УДК 372.851
DOI: 10.25559/SITITO.14.201804.966-976

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ: ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК

О.М. Корчажкина
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

INTERACTIVE METHODS OF CONSTRUCTING ON THE PLANE: THE LOCUS OF POINTS

Olga M. Korchazhkina
Federal Research Centre "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Ключевые слова

Математическое образование; инженерное мышление; визуализация; виртуальная среда; математический конструктор; геометрические построения на плоскости; систематизация знаний, геометрическое место точек; укрупнённая дидактическая единица.

Аннотация

В статье рассматривается проблема систематизации знаний учащихся средней школы в курсе геометрии по усвоению понятия «геометрическое место точек». Данный научный концепт выступает в качестве укрупнённой дидактической единицы, объединяющей широкий спектр геометрических задач на построение. В подобного рода задачах метод геометрического места может выступать и как цель, и как средство поиска решения. Под укрупнённой дидактической единицей понимается, по определению её автора – академика П.М. Эрдниева, дидактическая единица, которая соответствует крупноблочному построению содержания учебного предмета и которая строится по многокомпонентному принципу, являя собой набор порций информации, состоящий из логически разнородных, но обладающих информационной общностью групп родственных понятий. Обсуждаются методические приёмы и стратегии учебно-познавательной деятельности учащихся, способствующие системному усвоению понятия в ходе решения задач из школьного курса планиметрии. Эти методы и стратегии имеют своей основой концепцию Л.Я. Зориной, согласно которой любое системное знание состоит и формируется из двух частей – теоретической (оснований) и практической (следствий). Если основания состоят из исходных посылок и эмпирического базиса, то следствия содержат объяснения и интерпретации известных фактов, а также выводы и обобщения, сделанные на основе исходных посылок и известных фактов. Приводятся примеры визуализации заданий на поиск геометрического места точек, выполненных в интерактивной творческой среде «1С: Математический конструктор 6.0», которые соответствуют обеим частям системного знания. В результате проведённого исследования установлено, что интерактивные творческие среды, обладающие функцией динамической визуализации, позволяют повысить эффективность усвоения учащимися обобщённых понятий. Статья адресована методистам, практикующим учителям, педагогам дополнительного образования и другим заинтересованным работникам сферы среднего общего образования для обновления содержательных линий предметной области «Математика и информатика» и при создании программы профильного курса «Математика для инженерных специальностей». Она может также оказать помощь учителям при выборе стратегий систематизации знаний учащихся в различных предметных областях.

Об авторе:

Корчажкина Ольга Максимовна, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт образовательной информатики, Институт кибернетики и образовательной информатики, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0020-4914, olgakomax@gmail.com

Keywords

Mathematics education; engineering thinking; visualization; virtual environment; MathKit; geometrical constructions on the plane; knowledge systematization; locus of points; integrated didactic units.

Abstract

The article focuses on the problem of how to systematize secondary school students' knowledge in Geometry while assimilating a concept "Locus of Points". The scientific concept acts as an integrated didactic unit that combines a wide range of problems which students face fulfilling geometrical tasks on construction. In such kind of problems, the locus of points method can act both as a goal and as a means of finding the solution. The integrated didactic unit, according to the definition given by its author, academician P.M. Erdniev, is a didactic unit which corresponds to a large-block construction of the content of the subject and is built on the multi-component principle. It presents a set of portions of information that consists of logically heterogeneous but having informatically common groups of related concepts. The article also discusses the instructional learning techniques and strategies that promote systemic study of the geometrical concept while school students fulfil tasks on the school planimetry course. The methods and strategies under consideration have as their basis the concept by L.Ya. Zorina which claims that any system of knowledge consists of two parts – theoretical (bases) and practical (consequences) ones. The bases consist of initial assumptions and empirical basis, while the consequences contain explanations and interpretations of known facts, as well as conclusions and generalizations grounded on initial assumptions and known facts. A few examples of how to visualize the process of searching for a locus of points performed in the interactive creative environment "1C: MathKit 6.0"are given. As a result of the research carried out it is established that the interactive creative environments, which possess a dynamic visualization function, allow students to improve the efficiency in mastering generalized concepts. The article is addressed to methodologists, secondary school and extra education teachers and other interested experts of educational field to update the content lines of the subject area "Mathematics and Computer Studies" and to create a programme for a specialized course "Mathematics for Engineering Specialties". It can also support teachers in choosing strategies to systematize students' knowledge in various subject areas. The using of the Matlab in the course of mathematical statistics at the technical university is considered, the pos-sibilities of the Matlab for statistics are studied, the algorithm for testing the statistical hypothesis on the distribu tion of the population and the results of its implementation in Matlab is presented.

Новая роль математического образования в современном мире

Более полувека назад «мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках» [1 : 13]. Этот «сюрприз», удививший мир во второй половине прошлого века, базировался на том, что математика, как *наука наук*, предоставила человеку для изучения окружающей его действительности такие инструменты, которых в то время не имела ни одна другая дисциплина, в том числе и зарождающаяся *информатика*. Затем информатика стала постепенно занимать главенствующие позиции, оттесняя на задний план свою мать-прародительницу, что обусловило начало известного процесса информатизации всех сторон общественной жизни развитых и развивающихся государств.

Сегодня же, наконец, о математике вновь заговорили как о прикладной дисциплине, значение которой заметно возросло в условиях перехода мировой индустрии к НБИКС-технологиям. Более того, формирование математического мышления как важнейшей составляющей инженерного мышления – наравне с естественно-научным, проектным и конструкторским мышлением – отвечает целям подготовки инженерно-технических кадров для подавляющего большинства отраслей промышленности как в нашей стране, так и за рубежом, чему в настоящее время посвящено достаточное число публикаций [2-7].

Математическое мышление формируется в рамках системного математического образования путём решения задач, доказательства теорем, логических рассуждений, поиска противоречий в утверждениях и доказательствах, сравнений и сопоставлений математических объектов, обобщений и выводов – словом, совокупности тех мыслительных процессов, которые способствуют решению проблем, необходимых учащимся не только в области «чистой математики», но и в прикладных предметных областях, связанных, в том числе, и с инженерно-технической сферой деятельности. Вопросы формирования и развития у учащихся средней школы математического мышления через решение задач разного уровня сложности постоянно находится в зоне внимания отечественных и зарубежных учёных, педагогов и методистов образования [8-11].

Кроме того, в содержательной части отечественных образовательных стандартов – ФГОС ООО и С(П)ОО второго поколения – проводится идея объединения предметных областей «Математика» и «Информатика» в единую область знаний «Математика и информатика» [12 : 14-16; 13 : 22-24], что отвечает современным потребностям развития образования, наук и технологий для становления широкого спектра отраслей цифровой экономики.

В рамках предметной области «Математика и информатика» встаёт вопрос об использовании новых форм визуализации при обучении математике. Подобные проблемы при обучении программированию обсуждались, например, в [14 : 11-15], где сделан подробный анализ подходов к обоснованию визуализации в качестве метода активного обучения. Авторы данной работы, указывая на важность формирования у учащихся визуального, или зрительно-образного, мышления, приводят следующее определение визуального мышления как способа интеллектуального развития личности: визуальное мышление – это «порождение новых образов, их свойств, взаимосвязей с целью дальнейшего оперирования и преобразования. Результатом визуализации является поиск и появление новых значимых для человека графических образов и их взаимосвязей в виде графических схем» [14 : 12]. Одной из интерактивных форм визуализации является динамическая визуализация, с помощью которой изучаемые процессы и явления обретают «зримый смысл» за счёт формирования пространственного воображения учащихся, развития вариативности мышления и повышения мотивации к учению [15].

Обобщённые понятия в курсе планиметрии

Методы динамической визуализации при решении геометрических задач на построение получили в последнее время широкое распространение в связи с доступностью интерактивных творческих сред, таких, например, как *GeoGebra* [16] или «*1С Математический конструктор*» [17]. Функциональные возможности подобных программных платформ позволяют осуществлять геометрические построения путём выбора соответствующих кнопок на панелях рабочего окна, что существенно экономит время на испытание выдвинутых гипотез при поиске решения задачи. Динамические свойства среды позволяют осуществлять многочисленные визуальные вариации для верификации различных гипотез, что особенно важно при решении геометрических задач на построение, поскольку это позволяет просматривать возникающие комбинации фигур, их пересечения, образование новых геометрических объектов, определять правила их взаимодействия, иными словами, реализовать один из дидактических принципов – принцип наглядности при усвоении учебного материала применительно к работе в виртуальной среде. С этой точки зрения геометрические задачи на построение, относящиеся к *конструктивной геометрии*, позволяют «абстрактную математическую дисциплину перевести в чертёжно-графическую практику» [18 : 4], что является благодатным полем для визуализации обобщённых понятий.

Джордж Пойа, выдающийся математик нашего времени, также подчёркивал необходимость включения геометрических задач на построение в программу обучения, поскольку «они представляют собой наиболее пригодное средство для ознакомления начинающего с геометрическими фигурами и лучше всего подходят для освоения путей решения задач» [19 : 25].

Обобщённые понятия в курсе планиметрии подразделяются на несколько уровней [20]. Прежде всего, это абстрактные сущностные и деятельностные категории – теорема, аксиома, формула, вывод, признак, доказательство, равенство, подобие, симметрия, параллельность, система координат, пересечение, область, место и пр. Фундаментальные (базовые) элементы – точка, прямая, кривая, плоскость; производные простые элементы – луч, отрезок, дуга; геометрические фигуры – треугольник, окружность, квадрат, трапеция и пр.; производные объекты, возникающие как соотношения простых объектов между собой – параллельные прямые, перпендикуляр, угол, биссектриса; производные объекты, возникающие как соотношения между простыми объектами и фигурами, как правило, поддающиеся измерению – сторона, внутренний/внешний угол, основание, вершина, высота, медиана, радиус, диаметр, хорда, площадь круга/ромба, длина окружности, периметр, сектор, сегмент, средняя линия и пр.; линейные и угловые единицы измерений – сантиметр, метр, градус, радиан; константы – число $\boldsymbol{\pi}$ = 3,14159, золотое сечение $\boldsymbol{\varphi}$ = 1.618, константа окружности $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}$ = 6,28308.

Особое место среди абстрактных сущностных и деятельных категорий занимают обобщённые понятия, которые, с одной стороны, заключают в себе свойства целого класса однородных или сходных геометрических объектов, а с другой – сами могут являться реальными геометрическими объектами, образованными упорядоченной совокупностью определённых элементов как части объектов данного класса. К подобным категориям относится распространённое понятие ***геометрическое место точек*** (ГМТ) [21]. Характеризуя заданные свойства и/или признаки совокупности точек, принадлежащих некоей группе геометрических объектов, любое ГМТ представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или признаку. Если находится ещё какая-либо точка, обладающая этими характеристиками, то она определённо принадлежит указанному ГМТ. И наоборот: если точка принадлежит указанному ГМТ, то она определённо обладает выделенными характеристиками, которыми обладают и все остальные точки этого ГМТ.

Простейшими ГМТ на плоскости являются:

- *окружность* как ГМТ, равноудалённых от фиксированной точки;
- *перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка* как ГМТ, равноудалённых от обоих концов отрезка;
- *пара прямых, параллельных фиксированной прямой и расположенных симметрично относительно неё*, как ГМТ, равноудалённых от фиксированной прямой;
- *биссектрисы угла, образованного двумя пересекающимися прямыми* как ГМТ, равноудалённых от каждой из пересекающихся прямых;
- *прямая* как ГМТ, равноотстоящих от двух фиксированных параллельных прямых.
- *две дуги окружностей одинакового радиуса, для которых данный отрезок является общей хордой* как ГМТ, из которых некоторый отрезок виден под фиксированным углом.

Две составляющие системного знания

Усвоение обобщённых понятий, или метапредметных универсалий, даёт возможность выстроить в представлении учащихся научную систему знаний и устройства мышления, то есть сформировать совокупность взглядов, принципов, методов и способов организации мыслительной деятельности, основанных на целостном, то есть системном, восприятии окружающего мира. Ещё в 70-х годах прошлого века Л.Я. Зорина, специалист в области педагогических технологий, настаивала на необходимости формирования системного знания учащихся старших классов средней школы, основой которого является усвоение сведений о том, как достичь знания о знании, или метазнания, а также на условия и средства его достижения. Метазнание, как указывается в [22 : 18-19], складывается путём овладения системой крупных теоретических категорий, так называемых знаниевых компонентов, или научных понятий, полученных в результате научно-теоретического обобщения научной теории и объединённых в комплексы объектов, имеющих общие свойства или признаки, а также основных законов (положений, правил) и научных фактов (примеров).

Л. Я. Зорина также отмечала, что любая научная теория состоит из двух частей, подлежащих усвоению при достижении системного знания. Первая, теоретическая, часть научной теории была названа *основания*. В неё включены обобщённые понятия наравне с исходными посылками и эмпирическим базисом – основными компонентами метазнания; тогда как вторая, практическая, часть – *следствия* – содержит объяснения и интерпретации известных фактов, а также выводы и обобщения, сделанные на основе исходных посылок и известных фактов. «В применении к обучению это означает, что наличие основных положений без связи их со следствиями превращает эти положения в отдельные ни с чем не связанные знания, служащие для запоминания и в лучшем случае для решения задач» [22 : 18].

По мнению Г.П. Щедровицкого «Строение понятия, в частности строение его формы, определяется, во-первых, характером объекта мысли и, во-вторых, «глубиной» познания, «глубиной» проникновения в объект. Последнее, в свою очередь, определяется характером познавательной деятельности, в частности характером и степенью опосредствования исследуемого отношения другими отношениями в процессе познания» [23]. Поэтому задания, целью которых является не только получение ответа, а попутно усвоение конкретного обобщённого понятия, должны строиться по определённой схеме, включающей несколько взаимосвязанных этапов.

Исходя из этого, развитие понятия *геометрическое место точек* в школьном курсе геометрии должно происходить в двух направлениях. Первый путь – это движение от абстрактного знания к конкретному, или от общего к частному с применением ***гипотетико-дедуктивного метода***, когда задаётся само понятие *геометрическое место точек* как абстрактная категория, а затем на примерах разного уровня сложности происходит его конкретизация. Таким образом складывается связь между обобщённым представлением о понятии и его проявлениях в конкретных учебных ситуациях. В подобных задачах ГМТ, участвуя в формировании гипотезы решения, выступает в качестве **средства, или инструмента, решения задачи**. Второй путь – это движение от конкретных фактов к их обобщению с применением ***эмпирико-индуктивного метода***. В этом случае учащимся предлагаются задания на нахождение конкретных ГМТ, что является **целью решения задачи**, а затем происходит концептуализация, то есть обобщение полученных решений с точки зрения общих свойств, которые характерны для кривых – носителей этого понятия.

Обобщённые понятия как часть *оснований* научной теории

Каковы стратегии движения в первом направлении, то есть ориентированные на усвоение обобщённого понятия ГМТ через решение геометрических задач на построение, когда функциональные возможности ГМТ делают его инструментом решения задач, а сам процесс учебно-познавательной деятельности выступает как процесс усвоения ***оснований научной теории***?

Ведущий российский психолог образования М.А. Холодная выделяет восемь психологически ориентированных моделей обучения, основанных на особенностях интеллектуального и психического становления ребёнка в процессе развития его мыслительных способностей: свободную, диалогическую, личностную, обогащающую, развивающую, структурирующую, активизирующую и формирующую [24 : 211–214]. Область реализации гипотетико-дедуктивного метода как способа усвоения обобщённого понятия *геометрическое место точек* укладывается в модель, использующую технологию укрупнения дидактических единиц (УДЕ), которая в классификации М.А. Холодной названа структурирующей моделью. Обучение на основе УДЕ включает в себя «совместное и одновременное изучение родственных разделов, взаимосвязанных действий и операций; самостоятельное усвоение знаний на основе сравнения, обобщения и аналогии; учёт единства образного и логического в мышлении; обратимость мыслительных действий при выполнении упражнений; выход на перспективы развития знания за счёт свёртывания и развёртывания учебной информации и т.д.» (цит. по [24 : 213]).

Термин УДЕ впервые был введён и использован в обучении математике академиком П.М. Эрдниевым в середине прошлого века. Под УДЕ понимается дидактическая единица, которая соответствует «крупноблочному построению содержания учебного предмета» [25 : 10] и которая строится по многокомпонентному принципу, являя собой как бы единое целое – набор «порций информации», состоящий из логически разнородных, но обладающих информационной общностью «клеточек учебного процесса» – «групп родственных понятий». Информационная общность подразумевает, что элементы УДЕ связаны между собой единой тематикой и/или проблематикой, а логическая разнородность между «порциями информации» означает, что их внутренние логико-смысловые связи и взаимоотношения включают как согласованные между собой, так и противоречащие друг другу компоненты. Разрешение этих противоречий и установление понимания, каким образом формируются согласованные связи между компонентами учебного материала, и означает решение учебно-познавательной задачи или усвоение нового знания. Кроме того, УДЕ должны быть компактны по форме, то есть содержать информацию в «уплотнённом виде», что облегчает её хранение в памяти [22 : 126], а их структура должна предусматривать «дедуктивное развёртывание» содержащегося в них учебного материала [22 : 123].

Проиллюстрируем на примере решение геометрической задачи на построение, в которой применяется гипотетико-дедуктивный метод поиска решения: метод построения правдоподобных рассуждений, который заключается в том, что путём использования логических законов из общих закономерностей выводятся следствия – частные утверждения. Таким образом происходит «дедуктивное развёртывание» учебного материала с целью усвоения обобщённого понятия *геометрическое место точек*.

Треугольник ***ABC*** вписан в окружность с центром в т. ***O*** (рис. 1, а). Пусть ***BH*** – высота треугольника, а ***BM***

– его медиана. Точка ***K*** симметрична точке ***A*** относительно точки ***H***. Перпендикуляр к ***AC***, проведённый через точку ***K***, пересекает сторону ***BC*** в точке ***P***. Соединим точку ***A*** с точкой ***P***. Каким свойством будут обладать вписанные треугольники, в которых отрезки ***AP*** и ***BM***, пересекающиеся в точке ***E***, взаимно перпендикулярны?

<u>Решение 1</u> (традиционное [26 : 22]). Обозначим через ***R*** точку пересечения отрезков ***AP*** и ***BH***, а через ***E*** – точку пересечения отрезков ***AP*** и ***BM***. Поскольку ***PK*** ⊥ ***AC***, то ***PK*** || ***BH***. А поскольку ***AH*** = ***HK***, то ***HR*** – это средняя линия треугольника ***APK***. Отсюда ***AR*** = ***RP***. Поскольку в треугольнике ***APC AR*** = ***RP***, а ***AM*** = ***MC***, то отрезок ***MR*** – это средняя линия треугольника ***APC***. Следовательно, в треугольнике ***APC MR*** || ***PC***. В треугольнике ***ABM*** отрезок ***MD*** является высотой, поскольку он проходит через точку ***R*** пересечения двух других высот – ***BH*** и ***AE***. А поскольку ***MD*** || ***CB***, то угол ***CBA*** – прямой. Таким образом, треугольник ***ABC*** – прямоугольный. Если прямоугольный треугольник ***ABC*** – вписанный, то его основание ***AC*** является диаметром окружности, а точка ***M*** – её центром. А ГМТ – вершин вписанного прямоугольного треугольника, опирающегося на диаметр, будет являться полу-

окружность (рис. 1, б). Следовательно, искомое свойство треугольников, удовлетворяющих указанным условиям, – это опора на диаметр описанной окружности.

Одним из способов укрупнения дидактических единиц является применение «метода обратных задач», суть которого состоит в том, что «работу над задачей нецелесообразно завершать получением ответа к ней; надо приёмом обращения составлять и решать в сравнении с исходной (прямой) задачей новую, обратную задачу, извлекая тем самым дополнительную информацию, заключающуюся в связях между величинами решённой исходной задачи [27 : 35]. Очень часто решение задачи «с конца» помогает сформулировать правдоподобную гипотезу, верификация которой не составляет большого труда.

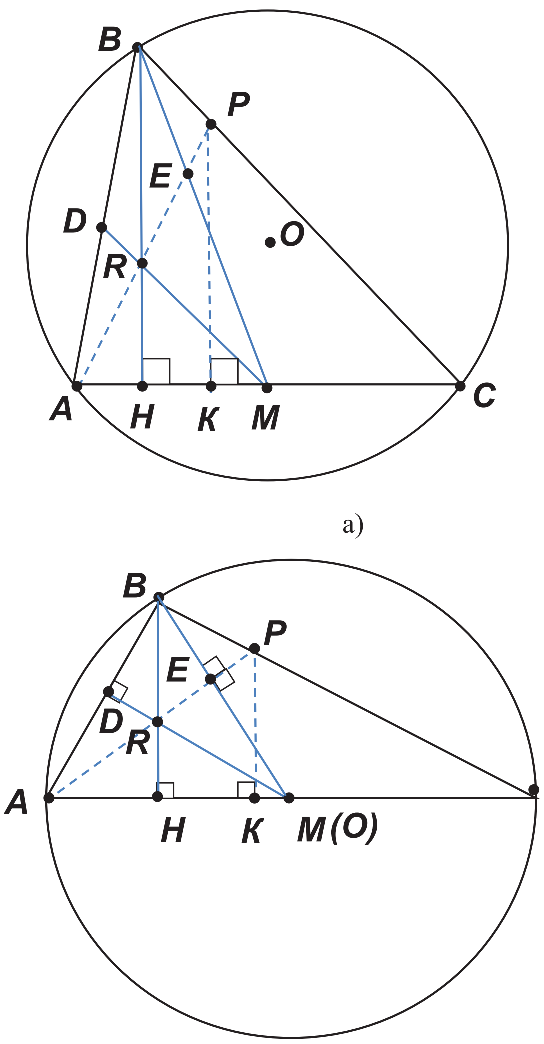


Рис. 1. Геометрические построения для формулировки гипотезы решения задачи о свойствах треугольника ***ABC***: первичный чертёж (а) и скорректированный чертёж (б)

Fig. 1. Geometric constructions for formulating a hypothesis for solving the problem of the properties of the ***ABC*** triangle: primary drawing (a) and corrected drawing (b)

<u>Решение 2</u> («обратная задача»). Построим треугольник, в котором отрезки ***AP*** и ***BM*** перпендикулярны друг другу. Для этого начнём построение с точки ***E***, через которую проведём два взаимно перпендикулярные прямые – ***l*** и ***m*** (рис. 2). Отметим, что прямая ***m*** является ГМТ – вершин треугольника ***B***, а прямая ***l*** – ГМТ – точек ***P***, из которых опущен перпендикуляр на сторону ***AC***. Прямые ***l*** и ***m*** являются важнейшими элементами построения, поскольку ими задаются точки ***B*** и ***P***, из которых опущены перпендикуляры, имеющие основаниями точки ***H*** и ***K***, которые определяют одно из двух важнейших условий задачи: наравне с перпендикулярностью прямых ***m*** и ***l*** – равенство отрезков ***AH*** и ***HK***

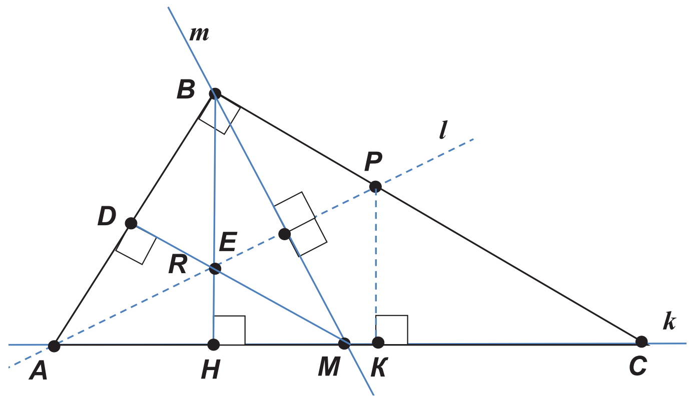


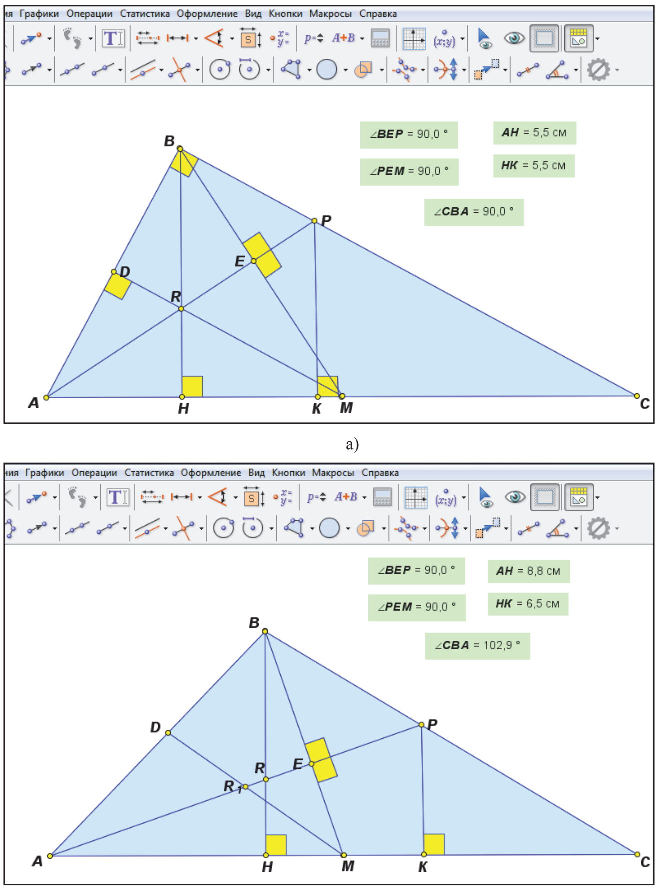
Рис. 2. Геометрические построения для «обратной задачи» рис. 1 (а)

Fig. 2. Geometric constructions for the "inverse problem" fig. 1 (a)

Поскольку точное местоположение точек ***B*** и ***P*** определяется соотношением ***AH*** = ***HK***, а каждая из точек получается пересечением более двух прямых, то чертеж можно построить только методом подбора, что «вручную» осуществить довольно сложно. Однако зная траектории движения точек ***B*** и ***P*** – прямые ***m*** и ***l*** соответственно, которые являются их ГМТ, такой подбор можно осуществить в динамической среде математического конструктора. Вершина прямого угла движется вдоль своего ГМТ – прямой ***m***, а точка ***P*** – вдоль своего ГМТ – прямой ***l***, при этом проверяется выполнение условий: ***AM*** = ***MC***, ***AH*** = ***HK***, точка ***C*** лежит на прямой ***k***, ***BH*** – высота треугольника ***ABC***, ***KP*** – перпендикуляр, восстановленный из точки ***K***.

Результат построения можно будет принять за гипотезу, которую затем, чтобы выявить свойства полученного треугольника, доказать с помощью логических рассуждений. Визуализация результатов построения в интерактивной творческой среде «1С Математический конструктор 6.0» представлена на рис. 3. Было установлено, что если треугольник ***ABC*** – прямоугольный (угол ***CBA*** – прямой), то отрезки ***AH*** и ***HK*** равны (рис. 3, а). В противном случае ключевое условие задачи нарушается (рис. 3, б).

Как доказать путём логических рассуждений, что выдвинутая гипотеза верна, то есть что при корректном построении соблюдается условие задачи ***AH*** = ***HK***? В треугольнике ***ABC*** отрезок ***MD*** является средней линией, поскольку точка ***M*** делит основание ***AC*** пополам, а ***MD*** || ***BC*** как два перпендикуляра, опущенные на одну прямую. В треугольнике ***APK*** отрезок ***HR*** – также средняя линия, поэтому ***AH*** = ***HK***. Соблюдение условия задачи доказано.

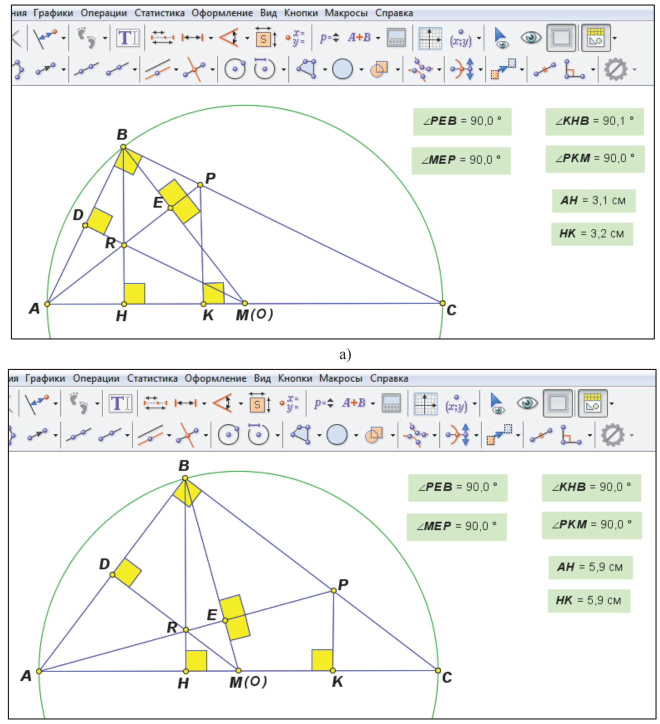


а)

Рис. 3. Геометрические построения в интерактивной творческой среде «1С Математический конструктор 6.0» при соблюдении ключевого условия задачи рис. 1 (а) **(AH = HK):** ΔABC – прямоугольный (а) и при его нарушении **(AH ≠ HK):** ΔABC – тупоугольный (б)

Fig. 3. Geometric constructions in the interactive creative environment "1C Mathematical Designer 6.0", while observing the key condition of the problem of fig. 1 (a) (***AH = NK***): ΔABC - rectangular (a) and if it is broken (***AH ≠ NK***): ΔABC - obtuse-angled (b)

Итак, соблюдение двух важнейших условий прямой задачи приводит к заключению, что таким свойством обладают прямоугольные треугольники, вписанные в окружность. А следствием решения «обратной задачи» является вывод: геометрическим местом вершин семейства прямоугольных треугольников, обладающих заданными свойствами, будет являться полуокружность, ограниченная диаметром, на который опираются эти треугольники. Следовательно, искомое свойство треугольников, удовлетворяющих указанным условиям, – это опора на диаметр описанной окружности. Подобный вывод может быть подтверждён (то есть принятая гипотеза верифицирована) и экспериментальным путём в среде математического конструктора, путём автоматического вычисления углов и длин соответствующих отрезков (рис. 4, а, б).



а)

б)

Рис. 4. Геометрические построения в интерактивной творческой среде «1С Математический конструктор 6.0» при соблюдении условий задачи рис. 1 (а) и разных значениях параметров: т. ***K*** слева (а) и справа (б) от центра описанной окружности т. ***M (O)***

Fig. 4. Geometric constructions in the interactive creative environment "1C Mathematical Designer 6.0" under the conditions of the problem of fig. 1 (a) and different values of the parameters: m. ***K*** to the left (a) and to the right (b) from the center of the circumscribed circle m. ***M (O)***

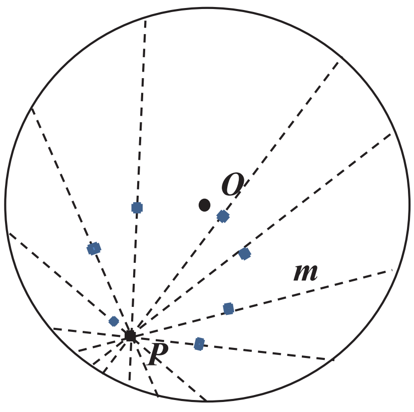
Подобные задачи, в которых ГМТ выступает как область, внутри которой заключено решение, позволяет рассматривать это обобщённое понятие как дидактический инструмент, существенным образом облегчающий поиск правдоподобной гипотезы, поскольку он ограничивает множество возможных вариантов решения. А трансформация задач в «обратные» согласно подходу с использованием УДЕ, позволяет учащимся детально рассмотреть всё многообразие связей между элементами задачи, когда одновременно с решением прямой и обратной задач происходит более глубокое усвоение обобщённого понятия – в данном случае – *геометрическое место точек*.

Обобщённые понятия как часть *следствий* научной теории

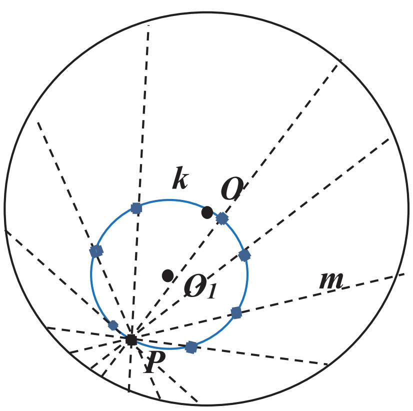
Накопив достаточный опыт в решении задач на построение, когда ГМТ выступало инструментом в поиске решения, перейдём к реализации второго компонента – ***следствий теории***, когда происходит целенаправленный поиск ГМТ и интерпретация найденных решений с точки зрения выявления общих характеристик изучаемого обобщённого понятия с применением эмпирико-индуктивного подхода. В основу подхода положен метод построения правдоподобных рассуждений, который базируется на выявлении связей и закономерностей между накопленными эмпирическими фактами и выводе из этого анализа следствий и обобщений констатирующего свойства.

Для этого обратимся к одному из определений ГМТ как траектории движения некоторой точки, образующей простейший геометрический объект, в соответствии с заданной формулой или условием. Это свойство ГМТ может быть реализовано с помощью инструментов динамической визуализации, которые имеются в интерактивных творческих средах. А поскольку проверка правильности решения сложных задач по определению ГМТ, как правило, требует многократных и тщательных геометрических построений, выполняемых с определённым шагом то функция «рисование следа» может с успехом применяться для этих целей.

Задача 1. Найти ГМ середин хорд окружности, проходящих через заданную точку. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в точке ***O*** (рис. 5, а). Выберем внутри окружности произвольную точку ***P*** и случайным образом проведём через неё хорды ***m***, отметив их середины. Как видно из чертежа рис. 5, множество середин хорд представляет собой замкнутую кривую, проходящую через точки ***O*** и ***P***. Таким образом, традиционные геометрические построения позволили нам сформулировать гипотезу, согласно которой были определены необходимые условия существования ГМ середин хорд: им является замкнутая кривая, проходящая через центр окружности и заданную точку внутри неё. Интуиция может подсказать, что искомое ГМТ представляет собой окружность ***k*** с центром в точке O_1 (рис. 5, б), однако это предположение требует строгого доказательства, которое можно провести с помощью традиционных построений.



а)



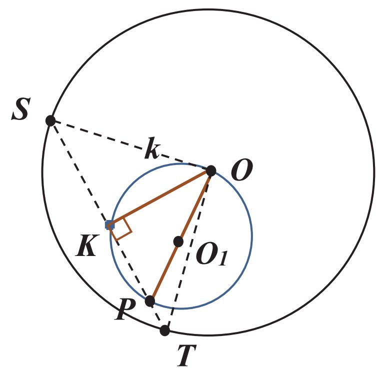
б)

Рис. 5. Условие задачи о ГМ середин хорд (а) и дополнительные построения для формулировки гипотезы (б)

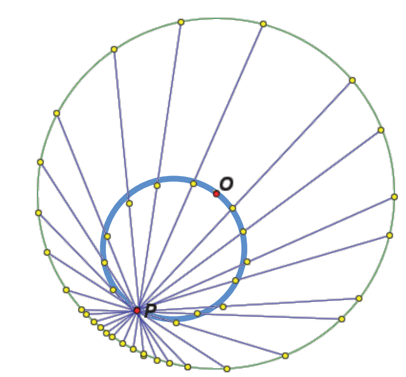
Fig. 5. The condition of the GM mid chord problem (a) and additional constructions for formulating hypothesis (b)

Решение задачи 1. Нам предстоит доказать, что согласно выдвинутой гипотезе кривая ***k*** представляет собой окружность. Для решения задачи традиционным методом построим уточняющий чертёж (рис. 6, а). На этом чертеже через точку ***P*** проведена произвольная хорда ***ST***. Обозначим её середину через ***K*** и соединим с центром исходной окружности точкой ***O***. Отрезок ***OK*** заведомо перпендикулярен хорде ***ST***, как медиана равнобедренного треугольника ***SOT***. Следовательно, угол ***OKT*** – прямой. Приводя подобные рассуждения для любых других хорд исходной окружности, получим, что все вписанные углы, опирающиеся на диаметр ***OP*** – прямые. Отсюда получаем, что ГМ середин хорд, проходящих через т. ***P***, то есть замкнутая кривая ***k***, представляет собой окружность.

Однако с помощью построений в интерактивной среде математического конструктора выдвижение и наглядная верификация гипотезы упрощается за счёт использования инструментов динамической визуализации, в частности функции «рисование следа». На рис. 6, б) изображено построение искомого ГМТ в интерактивной среде «1С Математический конструктор 6.0» путём движения произвольной хорды внутри исходной окружности. Середины хорд описывают окружность, диаметр которой равен длине отрезка ***OP***.



а)



б)

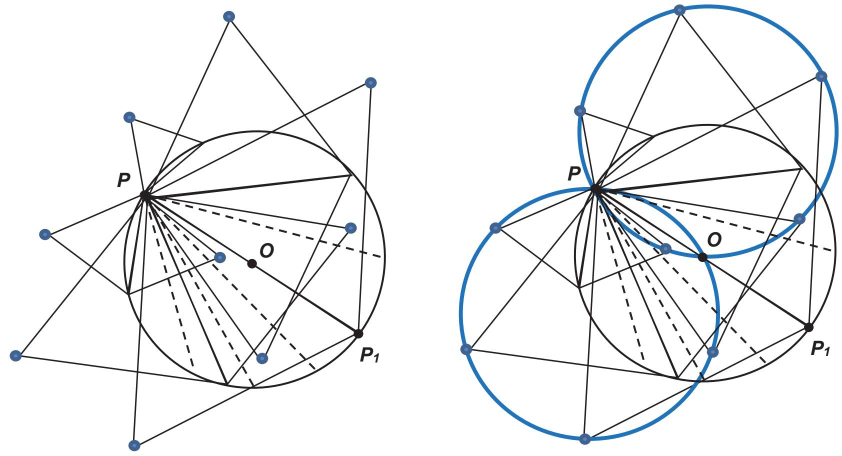
Рис. 6. Доказательство гипотезы задачи рис. 5 (а) путём дополнительных построений (а) и её экспериментальная проверка в среде математического конструктора (б)

Fig. 6. Proof of the hypothesis of the problem of fig. 5 (a) by additional constructions (a) and its experimental verification in the environment of the mathematical constructor (b)

Таким образом, единым свойством середин хорд, проходящих через общую точку внутри окружности, является их принадлежность окружности с диаметром ***PO***, которая представляет собой ГМТ – середин хорд.

Задача 2. На хордах, исходящих из общей точки на окружности, по обе стороны от каждой из хорд как на основаниях построены равносторонние треугольники. Найти ГМТ – вершин треугольников, противолежащих основаниям.

Решение задачи 2. Пусть имеется окружность с центром в точке ***O***. Выберем на окружности произвольную точку ***P*** и проведём из неё веер хорд (рис. 7, а). На каждой хорде в обе стороны от неё построим равносторонние треугольники и отметим их вершины, противоположные основаниям (на чертеже рис. 7, а) они отмечены синими точками). Для того чтобы выдвинуть правдоподобную гипотезу, требуется построить большое число треугольников, что, естественно, требует времени и дополнительных усилий (рис. 7, б). Однако это позволит выдвинуть гипотезу о том, что ГМТ – вершин равносторонних треугольников является пара окружностей диаметра, равного диаметру исходной окружности, проходящих через точки ***P*** и ***O*** и симметричных относительно диаметра PP_1.



а)   б)

Рис. 7. Условие задачи (а), традиционные построения для выдвижения гипотезы (б)
Fig. 7. Problem situation (a), the traditional construction for the hypothesis (b)

Если же воспользоваться динамическими построениями в интерактивной творческой среде математического конструктора, то вершины равносторонних треугольников, построенных на хордах как на основаниях, опишут две окружности, аналогичные построенным традиционным способом (на рис. 8 изображена только одна из двух окружностей).

После выдвижения гипотезы проводится её верификация путём логических рассуждений. Для этого строится уточняющий чертёж (рис. 9). Докажем гипотезу для одной из двух симметричных окружностей, являющихся ГМТ – вершин равносторонних треугольников. Построим на диаметре исходной окружности треугольник PP_1M_1, который пересекает её в точках P_2 и P_3, и соединим эти точки с центром окружности – точкой ***O***. Тогда будет соблюдаться соотношение: $OP = PP_3 = OP_3 = OP_2 = OP_1 = M_1P_3$. Это означает, что точки ***P***, ***O***, P_2 и M_1 лежат на окружности с центром в точке P_3, которая равновелика исходной окружности, а её диаметром является сторона треугольника PM_1. Далее докажем утверждение о том, что вершина любого другого равностороннего треугольника, построенного на хорде, исходящей из точки ***P***, принадлежит окружности с центром в точке P_3. Очевидно, что это утверждение справедливо для треугольника PM_2P_3, поскольку он построен на хорде, равной радиусу исходной окружности. Докажем справедливость данного утверждения для любой другой хорды исходной окружности (см. рис. 9).

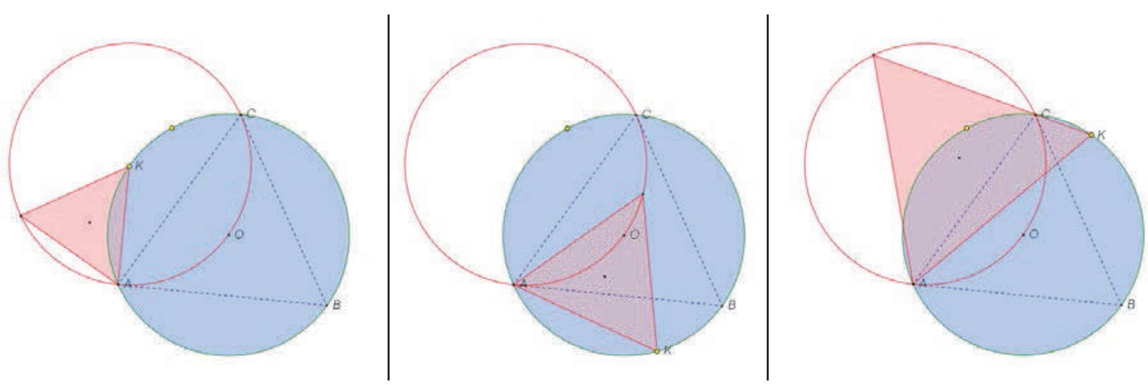


Рис. 8. Экспериментальная проверка гипотезы задачи рис.7 (а) в среде математического конструктора
Fig. 8. Experimental testing of the hypothesis of the problem of Fig.7 (a) in the environment of a mathematical constructor

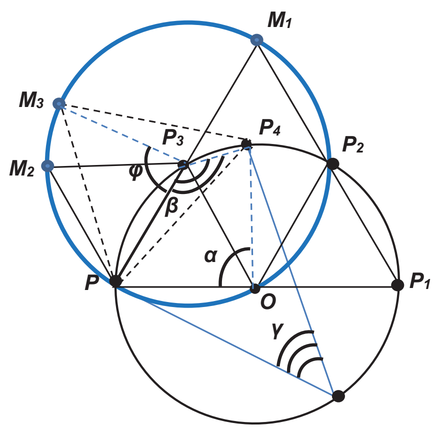


Рис. 9. Доказательство гипотезы задачи рис. 7 (а) путём дополнительных построений
Fig. 9. Proof of the hypothesis of the problem of fig. 7 (a) by additional constructions

Построим треугольник на произвольной хорде PP_4 и докажем, что если его вершина M_3 лежит на окружности с центром в точке P_3, то он является равносторонним. Для этого опишем из точки P_4 дугу, равную длине хорды PP_4 до пересечения с окружностью ГМТ в точке M_3. Докажем, что $PM_3 = PP_4$. Для этого соединим точки P_3 и P_4, P_4 и O, а также M_3 и P_3. Если мы докажем, что углы P_4OP (α) и M_3P_3P (φ) равны, то это будет означать равенство хорд PM_3 и PP_4, или тот факт, что треугольник PP_4M_3 – равносторонний.

Сумма углов $\gamma + \beta = 180^0$ как вписанных углов, опирающихся на одну хорду. Кроме того, справедливо равенство $\gamma = \alpha/2$ как соотношение между центральным и вписанным углом, опирающимися на одну хорду. Далее отметим, что треугольники $M_3P_4P_3$ и PP_4P_3 равны, следовательно, угол $\varphi = 360^0 - 2\beta$. Поставляя в эту формулу значение угла $\beta = 180^0 - \alpha/2$, получаем: $\varphi = 360^0 - 2\beta = 360^0 - 2\,(180^0 - \alpha/2) = 360^0 - 360^0 + \alpha$. Если $\varphi = \alpha$, то есть углы P_4OP и M_3P_3P равны, то для треугольника PP_4M_3 справедливо соотношение $PM_3 = PP_4$. Это означает, что точка M_3 принадлежит ГМТ – вершин равносторонних треугольников.

На основе рассмотренных частных случаев можно сделать вывод, что геометрическим местом вершин, которые противолежат основаниям равносторонних треугольников, построенных на хордах, выходящих из одной точки окружности, являются две окружности, равновеликие исходной и проходящие через её центр и точку исхода хорд.

Заключение

В результате проведённого исследования установлено, что:

1) оперирование понятием ***геометрическое место точек*** является важным познавательным действием при решении геометрических задач на построение, с помощью которого выдвигается правдоподобная гипотеза, определяющая некий интервал, содержащий искомое решение задачи;

2) усвоению обобщённого понятия ***геометрическое место точек*** способствует учебно-познавательная деятельность, включающая два этапа: первый этап основан на гипотетико-дедуктивном подходе, когда ***геометрическое место точек*** является инструментом, средством для поиска решения (в этом случае целесообразно предъявление учебного материала в виде УДЕ и последующей его детализации); второй этап базируется на методе эмпирической индукции, предполагающем вывод следствий и обобщений на основе рассмотрения частных случаев, когда ***геометрическое место точек*** является целью решения задачи;

3) интерактивные творческие среды за счёт встроенных функций динамической визуализации позволяют ускорить процесс выдвижения гипотезы при решении геометрических задач на построение, особенно в тех случаях, когда для конкретизации обобщённого понятия ***геометрическое место точек*** требуется рассмотреть многочисленные варианты;

4) в результате описанных действий, проиллюстрированных примерами решения задач, абстрактные категории обретают конкретные формы как на уровне восприятия, так и на мыслительном уровне, что способствует формированию у школьников активного математического видения за счёт развития визуального мышления, лежащего в основе когнитивно-визуального подхода к обучению математике.

Список использованных источников

[1] *Успенский В.А.* Апология математики. М.: Альпина нонфикшн, 2017. 622 с.
[2] *Корчажкина О.М.* Составляющие инженерного мышления и роль ИКТ в их формировании // Информатика и образование. 2018. № 6. С. 32–38. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=35619000 (дата обращения: 26.08.2018).
[3] *McCready M.J.* Defining engineers: how engineers think about the world. 1998. 9 p. [Электронный ресурс]. URL: https://www3.nd.edu/~mjm/engineer.essay.pdf (дата обращения: 26.08.2018).
[4] *Robinson J.A.* Engineering Thinking and Rhetoric [Электронный ресурс]. URL: http://www.intuac.com/userport/john/writing/nthinking.html (дата обращения: 26.08.2018).
[5] *Rashidov A.M., Kuimova M.V.* About development of engineering thinking // Molodoj Uchenyj. 2015. № 9. Pp. 1476-1477. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23374802 (дата обращения: 26.08.2018).
[6] *Stephan E.A., Bowman D.R., Park W.J., Sill B.L., Ohland M.W.* Thinking Like an Engineer: An Active Learning Approach. Harlow: Pearson, 2017. 912 p.
[7] Why Engineering Thinking? [Электронный ресурс]. URL: https://engineeringthinking.wordpress.com (дата обращения: 26.08.2018).
[8] *Ермаков С.В.* Развитие математического мышления в практиках открытого образования / С.В. Ермаков, А.А. Попов, М.С. Аверков, П.П Глухов. М.: ЛЕНАНД, 2017. 152 с.
[9] Российское математическое образование / Ред. и сост. А.П. Карп, Б. Вогели. М.: МПГУ, 2017. 576 с.
[10] *Krantz S.G.* The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. Springer-Verlag New York, 2011. 264 p. DOI: 10.1007/978-0-387-48744-1
[11] *Oakley B.* A Mind for Numbers. How to Excel at Math and Science. NY: Penguin RHC, 2014. 316 p.
[12] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. М.: Просвещение, 2011. 48 с.
[13] Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. М.: Про-

свещение, 2013. 63 с.
[14] *Бешенков С.А., Акимова И.В.* Визуализация как метод обучения программированию // Информатика и образование. 2017. № 10. С. 11-15. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30737139 (дата обращения: 26.08.2018).
[15] *Корчажкина О.М.* Методы динамической визуализации в конструктивных творческих средах // Дистанционное и виртуальное обучение. 2018. № 3. С. 19-29. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=34999366 (дата обращения: 26.08.2018).
[16] Программная среда для изучения алгебры и геометрии GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: https://geogebra.ru.uptodown.com/windows (дата обращения: 26.08.2018).
[17] 1С: «Математический конструктор 6.0». М.: ООО «1С-Паблишинг», 2007-2014.
[18] *Четверухин Н.Ф.* Методы геометрических построений. М.: ЛЕНАНД, 2018. 152 с.
[19] *Polya G.* Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. NY.: Published by John Wiley & Sons, Inc., 2018. 450 p.
[20] *Корчажкина О.М.* Модель онтологии понятийных категорий планиметрии // Информационные технологии и системы 2018 (ИТС 2018) / Под ред. Л.Ю. Шилина и др. Минск: БГУИР, 2018. С. 44-45. URL: https://libeldoc.bsuir.by/bitstream/123456789/34206/1/Korchazhkina_Model.PDF (дата обращения: 26.08.2018).
[21] Locus of Points // Chegg Study [Электронный ресурс]. URL: https://www.chegg.com/homework-help/definitions/locus-of-points-63 (дата обращения: 26.08.2018).
[22] *Зорина Л.Я.* Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. М.: Педагогика, 1978. 128 с.
[23] *Щедровицкий Г.П.* О некоторых моментах в развитии понятий // Вопросы философии. 1958. № 6. С. 577-589. URL: http://vphil.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=35 (дата обращения: 26.08.2018).
[24] *Холодная М.А.* Психология интеллекта. Парадоксы исследования. СПб.: Питер, 2002. 272 с.
[25] *Эрдниев П.М.* Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. В 2 ч. Ч. 1 / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. М.: Просвещение, 1992. 175 с.
[26] Математика: методические указания / Под ред. М.В Гончарова, А.Л. Громов, А.В. Дементьев и др. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2017. 90 с.
[27] *Эрдниев П.М.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. М.: Просвещение, 1986. 255 с.

Поступила 26.08.2018; принята в печать 20.10.2018;
опубликована онлайн 10.12.2018.

References

[1] Uspenskii V.A. Apologija matematiki [Apology of mathematics]. M.: Al'pina non-fikshn, 2017. 622 p. (In Russian)
[2] Korchazhkina O.M. Components of engineering thinking and the role of information technologies in their formation. *Informatika i obrazovanie* = Informatics and education. 2018; 6:32–38. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=35619000 (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[3] McCready M.J. Defining engineers: how engineers think about the world. 1998. 9 p. Available at: https://www3.nd.edu/~mjm/engineer.essay.pdf (accessed 26.08.2018).
[4] Robinson J.A. Engineering Thinking and Rhetoric. Available at: http://www.intuac.com/userport/john/writing/nthinking.html (accessed 26.08.2018).
[5] Rashidov A.M., Kuimova M.V. About development of engineering thinking. *Molodoj Uchenyj*. 2015; 9:1476-1477. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=23374802 (accessed 26.08.2018).
[6] Stephan E.A., Bowman D.R., Park W.J., Sill B.L., Ohland M.W. Thinking Like an Engineer: An Active Learning Approach. Harlow: Pearson, 2017. 912 p.
[7] Why Engineering Thinking? Available at: https://engineeringthinking.wordpress.com (accessed 26.08.2018).
[8] Ermakov S.V., Popov A.A., Averkov M.S., Glukhov P. P. Razvitiye matematicheskogo myshleniya vpraktikakh otkrytogo obrazovaniya [The development of mathematical thinking in the practices of open education]. Moscow, Lenand Publ., 2017. 152 p. (In Russian)
[9] Vogeli B.R., Karp A. Russian Mathematics Education: History and World Significance. World Scientific Pub Co Inc, 2010. 387 p.
[10] Krantz S.G. The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. Springer-Verlag New York, 2011. 264 p. DOI: 10.1007/978-0-387-48744-1
[11] Oakley B. A Mind for Numbers. How to Excel at Math and Science. NY: Penguin RHC, 2014. 316 p.
[12] Russian Federal State Educational Standards. Basic Education Standard. M.: Prosveshenie, 2011. 48 p. (In Russian)
[13] Secondary Education Standard. Secondary Education Standard. M.: Prosveshenie, 2013. 63 p. (In Russian)
[14] Beshenkov S.A., Akimova I.V. Visualization as method of training in programming. *Informatika i obrazovanie* = Informatics and education. 2017; 10:11-15. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30737139 (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[15] Korchazhkina O.M. On Methods of Dynamic Visualization in Constructional Creative Environments. *Distancionnoe i virtual'noe obuchenie* = Remote and virtual learning. 2018; 3:19-29. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=34999366 (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[16] Programmnaya sreda dlya izucheniya algebry i geometrii GeoGebra. Available at: https://geogebra.ru.uptodown.com/windows (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[17] 1S: "Matematicheskij konstruktor 6.0". M.: OOO «1S-Pablishing», 2007-2014.
[18] Chetveruhin N.F. Metody geometricheskih postroenij [Methods of geometric constructions]. Moscow: LENAND, 2018. 152 p. (In Russian)
[19] Polya G. Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. NY.: Published by John Wiley & Sons, Inc., 2018. 450 p.
[20] Korchazhkina O.M. Model of ontology of conceptual categories of planimetry. *Information Technologies and Systems 2012 (ITS 2012)*: Proceeding of the International Conference. BSUIR, Minsk, 2018, pp. 44-45. Available at: https://libeldoc.bsuir.by/bitstream/123456789/34206/1/Korchazhkina_Model.PDF (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[21] Locus of Points. Chegg Study. Available at: https://www.

chegg.com/homework-help/definitions/locus-of-points-63 (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[22] Zorina L.Ya. Didakticheskie osnovy formirovaniya sistemnosti znaniy starsheklassnikov [Didactic Principles of Formation of the System of Knowledge of Senior Pupils]. Moscow, Pedagogika Publ., 1978. 128 p. (In Russian)
[23] Shchedrovickij G.P. O nekotoryh momentah v razvitii ponyatij. *Questions of philosophy*. 1958; 6:577-589. Available at: http://vphil.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=35 (accessed 26.08.2018). (In Russian)
[24] Holodnaya M.A. Psihologiya intellekta. Paradoksy issledovaniya. SPb.: Piter, 2002. 272 p. (In Russian)
[25] Ehrdniev P.M., Ehrdniev B.P. Ukrupnenie didakticheskih edinic kak tekhnologiya obucheniya. M.: Prosveshchenie, 1992. 175 p. (In Russian)
[26] Matematika: metodicheskie ukazaniya. M.V. Goncharova, A.L. Gromov, A.V. Dement'ev et al. (Ed). SPb.: Izd-vo S.-Peterb. unta, 2017. 90 p. (In Russian)
[27] Ehrdniev P.M. Ukrupnenie didakticheskih edinic v obuchenii matematike. P.M. Ehrdniev, B.P. Ehrdniev (Ed). M.: Prosveshchenie, 1986. 255 p.

About the author:

Olga M. Korchazhkina, Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow of Institute for Cybernetics and Informatics in Education, Institute for Cybernetics and Informatics in Education, Federal Research Centre "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (44/2, Vavilova Str., Moscow 119333, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0020-4914, olgakomax@gmail.com