] доказано существование периодических решений уравнения sin-Гордон с однородными граничными условиями Дирихле на отрезке для достаточно больших периодов времени (больших 8π при длине струны π). В [27],[28] показано, что в этом случае существует $\frac{5}{3}\pi$ решение. В работе [28] доказано существование периодических решений уравнения sin-Гордон в случае граничных условий 3 рода. Основной целью данной работы является теорема о существовании периодического уравнения sin-Гордон с граничными условиями Неймана и Дирихле.

§ 1. Линейное уравнение.

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times R/(2\pi Z)$, $Z_{+=N\cup\{0\}}$. Функции

$e_{nm}^{c} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} sin\left(n + \frac{1}{2}\right) xcosmt, e_{nm}^{s} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} sin\left(n + \frac{1}{2}\right) xsinmt,$

являются собственными функциями оператора Даламбера $A_0 u = u_{tt} - u_{xx}$ и удовлетворяют условиям (2), (3). Соответствующие им собственные значения есть $\mu_{nm} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - m^2$. Легко видеть, что

$$\sigma = \{\mu_{nm} | n, m \in Z_{+\}=\left\{\frac{1}{4}+k \vee k \in Z\right\}}$$

и

$|\mu_{nm}| \geq \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2} + m\right) \forall m, n \in Z_{+}.$ (4)

Обозначим $\varphi_n(x) = sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x$. Системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\varphi'_n(x)\}$ являются ортогональными в $L_2[0,\pi]$.

Перенумеруем множество σ собственных значений A_0 в порядке возрастания $\sigma = \{\eta_k | k \in Z\}$ так, что $\eta_{-1} = \frac{-3}{4} < 0 < \eta_0 = \frac{1}{4}$.

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде ряда Фурье по полной, ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе функций

. (5)

Обозначим H_k)=W_2^k), H_k=W_2^k]), $k \in N$ пространства Соболева. Пусть $A = A$ в $L_2(\Omega)$и S_0 есть множество конечных линейных комбинаций элементов системы (5). Легко видеть, что область определения

$$D(A) = \{u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{nm} e_{nm}^{c} + b_{nm} e_{nm}^{s}) \in L_2(\Omega) \vee \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm}^2 (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty\}$$

и

$$Au = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm} (a_{nm} e_{nm}^{c} + + b_{nm} e_{nm}^{s}) \forall u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{nm} e_{nm}^{c} + b_{nm} e_{nm}^{s}) \in D(A).$$

Рассмотрим линейное уравнение

$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), 0 < x < \pi, t \in R.$ (6)

Определение. Обобщенным решением задачи (5),(2),(3) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx})dxdt = \int_\Omega f(x,t)\varphi dxdt \forall\varphi \in S_0.$$

Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx})dxdt - \int_\Omega sinu\varphi dxdt = 0 \forall\varphi \in S_0.$$

Лемма 1. Пусть функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное обобщенное решение

$u \in H_1(\Omega) \cap C(\Omega)$ (7)

задачи (5), (2), (3). Если $f(x,t) \in H_1(\Omega)$, то

$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$

(8)

и граничные условия (2) выполнены в классическом смысле.

Доказательство**.** Разложим функцию $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ в ряд Фурье по системе (5):

$f = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty (a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s)$.

Коэффициенты данного ряда удовлетворяют условию

$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty.$

(9)

Из (4) следует, что $kerA = \{0\}$ и задача (5),(2),(3) имеет единственное обобщенное решение

$u = A^{-1}f = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{\mu_{nm}}(a_{nm}e_{nm}^c + b_{nm}e_{nm}^s)$.

Поскольку, согласно (4), последовательности $\left\{\frac{n}{\mu_{nm}}\right\}, \left\{\frac{m}{\mu_{nm}}\right\}$ ограничены, а последовательности $\{\varphi_n(x)\}, \{\varphi'_n(x)\}$ ортогональны в $L_2[0,\pi]$, то $u \in H_1(\Omega)$.

Из неравенства Коши-Буняковского следует

$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}e_{nm}^c| + |b_{nm}e_{nm}^s|) \leq$

$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{\mu_{nm}^2}\right)^{1/2} (\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty (a_{nm}^2 + b_{nm}^2))^{1/2}$. (10)

Сходимость ряда $\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{\sqrt{n}}{\mu_{nm}^2}$, а следовательно, и ряда $\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{\mu_{nm}^2}$ вытекает из следующих выкладок:

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{\sqrt{n}}{\mu_{nm}^2} \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{\sqrt{n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(\sum_{m=0}^n \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}-m\right)^2} + \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}-m\right)^2}\right) <$$

$$2\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sum_{l=0}^\infty \frac{1}{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} < \infty.$$

Отсюда и (9),(10) следует $u \in C(\Omega)$. Включение (7) доказано.

Если $f(x,t) \in H_1(\Omega)$, то

$$f_t = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty m(-a_{nm}e_{nm}^s + b_{nm}e_{nm}^c)$$

и из равенства Парсеваля следует

$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty m^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty.$ (11)

Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{m^4}{\mu_{nm}^2}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty$$

и включение $u_{tt} \in L_2(\Omega)$. Легко видеть, что $u_{tx} = (A^{-1}f_t)_x$.

Для доказательства включения $u_{xx} \in L_2(\Omega)$ достаточно проверить, что сходится следующий ряд

$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{n^4}{\mu_{nm}^2}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2)$. (12)

При $m = 0$ имеем $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(a_{n0}^2 + b_{n0}^2) < \infty$.

При $m > 0$ имеем

$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{n^4}{\mu_{nm}^2}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) = \sum_{n\leq 2m} \frac{n^4}{\mu_{nm}^2 m^2} m^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) + \sum_{n>2m} \frac{n^4}{\mu_{nm}^2}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \leq$

$$\leq 64 \sum_{n\leq 2m} m^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) + \sum_{n>2m} \frac{n^4}{\mu_{nm}^2}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2).$$

При $n > 2m$ выполнено неравенство $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - m^2 > \frac{3}{4}n^2$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{n^4}{\mu_{nm}^2}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2)$$
$$\leq 64 \sum_{n\leq 2m} m^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2)$$
$$+ \frac{16}{9} \sum_{n>2m} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2).$$

Отсюда и из неравенства (11) вытекает сходимость ряда (12). Таким образом, $u \in H_2(\Omega)$.

Докажем, что $u \in C^1(\Omega)$. Для этого достаточно доказать сходимость следующих числовых рядов.

$$I = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{n}{\mu_{nm}} \vee$$
$$J = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{m}{\mu_{nm}} \vee$$

(При $m = 0$ имеем $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$).

Из неравенства Коши-Буняковского следует

$$I \leq \left(\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{n^2}{\mu_{nm}^2 m^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty m^2 (a_{nm}^2 + b_{nm}^2)\right)^{1/2}.$$

Исследуем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2}{\mu_{nm}^2 m^2}=\sum_{n\le 2m}\frac{n^2}{\mu_{nm}^2 m^2}+\sum_{n>2m}\frac{n^2}{\mu_{nm}^2 m^2}\le 4\sum_{n\le 2m}\frac{1}{\mu_{nm}^2}+\sum_{n>2m}\frac{n^2}{(n+m+1/2)^2(n-m+1/2)^2 m^2}<$$

$$2\pi^4+\sum_{n>2m}\frac{1}{(n-n/2+1/2)^2 m^2}<2\pi^4+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{19}{9}\pi^4.$$

Отсюда и (11) вытекает сходимость ряда I. Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского выведем

$$J\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m^2\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)\right)^{1/2}<\infty.$$

Из сходимости рядов I, J вытекает включение $u\in C^1(\Omega)$. Включение (8) и лемма доказаны.

§ 2. Нелинейное уравнение.

Сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема. Задача (1)-(3) имеет нетривиальное решение $u\in H_2(\Omega)\cap C^1(\Omega)$, которое зависит от времени.

Доказательство. Решение задачи (1)-(3) найдем, как решение операторного уравнения

$Au - sinu = 0.$ (13)

Рассмотрим линейную оболочку всех собственных векторов оператора A с собственными значениями $\eta_{-n},\dots,\eta_n$ и обозначим ее E_n. Из неравенства (4) вытекает конечномерность E_n. Рассмотрим на E_n функционал

$$F(u)=\frac{1}{2}(Au,u)+\int_{\Omega}$$

Обозначим $M=dimE_n, S^l=\{x\in R^{l+1}\big|\|x\|=1\}$.

При доказательстве существования критической точки функционала FнаE_n будем использовать лемму "о перевале" [25].

Лемма 2. Пусть $F\in C^1(E_n,R)$ и удовлетворяет условию Пале-Смейла, состоящему в том, что из любой последовательности $\{x_j\}\in E_n$ такой, что $F(x_j)\vee\le K$ и $F'(x_j)\to 0$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Предположим также, что существуют непрерывные, взаимно однозначные отображения

$$\varphi: S^k\to E_n, \psi: S^{M-k-1}\to E_n$$

такие, что множества $\varphi)$ и $\psi(S^{M-k-1})$ не пересекаются и

$$h(B^{k+1})\cap\psi(S^{M-k-1})\ne\emptyset$$

для любого непрерывного продолжения h отображения φ внутрь единичного шара $B^{k+1}\subset R^{k+1}$ (Поверхности $\varphi)$ и $\psi(S^{M-k-1})$, удовлетворяющие этим условиям будем называть зацепляющимися). Пусть существуют константы c_0, c_1 такие, что

$F(\varphi(x))\le c_0c_1\le F(\psi(y))\forall x\in S^k,\forall y\in S^{M-k-1}$.

Тогда

$$c=\inf_h\max_{x\in B^{k+1}}F(h(x))\ge c_1$$

является критическим значением F. Здесь h представляет любое непрерывное продолжение отображения φ внутрь единичного шара $B^{k+1}\subset R^{k+1}$ и inf берется по всем таким h.

Дальнейшее доказательство теоремы разобъем на четыре части: 1) проверка условий леммы "о перевале", 2) предельный переход при $n\to\infty$. 3) доказательство нетривиальности решения, 4) доказательство зависимости решения от времени.

Проверка условий леммы "о перевале"

Проверим выполнение условия компактности Пале-Смейла. Пусть для последовательности $\{u_k\}\subset E_n$ выполнены условия

$F(u_k)\vee\le K\ \forall k, F'(u_k)\to 0$ при $k\to\infty$ (14)

и K не зависит от k. Тогда

$)$=$(\xi_{k,},\varphi)\forall\varphi\in E_n$, (15)

где, согласно (14), $\|\xi_k\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Умножим равенство (15) скалярно в $L_2(\Omega)$ на Au_k и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$\|Au_k\|^2=-(sin(u_k),Au_k)+(\xi_{k,},Au_k)\le C\|Au_k\|$.

Здесь C есть положительная константа, не зависящая от k. Отсюда и (4) следует $\|Au_k\|\le C, \|u_k\|\le 4C$. Из последнего неравенства и конечномерности пространства E_n вытекает выполнение условия Пале-Смейла.

Построим зацепляющиеся поверхности в E_n, для которых выполнены условия леммы о "перевале". Для этого возьмем достаточно большое натурально число n и подпространства E_n^+ и E_n^-, натянутые на собственные функции оператора A с собственными значениями $\eta_{-1},\dots,\eta_n$ и $\eta_{-n},\dots,\eta_{-2}$ соответственно.

Поскольку $\eta_{-2}=\frac{-7}{4}$ есть наибольшее собственное значение A на E_n^- и

$1-cos(u)\le\frac{7}{8}u^2\forall u\in R$,

то

$F(u)\le-\frac{7}{8}\|u\|^2+\frac{7}{8}\int_{\Omega}\ u\vee\quad{}^2dxdy=0\forall u\in E_n^-$. (16)

Существует $r>0$, такое, что $sin(u)>\frac{7}{8}u\forall u\in$. Поэтому

$1-cos(u)\ge\frac{7}{16}u^2\forall u\in[-r,r]$, (17) Обозначим $\|u\|_\infty=\|u\|_{L_\infty}$. Пространство E_n является конечномерным. Поэтому существует положительная константа C_n, такая, что

$\|u\|_\infty\le C_n\|u\|\forall u\in E_n$.

(18)

Обозначим $S_1=$. Для любой функции $u\in S_1$ имеем $\|u\|_\infty\le C_n\|u\|=r$.

Учитывая (17) и то, что $\eta_{-1}=\frac{-3}{4}$ есть наименьшее собственное значение A на E_n^+, получим

$F(u)\ge\frac{1}{2}\eta_{-1}\|u\|^2+\int_{\Omega}$ (19)

Пусть e_0 есть собственная функция A, соответствующая собственному значению η_{-1}. Выберем константу $R_1 > max$ и обозначим

$S_2 =$

Поскольку η_{-1} есть наибольшее собственное значение A на $E_n^{-\oplus e_0}$, то

$F(u) \leq -\frac{3}{8}\|u\|^2 + \int_\Omega$.

Таким образом, имеют место неравенства

$$F(u) \leq 0 < \frac{r}{16C_n} \leq F(v) \forall u \in S_2, \forall v \in S_1.$$

Поскольку поверхности S_1, S_2 являются зацепляющимися, то для функционала F выполнены условия леммы "о перевале". Из нее следует существование стационарной точки u_n функционала F на E_n такой, что

$F(u_n) \geq \frac{r}{16C_n} > 0.$ (20)

Предельный переход

Для функций u_n выполнено уравнение Эйлера

$)$=0 $\forall \varphi \in E_n$. (21)

Умножим равенство (21) скалярно в $L_2(\Omega)$ на Au_n и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$\|Au_n\|^2$=$-(sin(u_n), Au_n) \leq C\|Au_n\|$.

Следовательно,

$\|Au_n\| \leq C, \|u_n\| \leq 4C.$ (22)

Покажем, что оператор $A^{-1}: L_2(\Omega) \to C(\Omega)$ является вполне непрерывным. Пусть M есть ограниченное множество в $L_2(\Omega)$: $\|u\| \leq C_1 \forall u \in M$. Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ есть положительные константы. Из неравенства (10) следует

$$\|A^{-1}u\|_C \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2)\right)^{1/2} \leq C_1 \forall u \in M.$$

Покажем, что множество M равностепенно непрерывно. Для любых x_1, x_2 имеем

$$|A^{-1}u(x_1,t) - A^{-1}u(x_2,t)| = \left|\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}}\left(sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_1 - sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_2\right)(a_{nm}cosmt + b_{nm}sinmt)\right| \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt[4]{|x_1-x_2|}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm} \vee \sqrt[4]{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\leq \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(a_{nm}^2 + b_{nm}^2)\right)^{1/2}\sqrt[4]{|x_1-x_2|} \leq C_2\sqrt[4]{|x_1-x_2|},$$

поскольку при доказательстве леммы 1 было показано, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\mu_{nm}^2}$ сходится. Здесь a_{nm}, b_{nm} есть коэффициенты Фурье функции u. Аналогично доказывается, что

$|A^{-1}u(x,t_1) - A^{-1}u(x,t_2)| \leq C_3\sqrt[4]{|t_1-t_2|}$.

Из теоремы Арцела вытекает вполне непрерывность оператора $A^{-1}: L_2(\Omega) \to C(\Omega)$. Отсюда и из оценок (22) следует, что из последовательности u_n можно выбрать подпоследовательность u_{n_k}, такую, что

$u_{n_k} \to u \in C(\Omega)$ равномерно в Ω и

$Au_{n_k} \to \xi$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Поскольку оператор $A^{-1}: L_2(\Omega) \to C(\Omega)$ вполне непрерывен, то $u_{n_k} \to A^{-1}\xi$ сильно и $\xi = u$. Из равномерной сходимости последовательности u_{n_k} и теоремы Лебега следует

$sinu_{n_k} \to u$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Перейдем к пределу в равенстве (21) при $k \to \infty$:

$(Au + sin(u), \varphi)$=0 $\forall \varphi \in nE_n$.

(23)

Отсюда вытекает равенство (13). Утверждение о гладкости решения следует из леммы.

Доказательство нетривиальности решения

Докажем, что u есть нетривиальное решение. Предположим, что $u \equiv 0$. Тогда $u_{n_k} \to 0$ равномерно в Ω и найдется $K \in N$, такое, что в точках, где $u_{n_k} \neq 0$, имеет место неравенство

$1 > \frac{sinu_{n_k}}{u_{n_k}} > \frac{7}{8}\ \forall k > K, \forall(x,t) \in \Omega.$

Следовательно,

$$|u_{n_k} - sinu_{n_k}| \leq \frac{1}{8}|u_{n_k}|\ \forall k > K, \forall(x,t) \in \Omega$$

и

$\|u_{n_k} - sinu_{n_k}\| \leq \frac{1}{8}\|u_{n_k}\| \forall k > K.$ (24)

Из (23) следует

$\left((A+I)u_{n_k}, \varphi\right) =) \forall \varphi \in E_n$.

Положив в этом равенстве $\varphi = (A+I)u_{n_k}$, получим

$\|(A+I)u_{n_k}\| \leq \|u_{n_k} - sin(u_{n_k})\|.$ (25)

Поскольку наименьшим собственным значением оператора $A + I$ является число $\frac{1}{4}$, то

$\|(A+I)u_{n_k}\| \geq \frac{1}{4}\|u_{n_k}\|.$ (26)

Из (24)-(26) следует $\frac{1}{4}\|u_{n_k}\| \leq \frac{1}{8}\|u_{n_k}\|, \|u_{n_k}\| = 0, F(u_{n_k}) = 0$при $\forall k > K$. Это противоречит (20). Таким образом, найденное решение u является нетривиальным.

4. Зависимость решения от времени

Покажем, что найденное решение зависит от времени. Предположим противное, то есть $u = u(x)$ и является нетривиальным решением следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$-u'' + sinu = 0;$ (27)

$u(0) = u'(\pi) = 0.$ (28)

Стандартно умножив уравнение (27) на u_x, получим

$u_x^2 = 2(C - cosu).$

(29)

Здесь C есть некоторая константа. Если константа $C < 1$, то подставив в равенство (29) $x = 0$, получим

$u_x^2(0) = 2(C - 1) < 0$,

что невозможно. Если $C > 1$, то из (29) следует $u_x^2 > 0$, что противоречит второму граничному условию (28). В случае $C = 1$ уравнение (29) приводится к виду

$u_x = \pm 2sin\frac{u}{2}$.

Проинтегрировав данное уравнение, получим решения
$tg\frac{u}{4} = Ce^{\pm 2x}, C \neq 0,$ (30)
а также постоянные решения $u = 2\pi m, m \in Z$. Ненулевые непостоянные решения не удовлетворяют граничным условиям (28). Подставив в (30) $x = 0$, получим $C = 0$, что противоречит (30).

Таким образом, задача (27), (28) не имеет нетривиального решения. Теорема доказана.

Заключение. В теореме, опираясь на лемму "о перевале", доказано существование 2π-периодического по времени решения уравнения $sin-$Гордон, которое зависит от времени.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/4.6).

Список использованных источников

[1] *Vejvoda O.* Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equations in one dimension // Czechoslovak Mathematical Journal. 1964. Vol 4. Pp. 341-382. URL: https://eudml.org/doc/12225 (дата обращения: 11.07.2018).

[2] *Lovicarova H.* Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equations in one dimension // Czechoslovak Mathematical Journal. 1969. Vol. 19. Pp. 324-342. URL: https://eudml.org/doc/12474 (дата обращения: 11.07.2018).

[3] *Rabinowitz P.* Free vibration for a semilinear wave equation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1978. Vol. 31, issue 1. Pp. 31-68. DOI: 10.1002/cpa.3160310103

[4] *Rabinowitz P.* Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1984. Vol. 37, issue 2. Pp. 189-206. DOI: 10.1002/cpa.3160370203

[5] *Brezis H., Nirenberg L.* Forced vibration for a nonlinear wave equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1978. Vol. 31, issue 1. Pp. 1-30. DOI: 10.1002/cpa.3160310102

[6] *Brezis H., Nirenberg L.* Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Série 4. 1978. Vol. 5, no. 2. Pp. 225-326. URL: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_2_225_0/ (дата обращения: 11.07.2018).

[7] *Рудаков И.А.* Нелинейные колебания струны // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1984. № 2. С. 9-13.

[8] *Tanaka K.* Infinitely many periodic solutions for the equation: II. // Transactions of the American Mathematical Society. 1988. Vol. 307, no. 2. Pp. 615-645. DOI: 10.2307/2001191

[9] *Плотников П.И.* Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Математический сборник. 1988. Т. 136(178), № 4(8). С. 546-550.

[10] *Barby V., Pavel N.H.* Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients // Transactions of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 349, no. 5. Pp. 2035-2048. DOI: 10.1090/S0002-9947-97-01714-5

[11] *Rudakov I.A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with non-constant coefficients // Mathematical Notes. 2004. Vol. 76, no. 3-4. Pp. 395–406. DOI: 10.1023/B:MATN.0000043467.04680.1d

[12] *Berti M., Biasco L.* Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities // Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire. 2006. Vol. 23, no. 4. Pp. 439-474. DOI: 10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[13] *Yuan X.* Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations // Journal of Differential Equations. 2006. Vol. 230, issue 1. Pp. 213-274. DOI: 10.1016/j.jde.2005.12.012

[14] *Baldi P., Berti M.* Forced Vibrations of a Nongomogeneous String // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2008. Vol. 40, issue 1. Pp. 382-412. DOI: 10.1137/060665038

[15] *Berti M., Bolle P.* Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. 2008. Vol. 15, issue 1-2. Pp. 247-276. DOI: 10.1007/s00030-007-7025-5

[16] *Berti M., Biasco L.* Procesi M. KAM for reversible derivative wave equations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2014. Vol. 212, issue 3. Pp. 905-955. DOI: 10.1007/s00205-014-0726-0

[17] *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами // Математический сборник. 2007. Т. 198, вып. 7. С. 91-108. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9541673 (дата обращения: 11.07.2018).

[18] *Ji S.* Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with - dependet coefficients // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2008. Vol. 32, issue 2. Pp. 137-153. DOI: 10.1007/s00526-007-0132-7

[19] *Ji S.* Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264, issue 9. Pp. 5527-5540. DOI: 10.1016/j.jde.2018.02.001

[20] *Ji S., Li Y.* Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. Vol. 199, issue 2. Pp. 435-451. DOI: 10.1007/s00205-010-0328-4

[21] *Ji S., Gao Y., Zhu W.* Existence and multiplicity of periodic solutions for Dirichlet-Neumann boundary value problem of a variable coefficient wave equation // Advanced Nonlinear Studies. 2016. Vol. 16, issue 4. Pp. 765 -773. DOI: 10.1515/ans-2015-5058

[22] *Chen J.* Periodic solutions to nonlinear wave equations with spatially dependent coefficients // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2015. Vol. 66, issue 5. Pp. 2095 -2107. DOI: 10.1007/s00033-015-0497-y

[23] *Chen J., Zhang Z.* Existence of periodic solutions to asymptotically linear wave equations in a ball // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2017. Vol. 56, issue 58. Pp. 3-27. DOI: 10.1007/s00526-017-1154-4

[24] *Rudakov I.A.* Periodic Solutions of the Qusilinear Equation of Forced Vibrations of an Inhomogeneous String // Mathematical Notes. 2017. Vol. 101, no. 1-2. Pp. 137-148. DOI: 10.1134/S000143461701014X

[25] *Nirenberg L.* Variational and topological methods in nonlinear problems // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1981. Vol. 4, no. 3. Pp. 267-302. URL: https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183548116 (дата обращения: 11.07.2018).

[26] *Coron J.M.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity // Mathematische Annalen. 1983. Vol. 262, issue 2. Pp. 273–285. DOI: 10.1007/BF01455317

[27] *Рудаков И.А.* Задача о свободных периодических колебаниях струны с немонотонной нелинейностью // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, № 1(241). С. 215-216. URL: http://www.mathnet.ru/links/a59d8993976d9b4195571b1cc5d4c140/rm2163.pdf (дата обращения: 11.07.2018).

[28] *Kondrat'ev V.A., Rudakov I.A.* Periodic Solutions of a Quasilinear Wave Equation // Mathematical Notes. 2009. Vol. 85, no. 1-2. Pp. 34–50. DOI: 10.1134/S0001434609010040

Поступила 11.07.2018; принята в печать 20.08.2018; опубликована онлайн 30.09.2018.

Reference

[1] Vejvoda O. Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equations in one dimension. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1964; 4:341-382. Available at: https://eudml.org/doc/12225 (accessed 11.07.2018).

[2] Lovicarova H. Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equations in one dimension. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1969; 19:324-342. Available at: https://eudml.org/doc/12474 (accessed 11.07.2018).

[3] Rabinowitz P. Free vibration for a semilinear wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1978; 31(1):31-68. DOI: 10.1002/cpa.3160310103

[4] Rabinowitz P. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1984; 37(2):189-206. DOI: 10.1002/cpa.3160370203

[5] Brezis H., Nirenberg L. Forced vibration for a nonlinear wave equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1978; 31(1):1-30. DOI: 10.1002/cpa.3160310102

[6] Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Série 4*. 1978; 5(2):225-326. Available at: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_2_225_0/ (accessed 11.07.2018).

[7] Rudakov I.A. Nonlinear vibrations of a string. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 1984; 2:9-13. (In Russian)

[8] Tanaka K. Infinitely many periodic solutions for the equation: II. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1988; 307(2):615-645. DOI: 10.2307/2001191

[9] Plotnikov P.I. Existence of a countable set of periodic solutions to the problem of forced oscillations for a weakly nonlinear wave equation *Matem. Sbornik.* 1988; 136(4):546-550. (In Russian)

[10] Barby V., Pavel N.H. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1997; 349(5):2035-2048. DOI: 10.1090/S0002-9947-97-01714-5

[11] Rudakov I.A. Periodic solutions of a nonlinear wave equation with non-constant coefficients. *Mathematical Notes.* 2004; 76(3-4):395–406. DOI: 10.1023/B:MATN.0000043467.04680.1d

[12] Berti M., Biasco L. Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*. 2006; 23(4):439-474. DOI: 10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[13] Yuan X. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *Journal of Differential Equations*. 2006; 230(1):213-274. DOI: 10.1016/j.jde.2005.12.012

[14] Baldi P., Berti M. Forced Vibrations of a Nongomogeneous String. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2008; 40(1):382-412. DOI: 10.1137/060665038

[15] Berti M., Bolle P. Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 2008; 15(1-2):247-276. DOI: 10.1007/s00030-007-7025-5

[16] Berti M., Biasco L. Procesi M. KAM for reversible derivative wave equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2014; 212(3):905-955. DOI: 10.1007/s00205-014-0726-0

[17] Rudakov I.A. Periodic solutions of a quasi-linear wave equation with variable coefficients. *Matem. Sbornik*. 2007; 198(7):91-108. (In Russian)

[18] Ji S. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with - dependet coefficients. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2008; 32(2):137-153. DOI: 10.1007/s00526-007-0132-7

[19] Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. *Journal of Differential Equations*. 2018; 264(9):5527-5540. DOI: 10.1016/j.jde.2018.02.001

[20] Ji S., Li Y. Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2011; 199(2):435-451. DOI: 10.1007/s00205-010-0328-4

[21] Ji S., Gao Y., Zhu W. Existence and multiplicity of periodic solutions for Dirichlet-Neumann boundary value problem of a variable coefficient wave equation. *Advanced Nonlinear Studies*. 2016; 16(4):765 -773. DOI: 10.1515/ans-2015-5058

[22] Chen J. Periodic solutions to nonlinear wave equations with spatially dependent coefficients. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2015; 66(5):2095 -2107. DOI: 10.1007/s00033-015-0497-y

[23] [23] Chen J., Zhang Z. Existence of periodic solutions to asymptotically linear wave equations in a ball. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2017; 56(58):3-27. DOI: 10.1007/s00526-017-1154-4

[24] Rudakov I.A. Periodic Solutions of the Qusilinear Equation of Forced Vibrations of an Inhomogeneous String. *Mathematical Notes.* 2017; 101(1-2):137-148. DOI: 10.1134/S000143461701014X

[25] Nirenberg L. Variational and topological methods in nonlinear problems. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1981;

4(3):267-302. Available at: https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183548116 (accessed 11.07.2018).

[26] Coron J.M. Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity. *Mathematische Annalen*. 1983; 262(2):273–285. DOI: 10.1007/BF01455317

[27] Rudakov I.A.. The problem of free periodic oscillations of a string with non-monotonic non-linearity. *Russian Mathematical Surveys*. 1985; 40(1):237-238. DOI: 10.1070/RM1985v040n01ABEH003548

[28] Kondrat'ev V.A., Rudakov I.A. Periodic Solutions of a Quasilinear Wave Equation. *Mathematical Notes*. 2009; 85(1-2):34–50. DOI: 10.1134/S0001434609010040

Submitted 11.07.2018; revised 20.08.2018;
published online 30.09.2018.

About the author:

Igor A. Rudakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University (5 2nd Baumanskaya Str., Build. 1, Moscow 105005, Russia); Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamsk highway, Moscow 125993, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4669-0532, rudakov_ia@mail.ru