

УДК 330.4

DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.215-224

## Потенциал Wolfram-технологий в исследовании теоретико-игровых моделей

Д. А. Власов, А. В. Синчуков\*

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, г. Москва, Россия

\* AVSinchukov@gmail.com

### Аннотация

В рамках данной статьи рассмотрены дидактический, прикладной и исследовательский потенциалы технологий современной базы знаний и набора вычислительных алгоритмов Wolfram в исследовании теоретико-игровых моделей, имеющих особое значение в прикладной математической подготовке студентов экономического бакалавриата в РЭУ им. Г. В. Плеханова. Представлены рекомендации по использованию Wolfram-технологий в процессе исследования теоретико-игровых моделей социально-экономических ситуаций, характеризующихся антагонизмом. Идеи, изложенные в статье, могут быть использованы в процессе проектирования профессионально значимых учебных дисциплин, таких как «Теория игр», «Теория принятия решений», «Исследование операций в экономике». В центре внимания статьи вопросы в области теории игр – сравнительно молодой науки. Её методы и модели, разработка которых была начата около пятидесяти лет назад, оказались востребованными при анализе социально-экономических ситуаций с учетом особенностей информационной среды принятия решений. К настоящему времени теоретико-игровые модели, являясь специальными моделями исследования операций, предоставили достаточно много полезной информации для практики принятия решений. В статье отмечается, что применение основных вопросов теоретико-игрового моделирования возможно в различных областях деятельности, в частности, в бизнесе, финансах, политике и спорте, а также в повседневном бытовом взаимодействии и принятии каждодневных решений. В процессе развития прикладной математической подготовки бакалавра экономики в РЭУ им. Г. В. Плеханова мы столкнулись с необходимостью формулирования наиболее важных концепций теории игр на понятном студенту бакалавриата языке и спроектировали учебный процесс с учётом минимизации теоретических рассуждений и замены их на количественный анализ социально-экономических ситуаций. Существенную роль в усилении прикладной профессиональной направленности математической подготовки мы отводим современным информационным технологиям. В частности, в контексте развития представлений о теоретико-игровом моделировании особый интерес представляет современная база знаний и набор вычислительных алгоритмов WolframAlpha.

**Ключевые слова:** WolframAlpha, равновесие, рациональность, теоретико-игровая модель, теория игр, экономическая ситуация.

**Для цитирования:** Власов Д. А., Синчуков А. В. Потенциал Wolfram-технологий в исследовании теоретико-игровых моделей // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 1. С. 215-224. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.215-224

© Власов Д.А., Синчуков А.В., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Potential of Wolfram Technologies in Construction and Research of Econometric Models

D. A. Vlasov, A. V. Sinchukov\*

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

\*AVSinchukov@gmail.com

### Abstract

Within this article didactic, applied and research potentials of technologies of the modern knowledge base and a set of computing algorithms Wolfram in research of the game-theoretic models which are of particular importance in applied mathematical training of students of an economic bachelor degree in REU of G.V. Plekhanov are considered. Recommendations about use of Wolfram-technologies in the course of the research of game-theoretic models of the social and economic situations which are characterized by antagonism are submitted. The ideas stated in article can be used in a designing process of professionally significant subject matters, such as "Game theory", "Theory of decision-making", "Research of operations in economy". Questions in the field of the game theory – relatively young science are the focus of attention of article. Its methods and models which development was begun about fifty years ago were demanded in the analysis of social and economic situations taking into account features of the information environment of decision-making. So far game-theoretic models, being special models of a research of operations, provided a lot of useful information for practice of decision-making. In article it is noted that application of the main questions of game-theoretic modeling is possible in various spheres of activity, in particular, in business, finance, policy and sport and also in daily household interaction and adoption of everyday decisions. In development of applied mathematical training of the bachelor of economy in REU of G.V. Plekhanov we faced need of formulation of the most important concepts of the game theory in language clear to the student of a bachelor degree and designed educational process taking into account minimization of theoretical reasoning and their replacement by the quantitative analysis of social and economic situations. We assign an essential part in strengthening of applied professional orientation of mathematical preparation to modern information technologies. In particular, in the context of development of ideas of game-theoretic modeling the modern knowledge base and a set of computing algorithms WolframAlpha is of special interest.

**Keywords:** WolframAlpha, balance, rationality, game-theoretic model, game theory, economic situation.

**For citation:** Vlasov D.A., Sinchukov A.V. Potential of Wolfram Technologies in Construction and Research of Econometric Models. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(1):215-224. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.215-224



## Введение

В рамках статьи представлен опыт применения информационных технологий для реализации процесса теоретико-игрового моделирования и преподавания учебной дисциплины «Теория игр» для студентов экономического бакалавриата в Российском экономическом университете им. Г. В. Плеханова. *Содержание образовательной области «Теория игр»* [1, 2] традиционно имеет особое значение для развития модельных представлений о социально-экономических проблемах и ситуациях. Методы и модели теории игр занимают особое место в реализуемой системе прикладной математической подготовки студентов экономического бакалавриата. Ранее в работах автора [3, 4] были раскрыты культурно-исторические и философские аспекты теории игр, установлены границы применения игровых моделей в практике прикладной математической подготовки. В данной статье будут рассмотрены новые возможности *Wolfram*-технологий, позволяющие исследовать теоретико-игровые модели разнообразных социально-экономических ситуаций, характеризующихся риском и конкуренцией, выделены принципы построения теоретико-игровых моделей базового и продвинутого уровней, положенные в основу учебно-познавательной деятельности студентов. В качестве перспективного направления совершенствования исследований экономических проблем и ситуаций отметим комплексное применение теории игр и теории риска, включение в процесс исследования новых инструментальных средств, к которым относятся такие продукты, как *WolframAlpha*, *Wolfram Mathematica*, *Wolfram Demonstrations Project*. Представленные в статье результаты исследования и визуализации теоретико-игровых моделей позволяют оценить исследовательский потенциал современных *Wolfram*-технологий, а также уточнить их методический потенциал для модернизации прикладной математической подготовки бакалавра экономики в условиях перехода к цифровой экономике.

## Теоретико-игровые модели как инструмент анализа экономических проблем и ситуаций

Теорию игр следует отнести к одному из самых популярных факультативных курсов ведущих университетов мира. Методы и модели теории игр являются важными компонентами курсов по изучению принятия решений в рамках программы магистр бизнес администрирование. При этом особое внимание уделяется теоретико-игровому анализу рискованных ситуаций, отражении в игровых моделях параметра «Склонность к риску». Отметим, что результаты поиска по словосочетаниям «Теория игр», «Игровая модель», «Игровое моделирование» в Google уже содержит ссылки на миллионы страниц. Использование методов и моделей теории игр можно встретить как в статьях, монографиях, так и в комментариях и дискуссиях на различных уровнях. Очевидно, что в современных условиях математизации социально-экономических исследований прикладная математическая подготовка будущего бакалавра экономики будет не полной без знакомства с концепциями теории игр, освоения логики теории игр.

Практика обучения теории игр в Институте Цифровой экономики и информационных технологий РЭУ им. Г. В. Плеханова позволяет констатировать большой интерес студентов, по-

требность в формировании различных точек зрения на процессы, происходящие в социально-экономической, политической и управленческой сферах. В рамках новой учебной дисциплины «Теория игр» студенты знакомятся с системой современных интересных знаний по спальным вопросам математических методов в экономике, а также подходов к достижению поставленных целей как профессиональной сфере, так и в личной жизни.

Теория игр является разделом экономической кибернетики, используемой для анализа и предсказания поведения игроков в стратегических взаимодействиях. Понятие «Равновесие» [5], занимающее центральное место в теоретико-игровых моделях, подразумевает выполнение ряда условий. Во-первых, подход к исследованию равновесного состояния распространяется на всех игроков. Во-вторых, всем игрокам представляется возможность анализа того, что могли бы сделать другие игроки (аспект стратегического мышления). В-третьих, игроками выбираются лучшие стратегии с учетом критерия оптимальности. В-четвертых, игроки осуществляют выбор стратегий до тех пор, пока не будет достигнуто равновесное состояние.

На востребованность теории игр в различном контексте указывает ряд исследований: контекст развития экономического мышления и финансовой грамотности [6], контекст поиск новых методов решения социально-экономических задач [7, 8], контекст принятия решений [9, 10].

Социально-экономическая действительность не предполагает использование принципа крайней рациональности в теоретико-игровых моделях [11]. Естественно предположить, что не каждый игрок ведет себя рационально в социально-экономической ситуации. Таким образом, классические предпосылки нарушаются. С целью объяснения потребительского выбора, пользовательского предпочтения и других решений, рациональность может быть свойством игрового взаимодействия, даже если часть игроков нарушает принцип рациональности. Теоретико-игровые модели могут обладать достаточно сложной структурой, так как выигрыши и множества стратегий игроков переплетены. Присутствие в игровом взаимодействии игроков, которые не думают стратегически или не оптимизируют выбор собственных стратегий, даже в случае небольшого количества таких игроков, может изменить действия рациональных игроков. Для учета степени рациональности игроков необходимо проведение соответствующего анализа на ограниченную рациональность.

Альтернативным способом определения условий игрового равновесия является изменение информационной ситуации. При анализе реальных социально-экономических ситуаций получение информации о множестве стратегий конкурентов представляется маловероятным, следовательно, равновесие не будет достигнуто за один ход игры. Действительно, при анализе социально-экономических ситуаций равновесие нужно рассматривать как конечный результат определенного процесса обучения (эволюционного процесса) игроков. В этом представлении равновесие является результатом применения стратегического мышления, оптимального выбора стратегий и не сводится к одиночному разыгрыванию ситуации или усреднению нескольких игровых взаимодействий.



## Возможности Wolfram-технологий в реализации идеи индекса ограниченной рациональности поведения игроков

С целью отражения современных тенденций в области математических методов моделирования экономики мы предлагаем адаптировать методическую систему обучения теории игр будущего бакалавра экономики. Для этого в содержании обучения как компоненте методической системы следует отразить идею индекса ограниченной рациональности. Благодаря этому индексу в процессе учебно-познавательной деятельности студента появляется возможность измерения и учета степени рациональности игроков. Включение задач на определение индекса ограниченной рациональности позволяет познакомить студентов с возможностями уникального статистического предсказания поведения игроков. Привлечение новых информационных технологий, в частности *WolframAlpha*, как средств обучения теории игр, позволяет познакомить студентов с процедурой самообучения игроков, а следовательно, исследовать пути достижения равновесной ситуации.

Алгоритмы на основе *Wolfram*-технологий позволяют в учебном процессе обобщить игровую модель, создать фиктивную игровую ситуацию и выяснить тенденцию её развития. Они имеют существенную эмпирическую предсказательную силу по сравнению с традиционными подходами к исследованию игровых моделей. Реализуемый подход к усилению прикладной направленности обучения теории игр позволяет показать, как индекс ограниченной рациональности и самообучающийся алгоритм помогают понять, как устроено игровое взаимодействие игроков в условиях многократного повторения игры.

## Новые принципы построения теоретико-игровых моделей для модернизации методической системы обучения теории игр

Мы придерживаемся традиционного понимания структуры проектируемой методической системы обучения теории игр. Эта структура разработана в середине XX века и в последствии в исследованиях В. М. Монахова приобрела актуальные для экономического и IT – образования интерпретации [12, 13]. Однако в основе проектируемой нами методической системы лежит реализация нового подхода, описываемого тремя принципами: принцип точности, принцип общности и принцип эмпирического соответствия. Данные принципы играют существенную роль в подготовке конкурентоспособных кадров в условиях перехода к цифровой экономике. Опишем далее сущность каждого из перечисленных выше принципов и особенности их реализации в рамках обучения теории игр будущего бакалавра экономики в университете.

*Принцип точности.* Поскольку классические игровые модели достаточно хорошо исследованы, стоит обратить внимание на их отклонения в контексте точности соответствия игровой модели исследуемой социально-экономической ситуации, а также в контексте прогнозирования исхода игры. Представление социально-экономической ситуации в виде простой игровой модели без свободных параметров не подразумевает от-

клонения в альтернативные теоретико-игровые теории. Принцип точности подразумевает отражение ключевых элементов поведенческой гибкости игроков, так как поведение субъектов игры может существенно отличаться от ожидаемого.

*Принцип общности.* В основе данного принципа лежит возможность применения одних и тех же игровых методов ко многим отличающимся игровым моделям, используя универсальный язык математики. Широкое использование математического языка при игровом моделировании позволяет создать диалог, который актуализирует развитие новых приемов исследования. Модели теории игр должны быть предназначены для применения ко многим социально-экономическим ситуациям с незначительными отличиями. Направленность на общие методы исследования широко выражена в экономической кибернетике, однако ни один из методов не является универсальным.

Многие исследователи в психологии полагают, что поведение субъектов настолько зависят от контекста конкретной ситуации, что невозможно создать общую теорию, которая учитывала бы все контексты. Тем более, что социально-экономические ситуации могут характеризоваться довольно разнообразным содержанием и контекстами. Мы придерживаемся точки зрения, что общая теория может быть построена в будущем, а в настоящее время можно использовать специальную подгонку типовых игровых моделей под социально-экономические ситуации.

*Принцип эмпирического соответствия.* Согласно этому принципу теоретико-игровой подход должен подкрепляться эмпирическими данными. По той причине, что теория игр исследует поведение и выбор игроков (и групп игроков) которые могут меняться в процессе развития игровой ситуации, маловероятно, что одна классическая логика способна объяснить игровой процесс и исход игры. О трудностях отражения в теории игр «эмпирического фона из экономической науки» отмечали в своей монографии основоположники классической теории игр Фон Нейман и Моргенштерн.

Другими словами, в условиях отсутствия широкого набора данных, на которых можно строить игровую модель присутствует опасность работы с моделями, которые с точки зрения математики являются допустимыми, изящными, однако с практической точки зрения мало связаны с фактическим социально-экономическим поведением. В этом контексте в процессе игрового моделирования необходим учет эмпирических данных, например экономики производства или финансов.

В завершение этого раздела статьи остановимся на анализе современной научной литературы, затрагивающей различные вопросы в области теоретико-игрового моделирования. В исследовании [14] представлены рекомендации по применению методов теории игр и принятия решений к анализу производственных ситуаций (выбор поставщиков сырья, управление качеством производимой продукции и т.д.). Работа [15] содержит обоснование необходимости использования игр особого вида – кооперативных (коалиционных) игр к составлению оптимальных маршрутов транспортных средств в условиях частичной неопределенности. Публикация [16] содержит акцент на приложения теории игр в области моделирования взаимосвязей между экономическими агентами. В работе [17] акцентируется внимание на прогностическую функцию теоретико-игрового моделирования. Различные приложения



теоретико-игрового моделирования к анализу социально-экономических ситуаций представлены в работах [18, 19, 20]. Авторы указывают на необходимость стандартизации применения игровых моделей и сложности интерпретации получаемых результатов.

В исследованиях [21] автором поставлена задача тестирования теории игр в контексте возможных приложений, например при анализе рискованных ситуаций, при выборе оптимальных производственных стратегий, при решении простейших логистических задач. Отмечается высокая востребованность методов и моделей теории игр для анализа различных ситуаций, требующих принятия научно-обоснованных решений, также выделены недостатки игровых моделей и игрового моделирования. Отметим, что на необходимость совершенствования программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества отмечается в работах [22, 23]. Публикация [24] содержит некоторые аспекты теории управления инновационными процессами, наиболее актуальные для модернизации прикладной математической подготовки выпускника экономического университета.

## Математические основания исследования матричных игровых моделей

Продолжим далее рассмотрение матричных игр и предположим, что матрица игры (игра) имеет размерность  $2 \times n$ . В этом случае матрица игры приобретает вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Отметим, что строки данной платежной матрицы советуют чистым стратегиям игрока  $A$ , а столбцы матрицы советуют чистым стратегиям игрока  $B$ .

Учитывая размерность матрицы игры, смешанная стратегия игрока  $A$  имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что  $p_1 + p_2 = 1$ , её можно записать в более удобном виде

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix}.$$

Целью рассмотрения теоретико-игровой модели является определение оптимальных стратегий и цены игры. Предположим, что игра не имеет решения в чистых стратегиях. Тогда искомую оптимальную смешанную стратегию игрока  $A$  будем обозначать

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 \\ p_1^0 & 1 - p_1^0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая классический принцип решения матричных антагонистических игр – принцип максимина – вероятностные характеристики смешанной стратегии должны удовлетворять следующему соотношению

$$\min_j (p_1^0 a_j + (1 - p_1^0) b_j) = \max_p \min_j (p_1 a_j + (1 - p_1) b_j).$$

В процессе решения матричных игр размерности  $2 \times n$  при ус-

ловии, что  $n > 2$  целесообразно использовать принцип доминирования, в основе которого лежит следующая идея. Если  $j_0$ -й столбец матрицы  $A$  доминирует выпуклую комбинацию некоторых других столбцов, то в процессе решения матричной игры  $j_0$ -й столбец следует исключить. Условие, когда элементы столбца доминируют выпуклую комбинацию элементов некоторых других столбцов выражается неравенством

$$\forall i = 1, \dots, m \quad a_{ij_0} \geq \sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ijk}, \quad \lambda_k \geq 0,$$

$$k = 1, \dots, l, \quad \sum_{k=1}^l \lambda_k = 1.$$

Можно доказать, что описанное выше преобразование платежной матрицы  $A$  не влияет на результат решения игры. Другими словами, как оптимальная стратегия, так и цена игры при применении принципа доминирования не изменятся. Исследуем, к чему приводит это преобразование платежной матрицы  $A$  в контексте игрока  $B$ :

$$y_d^0 = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_{j_0-1} & B_{j_0+1} & \dots & B_n \\ p_1^0 & \dots & p_{j_0-1}^0 & p_{j_0+1}^0 & \dots & p_n^0 \end{pmatrix},$$

$$y^0 = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_{j_0-1} & B_{j_0} & B_{j_0+1} & \dots & B_n \\ p_1^0 & \dots & p_{j_0-1}^0 & 0 & p_{j_0+1}^0 & \dots & p_n^0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что исключение столбца платежной матрицы  $A$  приводит к уменьшению стратегий игрока  $B$ . Следуя представленным рассуждениям, при рассмотрении игр с платежными матрицами  $m \times 2$  полезно при возможности вычеркивать строки, которые доминируются выпуклой комбинацией других строк платежной матрицы.

Возвращаясь к решению игры с платежной матрицей размерности  $2 \times n$ , опишем графический способ определения оптимальной смешанной стратегии игрока  $A$ , имеющий важное значение для понимания равновесия в смешанных стратегиях. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_j(p) = a_j p_1 + b_j p_2 = a_j p_1 + b_j (1 - p_1), \quad \text{где}$$

$$j = 1, \dots, n, \quad \alpha(p) = \min_j \alpha_j(p)$$

$\alpha_j = \alpha_j(p)$  – линейные функции, коэффициенты уравнений которых определяются элементами платежной матрицы  $A$ ,  $\alpha = \alpha(p)$  является вогнутой функцией. Будем обозначать точку, в которой функция  $\alpha = \alpha(p)$  достигает максимума –  $p_1^0$ . Её содержательный смысл заключается в вероятности применения первой стратегии игроком  $A$ .

Проведем анализ графиков линейных функций, заданных уравнениями  $\alpha_j = \alpha_j(p)$ . Их количество зависит от количества чистых стратегий игрока  $B$ . В случае, если  $p_1^0 = 0 \cap p_1^0 = 1$  для игрока  $B$  является оптимальной чистой стратегией, соответствующая линейной функции  $\alpha_j = \alpha_{j_0}(p)$

. Точка с координатами  $(0, \alpha(0)) \cap (0, \alpha(1))$  принадлежит

графику этой функции. Отметим, что это прямая, имеющая максимальный отрицательный (положительный) наклон на множестве всех графиков вида  $\alpha = \alpha(p)$ , проходящих через рассматриваемую точку.

Если найдется  $[p_1^*, p_2^*] \subset (0, 1)$  такой, что при всех значени-





ях  $p^* \in [p_1^*, p_2^*]$  имеет место равенство  $\alpha(p^*) = \max_{0 \leq p \leq 1} \alpha(p)$ ,

то для игрока  $A$  оптимальной будет являться каждая смешанная стратегия с вероятностными характеристиками  $p^* = (p_1^*, 1 - p_1^*)$ , где  $p^* \in [p_1^*, p_2^*]$ . Игрок  $B$  должен при-

держиваться своей оптимальной чистой стратегии, соответствующей индексу  $j_0$  и прямой  $\alpha_j = \alpha_{j_0}(p)$ , проходящей

через точки  $(p_1^*, \alpha(p_1^*)) \cup (p_2^*, \alpha(p_2^*))$  и параллельно оси абсцисс.

В случае, если максимум  $\alpha = \alpha(p)$  будет достигаться во внутренней точке  $p_1^0$  и не существует линейной функции, проходящей через точку  $(p_0, \alpha(p_0))$  параллельно оси абсцисс,

игроку  $B$  следует придерживаться оптимальной смешанной стратегии следующего вида

$$y^0 = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_{j_1} & \dots & B_{j_2} & \dots & B_n \\ 0 & \dots & p_0 & \dots & 1 - p_0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где точка  $(p_0, \alpha(p_0))$  принадлежит графику функции, заданной уравнением  $\alpha = \alpha_{j_1}(p)$  и характеризуется макси-

мальным положительным наклоном (по сравнению с другими прямыми, проходящими через рассматриваемую точку). Пусть прямая, заданная уравнением  $\alpha = \alpha_{j_2}(p)$  содержит точку  $(p_0, \alpha(p_0))$  и имеет максимальный отрицательный наклон

(по сравнению с другими прямыми, проходящими через рассматриваемую точку). В этом случае величина  $0 < p_0 < 1$  выбирается так, чтобы прямая  $\alpha = p_0 \alpha_{j_1}(p) + (1 - p_0) \alpha_{j_2}(p)$  была параллельна оси абсцисс. Цена игры (значение игры) далее определяется согласно известной формуле  $\gamma = F(p^0, q^0)$

или  $\gamma = \alpha(p_0)$ . Представленные общие рассуждения могут быть упрощены для игры  $2 \times 2$ , а также адаптированы для игры с матрицей выигрыша размерности  $m \times 2$ .

или  $\gamma = \alpha(p_0)$ .

Представленные общие рассуждения могут быть упрощены для игры  $2 \times 2$ , а также адаптированы для игры с матрицей выигрыша размерности  $m \times 2$ .

### Примеры исследования теоретико-игровых моделей и визуализации результатов на основе Wolfram-технологий

Перейдем к исследованию пяти теоретико-игровых моделей и визуализации результатов на основе Wolfram-технологий. Отметим, что с методической точки зрения нам представляется интересным подход к использованию информационных технологий и инноваций, представленный в работах [25, 26].

**Пример 1.** Рассмотрим игры, заданные матрицами выигрышей  $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ . Определим оптимальные смешанные

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

стратегии игроков в каждой игре, используя Wolfram-технологии. На рис. 1. представлены варианты оптимальных смешанных стратегий второго игрока.

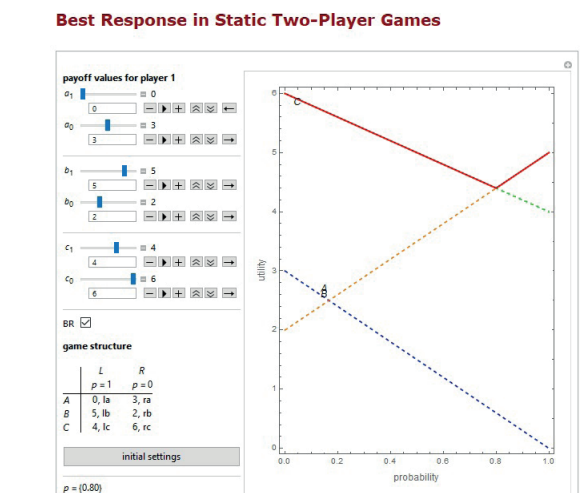
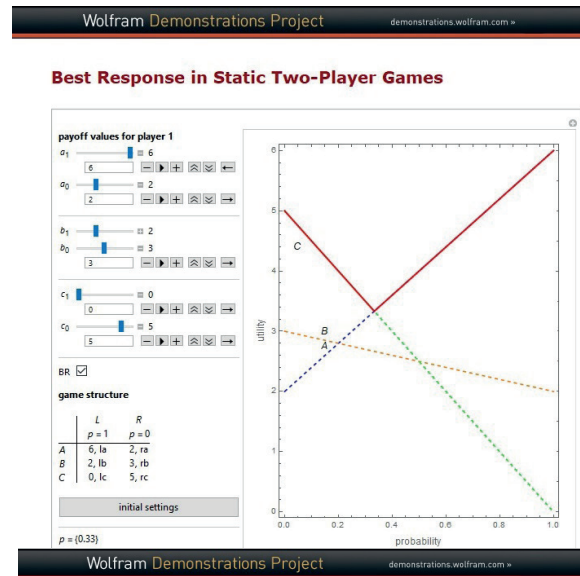


Рис. 1. Результаты исследования игровых моделей на основе Wolfram-технологий

Fig. 1. The results of the study of gaming models based on Wolfram technologies

При организации учебно-познавательной деятельности студентов экономического бакалавриата целесообразно обратить внимание на следующие аспекты. Во-первых, матрица второй игры может быть упрощена до  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  с учетом описанного выше

принципа упрощения платёжной матрицы. Во-вторых, этот феномен прослеживается на результате визуализации ситуации равновесия в игровой модели (расположение прямых  $B$  и  $C$ ). Эта возможность может быть использована в задачах с платежными матрицами большей размерности (например, в случае, когда матрица в процессе работы упрощена не полностью).

Продолжая работу по решению заданных игр и обращая внимание на выделенные сплошной линией огибающие, получаем следующие решения:

$$p_1 = \frac{5}{9}, p_2 = 0, p_3 = \frac{4}{9}, q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = \frac{2}{3}, \gamma = 3\frac{1}{3};$$

$$p_1 = 0, p_2 = 0.4, p_3 = 0.6, q_1 = 0.8, q_2 = 0.2, \gamma = 4.4.$$

**Пример 2.** Рассмотрим игры, заданные матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

стратегии игроков в каждой игре, используя *Wolfram*-технологии.

На рис. 2. представлены варианты оптимальных смешанных стратегий второго игрока.

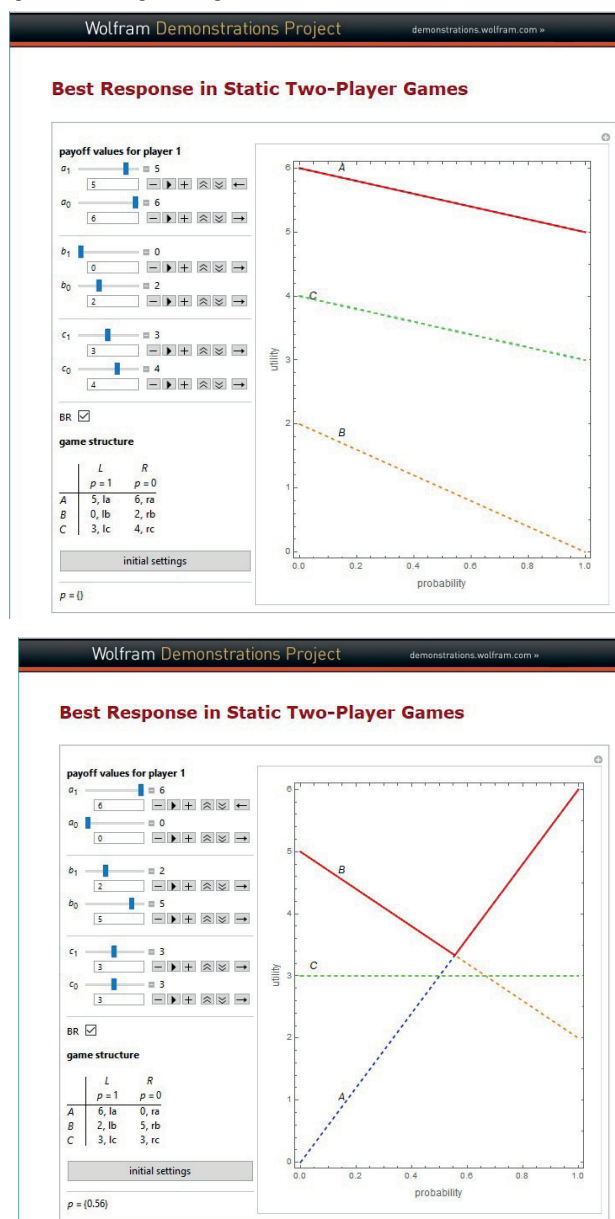


Рис. 2. Результаты исследования игровых моделей на основе Wolfram-технологий

Fig. 2. The results of the study of gaming models based on Wolfram technologies

Результат визуализации, представленный на рис. 2 требует особого внимания. Его следует интерпретировать следующим образом: первая игра в данном примере имеет решения в чи-

стых стратегиях (первая стратегия реализуется с вероятностью равной единице, а остальные стратегии – с нулевой вероятностью). Это можно проследить аналитически, упрощая платежную матрицу до (5). Однако это хорошо демонстрируется на рис. 2: мы видим три непересекающиеся на отрезке от нуля до единицы прямые, соответствующие стратегиям игрока. Вторая игра, рассматриваемая в рамках этого примера, тоже имеет важную содержательную особенность, которую открывают *Wolfram*-технологии: хотя игра имеет решение в смешанных стратегиях, третья стратегия игрока *A* должна реализовываться с нулевой вероятностью (другими словами исключается из множества эффективных стратегий).

Продолжая работу и учитывая верхнюю огибающую (выделенную на рисунке сплошной линией) окончательно получаем, что рассматриваемые игры имеют решения

$$p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0, q_1 = 1, q_2 = 0, \gamma = 5;$$

$$p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = 0, q_1 = \frac{5}{9}, q_2 = \frac{4}{9}, v = 3\frac{1}{3}.$$

## Заключение

Включение теоретико-игровых моделей в практику прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики направленно на развитие особых способностей, связанных со стратегическим мышлением (в частности, способность игрока предвидеть действия соперника, учитывать это в процессе принятия решений и др.). Методы и модели теории игр в опоре на *Wolfram* – технологии позволили познакомиться студентам экономического бакалавриата с процессом выбора наилучших стратегии с учётом имеющейся информационной среды задачи принятия решений и множества критериев оптимальности (представление о противнике в контексте имеющихся в его распоряжении ресурсах, а также о характере его поведения в различных ситуациях). *Wolfram* – технологии позволили сделать модели теории игр более доступными и понятными для применения в учебном процессе анализа ситуаций, приближенных к ситуациям будущей профессиональной деятельности.

Внедрение *Wolfram* – технологий в практику построения и исследования теоретико-игровых моделей позволило сгладить отличия в уровне математической подготовки студентов экономического бакалавриата и избежать перегрузку специальными терминами и математическими выкладками в области теории игр, в условиях сокращения часов на аудиторную работу акцентировать внимание на принципиально важных инструментах научных исследований, в основе которых лежат базовые концепции теоретико-игрового моделирования. Однако эффективное стратегическое мышление в контексте анализа социально-экономических ситуаций по-прежнему следует считать настоящим искусством.

В рамках прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики в Российском экономическом университете им. Г. В. Плеханова мы учитываем *интегративный потенциал Wolfram*-технологий, позволяющий

по-новому организовать учебно-познавательную работу студентов с содержанием образовательной области «Теория игр и игровое моделирование»,

более осознанно формировать профессионально-значимые для будущего экономиста понятия («Модель», «Равновесие»,



«Оптимальность», «Критерий оптимальности», «Стратегия» и др.),

в условиях сокращения аудиторной нагрузки существенно расширить количество прикладных математических задач на анализ социально-экономических ситуаций, характеризующихся конкуренцией, антагонизмом и риском; познакомить студентов с новыми возможностями инструментальных средств (*WolframAlpha*, *Wolfram Mathematica*, *Wolfram Demonstrations Project*), применяемых в процессе современных социально-экономических исследований и имеющих широкий спектр использования в управленческой, экономической, финансовой и педагогической деятельности.

организовать поддержку научно-исследовательской работы студентов в рамках образовательной области «Теория игр и игровое моделирование».

Опыт практического использования компьютерной математической среды *Wolfram Demonstrations Project*, элементы которого представлены в данной статье, позволяет охарактеризовать *Wolfram*-технологии. *Wolfram*-технологии предоставляет исследователю уникальные возможности для практической реализации разнообразных аналитических и приближенных вычислений, набор инструментов, позволяющих анализировать и обрабатывать социально-экономические данные. Важна роль *Wolfram*-технологий для визуализации социально-экономических ситуаций путем создания особых графических интерфейсов, примеры которых представлены в данной статье. *Использование возможностей Wolfram – технология позволяет повысить качество исследования теоретико-игровых моделей*, позволяют по-новому реализовывать идеи контекстного обучения, приблизить учебную деятельность студента экономического бакалавриата к будущей профессиональной деятельности в условиях перехода к цифровой экономике.

## Список использованных источников

- [1] Диксит А.К., Нейлбафф Б.Дж. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017. 464 с.
- [2] Диксит А.К., Скит С., Рейли Д.Т. Стратегические игры. Доступный учебник по теории игр. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017. 880 с.
- [3] Власов Д.А., Синчуков А.В. Теория игр: философские и методические особенности // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2016). Казань, 2016. С. 123-127. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29176655> (дата обращения: 15.10.2018).
- [4] Власов Д.А., Синчуков А.В. Теория игр в системе прикладной математической подготовки бакалавра экономики // Ярославский педагогический вестник. 2017. № 3. С. 112-116. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29452477> (дата обращения: 15.10.2018).
- [5] Тихомиров Н.П., Тихомирова Т.М. Риск-анализ в экономике. М.: Изд-во «Экономика», 2010. 318 с.
- [6] Быканова О.А., Филиппова Н.В. Экономическое мышление и финансовая грамотность как составные элементы профильной направленности школьной математики для абитуриентов и учащихся на летней практике в экономическом вузе // Проблемы и перспективы развития образования: материалы VI Междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2015 г.). Пермь: Меркурий, 2015. С. 249-251. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23359246> (дата обращения: 15.10.2018).
- [7] Лихачев Г.Г., Сухорукова И.В. Компьютерное моделирование и математическое обеспечение экономико-социальных задач // Экономический анализ: теория и практика. 2003. № 5(8). С. 60-62. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9448297> (дата обращения: 15.10.2018).
- [8] Тихомиров Н.П., Тихомирова Т.М., Хамитов Э.М. Имитационные методы оценки эффективности участия во взаимном страховании // Экономика природопользования. 2016. № 6. С. 4-17. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27341225> (дата обращения: 15.10.2018).
- [9] Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. Методы оптимальных решений. М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. 384 с.
- [10] Седова Н.А., Седов В.А. Методы оценки качества полученных решений // Южно-Сибирский научный вестник. 2012. № 1(1). С. 88-91. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17833126> (дата обращения: 15.10.2018).
- [11] Тихомиров Н.П., Сабуров Е.Ф., Сидоров М.А. Методы социально-экономического прогнозирования. М.: Изд-во МГОУ, 2005. 668 с.
- [12] Бахтина О.И., Монахов В.М. Формирование нового взгляда на информатизацию и научно-технологическое развитие современной теории обучения // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. 2018. № 2. С. 60-77. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32833385> (дата обращения: 15.10.2018).
- [13] Монахов В.М., Сильченко А.П., Тихомиров С.А. Генезис и функционал профессиональной педагогической деятельности в условиях информационной среды // Ярославский педагогический вестник. 2017. № 6. С. 112-122. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30798381> (дата обращения: 15.10.2018).
- [14] Mohammaditabar D., Ghodsypour S.H., Hafezalkotob A. A game theoretic analysis in capacity-constrained supplier-selection and cooperation by considering the total supply chain inventory costs // International Journal of Production Economics. 2016. Vol. 181, Part A. Pp. 87-97. DOI: 10.1016/j.ijpe.2015.11.016
- [15] Zibaei Z., Hafezalkotob A., Ghashami S.S. Cooperative vehicle routing problem: an opportunity for cost saving // Journal of Industrial Engineering International. 2016. Vol. 12, Issue 3. Pp. 271-286. DOI: 10.1007/s40092-016-0142-1
- [16] Farooqui A.D., Niazi M.A. Game theory models for communication between agents: a review // Complex Adaptive Systems Modeling. 2016. Vol. 4, Issue 1. Pp. 1-13. DOI: 10.1186/s40294-016-0026-7
- [17] Riensch R.M., Whitney P.D. Combining modeling and gaming for predictive analytics // Security Informatics. 2012. Vol. 1, Issue 11. Pp. 1-7. DOI: 10.1186/2190-8532-1-11
- [18] Seele P. Envisioning the digital sustainability panopticon: a thought experiment of how big data may help advancing sustainability in the digital age // Sustainability Science. 2016. Vol. 11, Issue 5. Pp. 845-854. DOI: 10.1007/s11625-016-0381-5
- [19] Seele P. Predictive Sustainability Control: A review assessing the potential to transfer big data driven 'predictive policing'





- to corporate sustainability management // Journal of Cleaner Production. 2017. Vol. 153. Pp. 673-686. DOI: 10.1016/j.jclepro.2016.10.175
- [20] Afflerbach P, Bolsinger M., Röglinger M. An economic decision model for determining the appropriate level of business process standardization // Business Research. 2016. Vol. 9, Issue 2. Pp. 335-375. DOI: 10.1007/s40685-016-0035-6
- [21] Hausman D.M. «Testing» game theory // Journal of Economic Methodology. 2005. Vol. 12, Issue 2. Pp. 211-223. DOI: 10.1080/13501780500086065
- [22] Карасев П.А., Чайковская Л.А. Совершенствование программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества // Экономика и управление: проблемы, решения. 2017. Т. 3, № 2. С. 3-9. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29007155> (дата обращения: 15.10.2018).
- [23] Карасев П.А., Шкляев А.Е., Кокорев И.А., Мякота Д.Г., Муштафина М.Р. Развитие человеческого капитала в условиях четвертой промышленной революции // Друкерровский вестник. 2018. № 5(25). С. 48-61. DOI: 10.17213/2312-6469-2018-5-48-61
- [24] Кулапов М.Н., Варфоломеев В.П., Карасев П.А. Технологические аспекты теории управления инновационными процессами: системный анализ и подходы к моделированию // Друкерровский вестник. 2018. № 3(23). С. 82-100. DOI: 10.17213/2312-6469-2018-3-82-100
- [25] Муханов С.А., Муханова А.А., Нижников А.И. Использование информационных технологий для индивидуализации обучения математике на примере темы «Дифференциальные уравнения» // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2018. № 1(43). С. 72-77. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32808941> (дата обращения: 15.10.2018).
- [26] Киселёва И.А., Симонович Н.Е. Проблемы самореализации личности в современных условиях инноваций // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2014. Т. 10, № 6(243). С. 53-56. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21154369> (дата обращения: 15.10.2018).

Поступила 15.10.2018; принята к публикации 15.01.2019; опубликована онлайн 19.04.2019.

#### Об авторах:

**Власов Дмитрий Анатольевич**, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математических методов в экономике, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (117997, Россия, г. Москва, Стремянный пер., д. 36), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9763-9078>, DAV495@gmail.com

**Синчуков Александр Валерьевич**, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра высшей математики, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова (117997, Россия, г. Москва, Стремянный пер., д. 36), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6516-196X>, AVSinchukov@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

## References

- [1] Dixit A.K., Nalebuff B.J. The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life. W. W. Norton & Company; 2010. 512 p. (In Eng.)
- [2] Dixit A.K., Skeath S., Reiley D.H. Games of Strategy. 4th Ed. W. W. Norton & Company; 2014. 755 p. (In Eng.)
- [3] Vlasov D.A., Sinchukov A.V. Game Theory: Philosophical And Methodological Features. Proceedings of the VI International Conference Mathematical education in school and university (MATHEDU-2016). Kazan, 2016. p. 123-127. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29176655> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [4] Vlasov D.A., Sinchukov A.V. The Game Theory in the System of Applied Mathematical Training of the Bachelor of Economy. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2017; 3:112-116. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29452477> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [5] Tikhomirov N.P., Tikhomirova T.M. Risk Analysis in Economy. M.: Economy, 2010. 318 p. (In Russ.)
- [6] Bykanova O.A., Filippova N.V. Economic thinking and financial literacy as constituent elements of the core orientation of school mathematics for applicants and students in summer practice in an economic university. Problems and prospects for the development of education. Perm: Merkuriy, 2015. p. 249-251. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23359246> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [7] Likhachev G. G., Sukhorukova I.V. Computer modeling and software for economic and social problems. *Economic Analysis: Theory and Practice*. 2003; 5(8):60-62. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9448297> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [8] Tikhomirov N.P., Tikhomirova T.M. Simulation Methods for Assessing The Effectiveness Of Participation In The Mutual Insurance. *Ekonomika prirodopol'zovaniya = Environmental Economics*. 2016; 6:4-17. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27341225> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [9] Mastyaeva I.N., Goremykina G.I., Semenikhina O.N. Metody optimal'nykh resheniy [Methods of optimal solutions]. M.: KURS, NITs INFRA-M, 2016. 384 p. (In Russ.)
- [10] Sedova N.A., Sedov V.A. Methods for assessing the quality of the solutions. *South-Siberian Scientific Bulletin*. 2012; 1(1):88-91. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17833126> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [11] Tikhomirov N.P., Saburov E.F., Sidorov M.A. Metody sotsial'no-ekonomicheskogo prognozirovaniya [Methods of social and economic forecasting]. Moscow: MGOU, 2005. 668 p. (In Russ.)
- [12] Bahtina O.I., Monakhov V.M. The formation of a new perspective on informatization and scientific and technological development of the modern theory of training. *The Moscow University Bulletin. Series 20. Pedagogical Education*. 2018; 2:60-77. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32833385> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [13] Monakhov V.M., Silchenko A.P., Tikhomirov S.A. Genesis and Function of Professional Pedagogical Activity in Terms of IEE. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2017; 6:112-122. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30798381> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)



- [14] Mohammaditabar D., Ghodsypour S.H., Hafezalkotob A. A game theoretic analysis in capacity-constrained supplier-selection and cooperation by considering the total supply chain inventory costs. *International Journal of Production Economics*. 2016; 181(A):87-97. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.ijpe.2015.11.016
- [15] Zibaei Z., Hafezalkotob A., Ghashami S.S. Cooperative vehicle routing problem: an opportunity for cost saving. *Journal of Industrial Engineering International*. 2016; 12(3):271-286. (In Eng.) DOI: 10.1007/s40092-016-0142-1
- [16] Farooqui A.D., Niazi M.A. Game theory models for communication between agents: a review. *Complex Adaptive Systems Modeling*. 2016; 4(1):1-13. (In Eng.) DOI: 10.1186/s40294-016-0026-7
- [17] Riensch R.M., Whitney P.D. Combining modeling and gaming for predictive analytics. *Security Informatics*. 2012; 1(11):1-7. (In Eng.) DOI: 10.1186/2190-8532-1-11
- [18] Seele P. Envisioning the digital sustainability panopticon: a thought experiment of how big data may help advancing sustainability in the digital age. *Sustainability Science*. 2016; 11(5):845-854. (In Eng.) DOI: 10.1007/s11625-016-0381-5
- [19] Seele P. Predictive Sustainability Control: A review assessing the potential to transfer big data driven 'predictive policing' to corporate sustainability management. *Journal of Cleaner Production*. 2017; 153:673-686. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jclepro.2016.10.175
- [20] Afflerbach P., Bolsinger M., Röglinger M. An economic decision model for determining the appropriate level of business process standardization. *Business Research*. 2016; 9(2):335-375. (In Eng.) DOI: 10.1007/s40685-016-0035-6
- [21] Hausman D.M. «Testing» game theory. *Journal of Economic Methodology*. 2005; 12(2):211-223. (In Eng.) DOI: 10.1080/13501780500086065
- [22] Karasev P.A., Caikovskaya L.A. Improvement of higher education programs in the context of modern market requirements of educational services and professional communities. *Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya*. 2017; 3(2.):3-9. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29007155> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [23] Karasev A.A., Shklyayev A.E., Kokorev A I., Myakota D.G., Mustafin M.R. The Development of Human Capital in Conditions of the Fourth Industrial Revolution. *Drukerovskij vestnik*. 2018; 5(25):48-61. (In Russ.) DOI: 10.17213/2312-6469-2018-5-48-61
- [24] Kulapov M.N., Varfolomeev V.P., Karasev P.A. Technological aspects of the control theory innovative processes: system analysis and approaches to modeling. *Drukerovskij vestnik*. 2018; 3(23):82-100. (In Russ.) DOI: 10.17213/2312-6469-2018-3-82-100
- [25] Mukhanov S.A., Mukhanova A.A., Nizhnikov A.I. The Use of Information Technologies for the Individualization of Teaching Mathematics on the Example of the Theme: «Differential Equations». *Vestnik of Moscow City University. Series «Informatics and Informatization of Education»*. 2018; 1(43):72-77. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32808941> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)
- [26] Kiseleva I.A., Simonovich N.E. Problems self person in modern conditions innovation. *National Interests: Priorities and Security*. 2014; 10(6):53-56. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21154369> (accessed 15.10.2018). (In Russ.)

Submitted 15.10.2018; revised 15.01.2019; published online 19.04.2019.

#### About the authors:

**Dmitry A. Vlasov**, Associate Professor, Department of Mathematical Methods in Economics, Plekhanov Russian University of Economic (36 Stremyanny Lane, Moscow 117997, Russia), Ph.D. (Pedagogy), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9763-9078>, DAV495@gmail.com

**Alexander V. Sinchukov**, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economic (36 Stremyanny Lane, Moscow 117997, Russia), Ph.D. (Pedagogy), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6516-196X>, AVSinchukov@gmail.com

*All authors have read and approved the final manuscript.*

