

УДК 517.958

DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.133-140

Математическая модель малых колебаний тела в потоке среды

Д. В. Беляков

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

dimbel@rambler.ru

Аннотация

В данной статье исследуется математическая модель тела, совершающего автоколебания в потоке квазистатической среды под действием аэродинамических сил. Выведены уравнения движения рассматриваемого тела и кинематические соотношения, связывающие фазовые координаты с углом атаки. Проведено решение уравнений равновесия и показано, что единственным положением равновесия является состояние покоя. Получены уравнения первого приближения и проведено исследование устойчивости состояния покоя с помощью критерия Гурвица. Показано, что в результате взаимодействия со средой рассматриваемое тело может совершать в потоке среды колебания с растущей амплитудой (флаттер). Построены области устойчивости на плоскости геометрических параметров: жесткости пружины и длины стержня. В математическом пакете MATLAB предложен комплекс программ, позволяющих проводить численные исследования, реализующий численное интегрирование уравнений описывающих колебания пластинки с неподвижным центром давления. Такая модель возможна при условии того, что длина стержня намного больше ширины пластинки. При запуске программы строится область устойчивости и на ней вводятся геометрические параметры: жесткость пружины и длина стержня. Далее вводится вектор начальных условий. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. При поиске численного решения экспериментальные аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном. Полученное путем интегрирования решение изображается на графике в виде фигур Лиссажу. Таким образом, разработана математическая модель колебаний пластинки, проведен параметрический анализ устойчивости, с помощью комплекса программ на базе специализированной системы компьютерной математики есть возможность подтвердить полученные аналитические результаты.

Ключевые слова: тело, стационарный режим, устойчивость, область устойчивости, флаттер.

Для цитирования: Беляков Д. В. Математическая модель малых колебаний тела в потоке среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 1. С. 133-140. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.133-140

© Беляков Д. В., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Mathematical Model of Small Body Vibrations in the Stream of the Environment

D. V. Belyakov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
dimbel@rambler.ru

Abstract

This article explores the mathematical model of a body that performs self-oscillations in a flow of a quasi-static medium under the influence of aerodynamic forces. The equations of motion of the body under consideration and the kinematic relations connecting the phase coordinates with the angle of attack are derived. The equilibrium equations were solved and it was shown that the only equilibrium position is the state of rest. The equations of the first approximation are obtained and the stability of the state of rest is studied using the Hurwitz criterion. It is shown that as a result of interaction with the medium, the body in question can oscillate with increasing amplitude (flutter) in the medium flow. Areas of stability are constructed on the plane of geometric parameters: spring stiffness and rod length. In the mathematical package MATLAB, a set of programs has been proposed that allow for numerical studies that implement the numerical integration of the equations describing the vibrations of a plate with a fixed center of pressure. Such a model is possible provided that the length of the rod is much greater than the width of the plate. When the program is started, the stability region is constructed and the geometrical parameters are entered on it: the spring stiffness and the rod length. Next, a vector of initial conditions is introduced. When searching for a numerical solution, the ode45 procedure is used, which implements fourth and fifth order Runge – Kutta methods with a variable step. When searching for a numerical solution, experimental aerodynamic functions are interpolated by a cubic spline. The solution obtained by integrating is depicted on the graph as Lissajous figures. Thus, a mathematical model of plate oscillations was developed, a parametric stability analysis was carried out, with the help of a complex of programs based on a specialized computer mathematics system, it is possible to confirm the obtained analytical results.

Keywords: body, stationary mode, stability, stability region, flutter.

For citation: Belyakov D.V. Mathematical Model of Small Body Vibrations in the Stream of the Environment. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(1):133-140. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.133-140



Введение

Объектом исследования данной работы станет Флаттер – скоротечное и крайне опасное явление, которое обычно заканчивается разрушением конструкции летательного аппарата. Впервые с массовыми случаями флаттера столкнулись в 1930-е гг. в период стремительного роста скоростей, после чего началось интенсивное изучение флаттера и отыскание способов его предупреждения. М.В. Келдышем разработана теория флаттера самолёта, созданы методы численного расчёта, получен ряд важнейших результатов, которые открыли возможность предсказывать для каждого конкретного летательного аппарата, при какой скорости полёта ему грозит флаттер. Эти работы позволили авиаконструкторам найти средства для гашения флаттера, основные из которых – рациональное распределение массы в конструктивных элементах и повышение их жёсткости.

При детальном изучении флаттера почти во всех случаях обнаруживаются нелинейные аэродинамические эффекты. Однако в ряде ситуаций оказалось возможным успешно решить задачу на основе линейных аналитических подходов. Рассмотрим одну задачу, в которой можно использовать такие подходы.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о флюгере, то есть теле, представляющем из себя тонкую пластинку, установленную вдоль стержня длины l . Стержень зафиксирован в центре масс с помощью двух пружинных элементов и совершает автоколебания в потоке среды (рисунок 1). Введем неподвижную систему координат. Будем считать, что в положении покоя флюгер занимает положение равновесия, в котором он ориентирован по потоку. Будем считать, что центр масс тела может совершать движения только в вертикальной плоскости, а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе $F = -kx$ и возвращающему моменту $M = -c\theta$

Аэродинамические силы, приложенные к телу приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины.

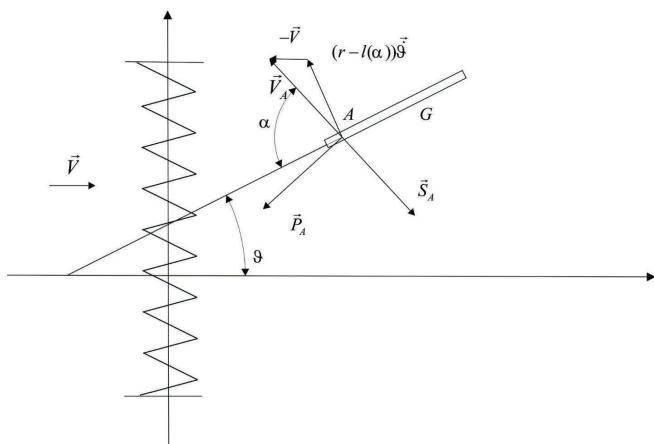


Рис. 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды
Fig. 1. Fluctuations of the body of complex configuration in the medium flow

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку A можно считать подвижной относительно пластинки. Аналогичная задача, только с неподвижным центром давления рассматривалась в работе [1]. Сдвиг центра давления описывается функцией $l(\alpha)$, которая описывает расстояние между центром давления A и геометрическим центром пластинки G . Зависимость $l(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными [6]. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила сопротивления \vec{S}_A , направленная против скорости \vec{V}_A точки A относительно потока среды, и подъемная сила \vec{P}_A , направленные ей ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2$$

Где α - угол атаки между вектором \vec{V}_A и пластинкой p,s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции, ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций для разных форм пластинок приводится в [6]. Будем считать, что среда не влияет на стержень

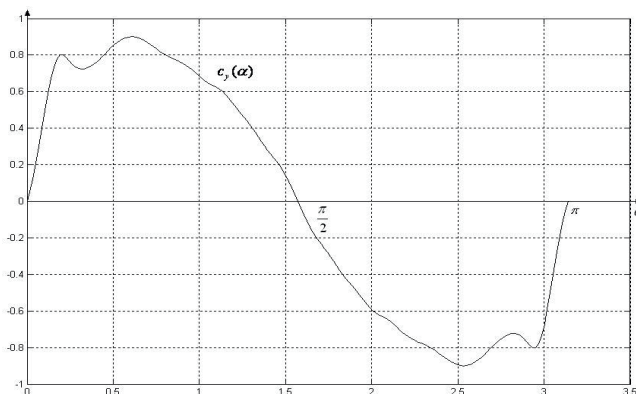


Рис. 2. Аэродинамическая функция подъемной силы
Fig. 2. Aerodynamic function of lift force

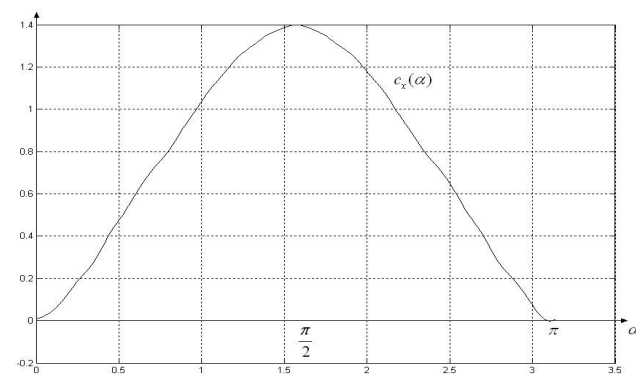


Рис. 3. Аэродинамическая функция силы сопротивления
Fig. 3. Aerodynamic function of resistance force



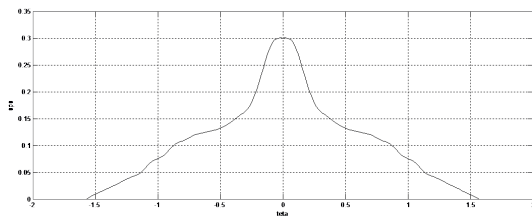


Рис. 4. Аэродинамическая функция сдвига центра давления
Fig. 4. Aerodynamic function of pressure center shift

Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату y центра масс тела и угол θ отклонения пластинки от горизонтали.

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось OY и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -s(\alpha)V_A((r-l(\alpha))\dot{\theta}\cos\theta + V) - \\ p(\alpha)V_A\left((r-l(\alpha))\dot{\theta}\sin\theta - \dot{y}\right) - ky \\ J\ddot{\theta} &= ((r-l(\pm))V_A^2n(\alpha) - c\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (1)$$

Где множитель $n(\alpha) = s(\pm)\sin\pm + p(\pm)\cos\pm$ - это коэффициент нормальной аэродинамической силы.

Кинематические соотношения, связывающие V_A , α с $\theta, \dot{\theta}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} V_A\sin\alpha &= ((r-l(\alpha))\dot{\theta} + V)\sin\alpha + \dot{y}\cos\theta \\ V_A\cos\alpha &= V\cos\alpha - \dot{y}\sin\alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(2)

Решение уравнений равновесия

При поступательном движении из кинематических соотношений (2), учитывая, что

$$\theta_* = \text{const}, y_* = \text{const}, \dot{\theta} = 0 \text{ следует, что } \text{tg}\alpha_* = \text{ctg}\theta_*, \text{ откуда } \alpha_* + \theta_* = \frac{\pi}{2}.$$

Запишем уравнения равновесия для системы (1)

$$\begin{aligned} p(\alpha_*)V - ky_* &= 0 \\ c\alpha_* + (r-l(\alpha_*))V^2n(\alpha_*) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Сначала мы решаем второе уравнение и находим из него α_* и затем находим y_* и θ_* .

Можно показать, что при достаточно большом коэффициенте жесткости спиральной пружины с будет только одно положение равновесия в состоянии покоя. При малом коэффициенте жесткости спиральной пружины будет происходить ветвление положений равновесия.

На рисунке 6 изображено решение второго уравнения системы в MATLAB для прямоугольных пластинок с удлинением 8 при не-

больших s и из него мы видим, что мы имеем здесь только простейшее положение равновесия-состояние покоя тела (см. рис. 5).

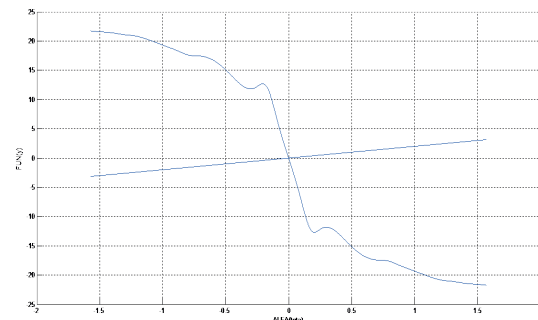


Рис. 5. Решение уравнения равновесия
Fig. 5. The solution of the equilibrium equation

Можно показать, что если $s=0$ мы имеем еще два семейства положений равновесия $\theta_* = \pm \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y_* = 0$

Построение области устойчивости

Будем считать, что маятник совершает малые колебания около положения покоя. Исследуем устойчивость тривиального положения равновесия $y = 0, \theta = 0$ по первому приближению. Для исследования устойчивости тривиального положения равновесия используем критерий Гурвица. Проведем параметрический анализ устойчивости по первому приближению при различных значениях параметров m, J, k, c, V^2, r .

Линеаризуем уравнения движения (1) - (2), при $y \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ и выпишем характеристическое уравнение:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (4)$$

Условия устойчивости имеют вид:

$$a_0 = mJ > 0 \text{ (выполнено всегда)} \quad (5)$$

$$a_1 = (p_0 + s_0)V(m(r-l)^2 + J) > 0 \quad (6)$$

$$a_2 = (p_0 + s_0)mV^2(r-l) + mc + kJ > 0 \quad (7)$$

$$a_3 = (p_0 + s_0)V[V^2(r-l)(p_0 + s_0) + k(r-l)^2 - p_0V^2] > 0 \quad (8)$$

$$a_4 = k[V^2(r-l)(p_0 + s_0) + c] > 0 \quad (9)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (10)$$

Построим область устойчивости на плоскости параметров (c, V^2) при различных значениях геометрических параметров r, l .

В случае $p_0 + s_0 < 0$ условие (6) никогда не выполняется и автоколебания возникают даже при малых скоростях потока (если же $p_0 + s_0 > 0$ то неравенство (6) выполняется всегда!). При выполнении условий $r > l > 0$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка ориентирована по потоку) параметр l положителен и условия (6)-(10) выполняются автоматически. Система устойчива при любых значениях (c, V^2)



При выполнении условий $r = l$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка ориентирована по потоку) условие (8) не выполняется. Система неустойчива при любых значениях (c, V^2)

Если $0 < r < l$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка ориентирована по потоку) для выполнения условий (6)-(10) имеем систему неравенств (10)-(13) (см. рис 5,6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 > 0 \text{ (изображено зеленым цветом)} \quad (10) \\ V^2 < \frac{mc + kJ}{m(l-r)(p_0 + s_0)} \text{ (изображено черным цветом)} \quad (11) \\ V^2 < \frac{c(p_0 + s_0)}{m(p_0 - (l-r))(p_0 + s_0)^2} \text{ (изображено синим цветом)} \quad (12) \\ V^2 < \frac{c}{(l-r)(p_0 + s_0)} \text{ (изображено красным цветом)} \quad (13) \end{array} \right.$$

Условие (11) менее жесткое чем условия (12) и (13) и поэтому его можно откинуть. Условие (13)

дает границу области устойчивости, которая способствует развитию автоколебаний.

Условие (10) дает границу, которая способствует ветвлению положений равновесия.

- При $r = 0$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка закреплена в центре масс) система неравенств (10)-(13) справедлива если мы находимся ниже синей прямой (см. рисунок 8):
- При $l < r < 0$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка ориентирована навстречу потоку) параметр l становится отрицательным система неравенств (10)-(13) реализуется, если мы находимся ниже самой пологой зеленой линии. При уменьшении g область будет уменьшаться! (см. рисунок 9):
- Если $r = l < 0$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка ориентирована навстречу потоку), система неустойчива всегда! Условие (10) не выполняется!
- Если $r < l < 0$ и $p_0 + s_0 > 0$ (пластинка ориентирована навстречу потоку) условия устойчивости (10)-(13) реализуются, если мы находимся ниже зеленой линии (рисунок 10,11).

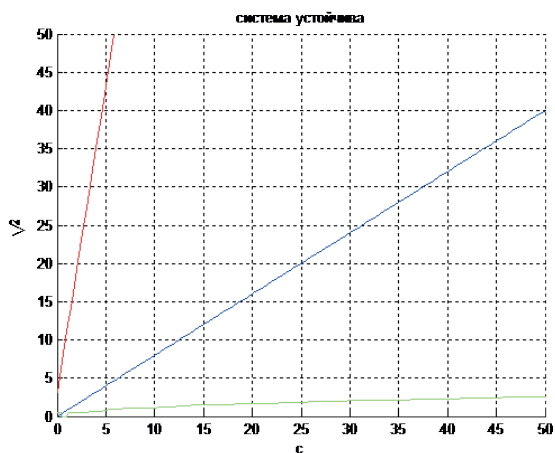


Рис. 6. Область устойчивости ($r = 0.5M$) (система устойчива ниже зеленой кривой)

Fig. 6. Area of stability ($r = 0.5M$) (system is stable below the green curve)

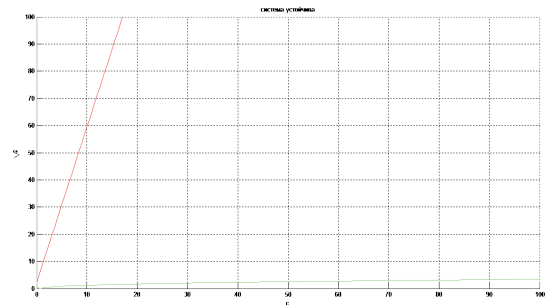


Рис. 7. Область устойчивости ($r = 0.3M$) (система устойчива ниже зеленой линии)

Fig. 7. Area of stability ($r = 0.3M$) (system is stable below the green line)

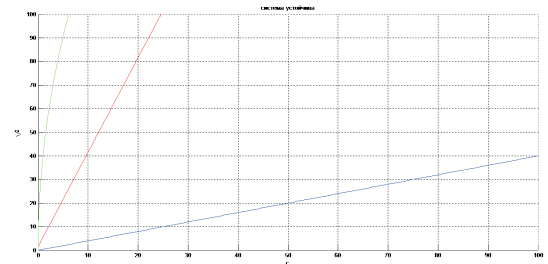


Рис. 8. Область устойчивости ($r=0$) (система устойчива ниже синей прямой)

Fig. 8. Area of stability ($r=0$) (system is stable below the blue strait line)

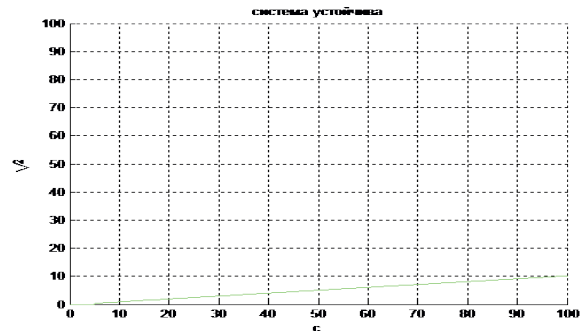


Рис. 9. Область устойчивости ($r=-0.5m.$) (система устойчива ниже зеленой линии)

Fig. 9. Area of stability ($r=-0.5m$) (system is stable below the green line)

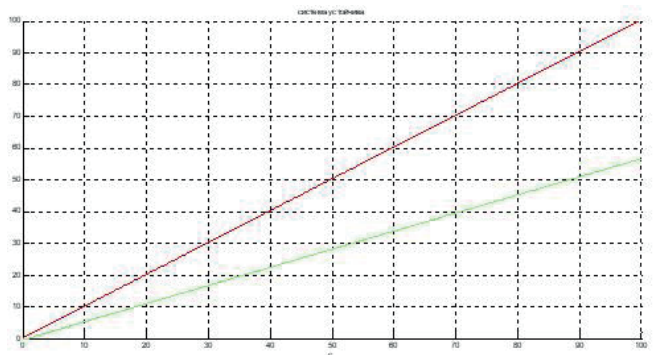


Рис. 10. Область устойчивости ($r=-5$) (система устойчива ниже зеленой линии)

Fig. 10. Area of stability ($r=-5$) (system is stable below the green line)



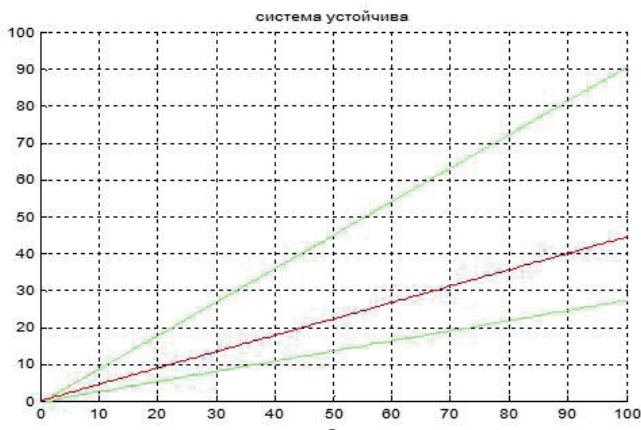


Рис. 11. Область устойчивости ($r=-10$) (система устойчива ниже первой зеленой линии)

Fig. 11. Area of stability ($r=-10$) (system is stable below the first green line)

На этом анализ устойчивости простейших положений равновесия можно закончить. Мы получили интересные и не везде очевидные результаты.

Численное интегрирование уравнений движения

В математическом пакете MATLAB написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений (1)-(2), описывающих колебания пластинки с неподвижным центром давления. Такая модель возможна при условии того, что длина стержня намного больше ширины пластинки. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. При поиске численного решения аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном.

Программа для решения задачи о колебании пластинки имеет следующий интерфейс. С помощью ползунка задается интервал интегрирования, значение удлинения пластинки можно выбрать из четырех значений в выпадающем меню. Значения m , J и k вводятся в соответствующие поля. Длина стержня g выбирается из выпадающего меню. Отрицательное значение означает, что пластинка ориентирована против потока. Значения c и V вводятся путем выбора точки на графике области устойчивости. Начальные условия также выбираются графически. Полученные путем интегрирования точки $Y = Y(\theta)$, изображаются на графике в виде фигуры Лиссажу.

Для моделирования колебаний пластинки возьмем удлинение, равное пяти (см. рисунок 12). Зададим значения $m=10\text{ кг}$, $J=10\text{ кг/м}^2$, $r=0.3\text{ м}$ (C, V^2) [10,10]. Получим неустойчивость в нуле и уход фигур Лиссажу от состояния покоя.

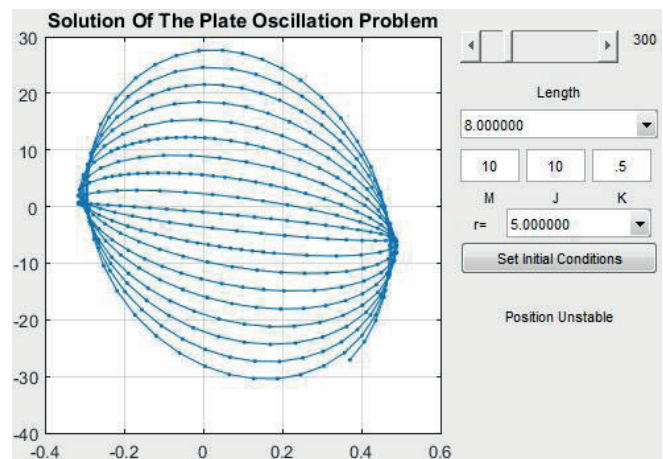


Рис. 12. Колебания тела в потоке среды

Fig. 12. Body Fluctuations in medium flow

Заключение

1. Разработана математическая модель колебаний пластинки.
2. Проведен параметрический анализ устойчивости. Построены области устойчивости на плоскости (c, V^2) при различных значениях геометрических параметров.
3. На базе специализированной системы компьютерной математики MATLAB 9 разработана программа для имитационного моделирования колебаний тела.

Список использованных источников

- [1] Беляков Д.В., Самсонов В.А., Филиппов В.В. Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Вестник Московского энергетического института. 2006. № 4. С. 5-10. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (дата обращения: 16.11.2018).
- [2] Беляков Д.В. Разработка и исследование математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 11. С. 20-24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (дата обращения: 16.11.2018).
- [3] Самсонов В.А., Беляков Д.В., Чебурахин И.Ф. Вертикальное снижение тяжелого симметричного авторотирующего тела в сопротивляющейся среде // Научные Труды МАТИ. 2005. № 9(81). С. 145-150.
- [4] Самсонов В.А., Беляков Д.В. Математическое моделирование движения симметричного авторотирующего тела, раскрученного до высокой угловой скорости, в воздушной среде // Научные Труды МАТИ. 2006. № 10(82). С. 196-200.
- [5] Беляков Д.В., Самсонов В.А. Оценка возможностей нового типа ротирующего спускающегося в воздухе объекта // Сборник тезисов XXVI академических чтений по космонавтике / Под ред. А.К. Медведевой. М., 2002. С. 100.
- [6] Беляков Д.В. Математическое моделирование движения ротирующего спускающегося в воздухе объекта // Пятый международный аэрокосмический конгресс -



- IAC' 06. Посвящается 20-летию вывода в космос орбитальной станции «МИР». Москва, 2006. С. 62-63.
- [7] *Беляков Д.В.* Математическая модель несимметричного авторотирующего тела в сопротивляющейся среде // Гагаринские чтения. Тезисы докладов XXXIII Международной молодежной научной конференции. М., 2007. С. 27-28.
- [8] *McCroskey W.J., Pucci S.L.* Viscous-Inviscid Interaction on Oscillating Airfoils in Subsonic Flow // *A.I.A.A. Journal*. 1982. Vol. 20, no. 2. Pp. 167-174. DOI: 10.2514/3.51063
- [9] *Eroshin V.A.* Heavy disk entering water at high velocity and a small angle to the free surface // *Fluid Dynamics*. 1995. Vol. 30, Issue 6. Pp. 810-813. DOI: 10.1007/BF02078193
- [10] *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во Московского университета, 1986. 88 с.
- [11] *Паршин Д.Е.* Качественный анализ в задаче о движении аэродинамического маятника: дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 1993. 200 с.
- [12] *Selyutskiy Y.D., Samsonov V.A., Andronov P.R.* On oscillations of aerodynamic pendulum // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2013. Vol. 13, Issue 7. Pp. 1340010. DOI: 10.1142/S0219455413400105
- [13] *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. № 1621. С. 79-93.
- [14] *Strickland J.H., Webster B.T., Nguyen T.* A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study // *Journal of Fluids Engineering*. 1979. Vol. 101, Issue 4. Pp. 500-505. DOI: 10.1115/1.3449018
- [15] *Karlikov V.P., Khomyakov A.N., Sholomovich G.I.* Modeling of developed cavitation flows in water tunnels // *Fluid Dynamics*. 1987. Vol. 22, Issue 2. Pp. 228-235. DOI: 10.1007/BF01052253
- [16] *Paraschivoiu I., Delclauxe F.* Double Multiple Streamtube model with Recent Improvements // *Journal of Energy*. 1983. Vol. 7, no. 3. Pp. 250-255. DOI: 10.2514/3.48077
- [17] *Vittecoq P., Laneville A.* The Aerodynamic Forces for a Darrieus Rotor with Straight Blades: Wind Tunnel Measurement // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1983. Vol. 15, Issue 1-3. Pp. 381-388. DOI: 10.1016/0167-6105(83)90207-6
- [18] *Paraschivoiu I.* Aerodynamics Loads and Performance of the Darrieus Rotor // *Journal of Energy*. 1982. Vol. 6, no. 6. Pp. 406-412. DOI: 10.2514/3.62621
- [19] *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Изд-во «Наука», 1988. 328 с.
- [20] *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Изд-во «Наука», 1966. 530 с.
- [21] *Окунев Ю.М., Самсонов В.А., Локшин Б.Я., Привалов В.А., Шамолин М.В.* Динамика вращающегося тела, взаимодействующего со средой // Информационный бюллетень РФФИ. 1997. № 5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=230782> (дата обращения: 16.11.2018).
- [22] *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Об одной эвристической модели аэродинамического маятника // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 1047-1061. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=341&option_lang=rus (дата обращения: 16.11.2018).
- [23] *Eroshin V.A., Zyraynov D.V., Samsonov V.A.* Two-Beam System for Recording the Parameters of Motion of a Body Entering Water // *Fluid Dynamics*. 2001. Vol. 36, Issue 2. Pp. 178-186. DOI: 10.1023/A:1019221714967
- [24] *Привалов В.А., Самсонов В.А.* Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1990. № 2. С. 32-38.
- [25] *Беляков Д.В.* Математическое моделирование движения осесимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // *International Journal of Open Information Technologies*. 2015. Т. 3, № 3. С. 7-16. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22993754> (дата обращения: 16.11.2018).
- [26] *Беляков Д.В.* Задача об автоколебаниях пластинки в потоке среды // *Современные информационные технологии и ИТ образование*. 2015. Т. 11, № 2. С. 552-555. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26167543> (дата обращения: 16.11.2018).

Поступила 16.11.2018; принята к публикации 15.01.2019; опубликована онлайн 19.04.2019.

Об авторе:

Беляков Дмитрий Валерьевич, доцент, кафедра математики, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (125993, Россия, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbel@rambler.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. Motion investigation of asymmetric solid in resistant environment. *Vestnik Moskovskogo Energeticheskogo Instituta*. 2006; 4:5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (accessed 16.11.2018). (In Russ.)
- [2] Belyakov D.V. Development and Features of Mathematical Model of Movement Asymmetrical Autorotating Bodies in Quasi-static to Environment. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2007; 11:20-24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (accessed 16.11.2018). (In Russ.)
- [3] Samsonov V.A., Belyakov D.V., Cheburakhin I.F. Vertical reduction of a heavy symmetric autorotating body in a resisting medium. *Nauchnye Trudy MATI*. 2005; 9(81):145-150. (In Russ.)
- [4] Samsonov V.A., Belyakov D.V. Mathematical modeling of the movement of a symmetric autorotating body, promoted to a high angular velocity. *Nauchnye Trudy MATI*. 2006; 10(82):196-200. (In Russ.)
- [5] Belyakov D.V., Samsonov V.A. Assessment of the possibilities of a new type of object rotating the airborne one. Proceedings of the XXVI Academic Readings on Astronautics. A.K. Medvedeva (ed). M., 2002. p. 100. (In Russ.)
- [6] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion of a rotating object descending in the air. Proceedings of the Fifth



- International Aerospace Congress IAC-06. Dedicated to the 20th anniversary of the launch of the MIR space station. M., 2006, p. 62-63. (In Russ.)
- [7] Belyakov D.V. Mathematical model of an asymmetric auto-rotating body in a resisting environment. Proceedings of the International Youth Scientific XXXIII Gagarin Science Conference. M., 2007, p. 27-28. (In Russ.)
- [8] McCroskey W.J., Pucci S.L. Viscous-Inviscid Interaction on Oscillating Airfoils in Subsonic Flow. *A.I.A.A. Journal*. 1982; 20(2):167-174. (In Eng.) DOI: 10.2514/3.51063
- [9] Eroshin V.A. Heavy disk entering water at high velocity and a small angle to the free surface. *Fluid Dynamics*. 1995; 30(6):810-813. (In Eng.) DOI: 10.1007/BF02078193
- [10] Lokshin B.Ya., Privalov V.A., Samsonov V.A. Introduction to the problem of the motion of a point and a body in a resisting medium. M.: MSU Press, 1986. (In Russ.)
- [11] Parshin D.E. Qualitative analysis in the problem of the motion of an aerodynamic pendulum: dis. ... Ph.D. (Phys.-Math.). M.: MSU, 1993. (In Russ.)
- [12] Selyutskiy Y.D., Samsonov V.A., Andronov P.R. On oscillations of aerodynamic pendulum. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2013; 13(7):1340010. (In Eng.) DOI: 10.1142/S0219455413400105
- [13] Tabachnikov V.G. Stationary characteristics of wings at low speeds in the entire range of angles of attack. *Trudy TsAGI*. 1974; 1621:79-93. (In Russ.)
- [14] Strickland J.H., Webster B.T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. *Journal of Fluids Engineering*. 1979; 101(4):500-505. (In Eng.) DOI: 10.1115/1.3449018
- [15] Karlikov, V.P., Khomyakov, A.N. & Sholomovich, G.I. Modeling of developed cavitation flows in water tunnels. *Fluid Dynamics*. 1987; 22(2):228-235. (In Eng.) DOI: 10.1007/BF01052253
- [16] Paraschivoiu I., Delclauxe F. Double Multiple Streamtube model with Recent Improvements. *Journal of Energy*. 1983; 7(3):250-255. (In Eng.) DOI: 10.2514/3.48077
- [17] Vittecoq P., Laneville A. The Aerodynamic Forces for a Darrieus Rotor with Straight Blades: Wind Tunnel Measurement. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1983; 15(1-3):381-388. (In Eng.) DOI: 10.1016/0167-6105(83)90207-6
- [18] Paraschivoiu I. Aerodynamics Loads and Performance of the Darrieus Rotor. *Journal of Energy*. 1982; 6(6):406-412. (In Eng.) DOI: 10.2514/3.62621
- [19] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Applied Methods in Theory of Oscillations. Nauka, Moscow, 1988. (In Russ.)
- [20] Malkin I.G. Theory of the Stability of Motion. Nauka, Moscow, 1966. (In Russ.)
- [21] Okunev J.M. et al. Dynamics of rotating body interacting with a resistant medium. *Informacionnyj Byulleten RFBR*. 1997; 5. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=230782> (accessed 16.11.2018). (In Russ.)
- [22] Lokshin B.Ya., Samsonov V.A. On heuristic model of aerodynamical pendulum. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* = Fundamental and Applied Mathematics. 1998; vol. 4(3):1047-1061. Available at: URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fp-m&paperid=341&option_lang=rus (accessed 16.11.2018). (In Russ.)
- [23] Eroshin V.A., Zyraynov D.V., Samsonov V.A. Two-Beam System for Recording the Parameters of Motion of a Body Entering Water. *Fluid Dynamics*. 2001; 36(2):178-186. (In Eng.) DOI: 10.1023/A:1019221714967
- [24] Privalov V.A., Samsonov V.A. On stability of motion of a body auto-rotating in medium flow. *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela*. 1990; 2:32-38. (In Russ.)
- [25] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion axisymmetric autorotating bodies in quasistatic to ambience. *International Journal of Open Information Technologies*. 2015; 3(3):7-16. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22993754> (accessed 16.11.2018). (In Russ.)
- [26] Belyakov D.V. The problem of self-oscillations of the plate in the flow of the medium. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2015; 11(2):552-555. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26167543> (accessed 16.11.2018). (In Russ.)

Submitted 16.11.2018; revised 15.01.2019;
published online 19.04.2019.

About the author:

Dmitry V. Belyakov, Associate Professor of the Mathematics Department, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe highway, Moscow 125993, Russia), Ph.D. (Engineering), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbel@rambler.ru

The author has read and approved the final manuscript.

