

УДК 519.6+004.4
DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.242-249

Математическая модель и вычислительный алгоритм решения задачи о сосуществовании различных групп населения в городской среде

Д. О. Киселёв

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия
dmi3iii@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена актуальной на сегодняшний день проблеме развития и динамики населения в городском образовании с точки зрения пространственно-динамического приближения. Население подразделяется на различные группы в соответствии с их экономическими и индивидуальными характеристиками. Например, население можно классифицировать по генетическим и фенотипическим признакам, по уровню дохода или образования. Вопрос мирного и эффективного взаимодействия групп между собой представляет одну из самых важных задач в рамках любого образования урбанистического типа. Автор описывает задачу взаимодействия двух групп на качественном уровне с помощью системы из двух нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа. Особое внимание уделяется раскрытию схемы численного решения выбранной модели: подробно разобрано использование явной (по времени) разностной схемы типа «предиктор-корректор». Кроме того, автор проводит серию вычислительных экспериментов с учетом выбранных предположений относительно двух конкретных групп населения. В качестве примера автор находит условия, приводящие к сегрегации групп. Для наглядности приведены качественные картины изменения состава выбранных групп на занимаемой территории, полученные после численного моделирования. На основе результатов исследования обосновывается возможность применимости нового подхода для задач урбанистики. Данная работа является первым шагом в реализации программы использования пространственной экономики для описания реальных процессов в урбанистических образованиях. В перспективе будет интересно исследовать влияние стохастических процессов на построенную модель, а также обратить особое внимание на поиск параметров режимов, отвечающих наиболее актуальным проблемам взаимодействия групп населения.

Ключевые слова: нелинейная динамика, конечно-разностная схема, временные ряды, динамика города, дифференциальные уравнения, пространственная динамика.

Для цитирования: Киселёв Д. О. Математическая модель и вычислительный алгоритм решения задачи о сосуществовании различных групп населения в городской среде // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 1. С. 242-249. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.242-249

© Киселёв Д.О., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Mathematical Model and Computational Algorithm for Solving the Problem of the Coexistence of Different Groups of People in an Urban Environment

D. O. Kiselyov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
dmi3iii@yandex.ru

Abstract

The article is devoted to the currently relevant problem of the development and dynamics of the population in urban formation from the point of view of spatial-dynamic approximation. The population is divided by different groups according to their economic and individual characteristics. For example, the population can be classified according to genetic and phenotypic traits, according to the level of income or education. The question of the peaceful and effective interaction of groups with each other is one of the most important tasks in any urban type of formation. The author describes the problem of the interaction of two groups at a qualitative level using a system of two non-stationary nonlinear differential equations of diffusion type. Special attention is paid to the disclosure of the numerical solution scheme of the selected model: the use of an explicit (in time) difference scheme of the “predictor-corrector” type has been analyzed in detail. In addition, the author conducts a series of computational experiments considering the selected assumptions regarding two specific groups of the population. As an example, the author finds conditions that lead to segregation of groups. For clarity, high-quality pictures of changes in the composition of selected groups in the occupied territory, obtained after numerical modeling, are presented. Based on the results of the study, the possibility of the applicability of the new approach to the problems of urban studies is substantiated. This work is the first step in the implementation of the program of using spatial economics to describe real processes in urban formations. In the future, it will be interesting to investigate the influence of stochastic processes on the constructed model, and also to pay special attention to the search for parameters of regimes that meet the most pressing problems of interaction between groups of the population.

Keywords: nonlinear dynamics, finite difference scheme, time series, urban dynamics, differential equations, spatial dynamics.

For citation: Kiselyov D.O. Mathematical Model and Computational Algorithm for Solving the Problem of the Coexistence of Different Groups of People in an Urban Environment. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(1):242-249. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.242-249



Введение

Одной из важных составляющих урбанистических процессов является проблема сосуществования различных групп населения в городской среде.

Население подразделяется на различные страты в соответствии с их экономическими и социальными характеристиками. Например, население можно классифицировать по генетическим и фенотипическим признакам, принадлежности к той или иной этнической группе и, в первую очередь, по уровню дохода. Во многих странах, как развитых, так и развивающихся, сосуществование групп населения, принадлежащих к различным социальным слоям, порождает серьезные проблемы и поэтому изучалось с различных точек зрения, главным образом, с точки зрения социологии. Сосуществование разнородных групп населения часто приводит к социальному напряжению. Власти большинства развитых стран постоянно предпринимают попытки борьбы с возникновением таких ситуаций, но при анализе средств массовой информации становится понятно, что предпринимаемые политические и экономические меры часто не приводят к положительным результатам. Именно по этой причине рассматриваемая проблема столь актуальна. Благодаря качественному анализу различных ситуаций появляется возможность предсказания и пресечения возможных конфликтов и проблем.

Значимость этой проблемы очевидна, но разумных предложений по ее решению не выдвинуто. В связи с этим, построение качественной, но достаточно общей математической модели динамики различных групп населения, представляет особый интерес [1]. Достаточно очевидно, что подобная модель должна строиться в рамках концепции пространственной экономики [2] и учитывать эволюцию ареала проживания различных демографических групп [3].

В настоящей работе рассматривается первый вариант модели для простейшей ситуации, когда имеется всего две группы населения, а сама городская область представляет собой прямоугольник с однородными характеристиками. Соответствующая система уравнений включает в себя два нелинейных уравнения диффузии с членами, описывающими взаимодействие рассматриваемых групп населения.

Используются различные виды граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода. Далее подробно описывается разностная схема и вычислительный алгоритм решения соответствующей алгебраической системы уравнений. Приведены результаты вычислительных экспериментов при различных параметрах, входящих в математическую модель. Получены режимы «сегрегации» двух групп на выделенной территории и вытеснение одной группы населения другой.

Математическая модель совместной эволюции двух групп населения в городской среде

Рассмотрим две группы населения, обозначаемые как группа 1 и группа 2. Предполагается, что между обеими группами существует взаимодействие в том смысле, что их отношения влияют на характер распределения населения по ареалу проживания. Отношения могут быть дружелюбными; недружелюбными и «нейтральными». Эволюция обеих групп в рамках пространственной экономики описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U(a_1 - b_1 U - c_1 V) - d_1 UV + \mu_1 \operatorname{div}(k_1(U, V) \operatorname{grad} U), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \beta V(a_2 - b_2 V - c_2 U) - d_2 VU + \mu_2 \operatorname{div}(k_2(U, V) \operatorname{grad} V), \end{cases} \quad (1)$$

где неизвестные функции $U = U(x, y, t)$ и $V = V(x, y, t)$ по смыслу определяют соответственно численность 1-ой группы населения в точке (x, y) в момент времени t , а $V = V(x, y, t)$ - соответственно численность 2-ой группы населения в точке (x, y) в момент времени t .

Система (1) решается в области D , представляющей параллелепипед в пространстве переменных (x, y, t) :

$$\begin{aligned} (x, y, t) \in D = D_{xy} \times \{0 < t < T_{\max}\} = \\ = \{(X_0 < x < X_1) \times (Y_0 < y < Y_1) \times (0 < t < T_{\max})\} \end{aligned}$$

Без ограничения общности, в дальнейшем можно считать, что $X_1 = 0, X_2 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 1$.

В системе (1) дифференциальный оператор второго порядка (диффузионный член), присутствующий в правой части, имеет дивергентный вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k_s \operatorname{grad} F) = \nabla \cdot (k_s \nabla F) = \left\{ \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_s \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_s \frac{\partial F}{\partial y} \right), s = \overline{1, 2}, \end{aligned}$$

что сильно упрощает процедуру его разностной аппроксимации.

В системе (1) предполагается, что коэффициенты зависят от искомым функций, что автоматически означает нелинейность системы дифференциальных уравнений (1).

Зависимость этих коэффициентов от неизвестных функций определяет нелинейность рассматриваемой задачи и все трудности ее решения, которые с этим связаны. Как правило, эти коэффициенты в задачах нелинейной диффузии зависят от функций степенным образом:

$$k_1(U, V) = k_1^{(0)} \times U^{\sigma_1} \times V^{\delta_1}, k_2(U, V) = k_2^{(0)} \times U^{\sigma_2} \times V^{\delta_2},$$

где $k_1^{(0)}, \sigma_1, \delta_1, k_2^{(0)}, \sigma_2, \delta_2$ — некоторые константы.

Для системы уравнений (1) необходимо задать начальные и краевые условия.

Граничные условия в случае первого рода имеют вид (должны выполняться в любой момент времени $t > 0$):

$$U_\Gamma = f_U(x, y, t), V_\Gamma = f_V(x, y, t), (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

В случае условий второго рода:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Gamma_{n_1(t)}} = 0, \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\Gamma_{n_2(t)}} = 0 \quad \text{— означает, что население не попол-$$

няется извне и не уезжает за пределы города.

Граничные условия третьего рода:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} + h_1 U \right|_\Gamma = v_1(t), \left. \frac{\partial V}{\partial n} + h_2 V \right|_\Gamma = v_2(t) \quad \text{— наиболее близки к}$$

описанию реальной картины заселения города. В соответствии с возможностями для расселения поток населения направлен либо внутрь, либо за пределы города.



Начальные условия при $t = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y, t)|_{t=0} &= U_0(x, y), V(x, y, t)|_{t=0} = \\ &= V_0(x, y), (x, y) \in \{(0 < x < 1) \times (0 < y < 1)\} \end{aligned} \quad (3)$$

Численный метод решения задачи

Введем сетки по пространственным координатам x и y :

$$x_i = X_0 + ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x; y_j = Y_0 + jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y,$$

$$\text{где } h_x = \frac{X_2 - X_1}{N_x}, h_y = \frac{Y_2 - Y_1}{N_y}, \text{ т.е. считаем, что}$$

$$x \in [X_1, X_2], y \in [Y_1, Y_2],$$

N_x, N_y — выбранное количество узлов.

Обозначим как узел $P_{i,j} = (x_i, y_j), i = 0, 1, \dots, N_x, j = 0, 1, \dots, N_y$.

Узел P_{ij} назовем внутренним, если одновременно $0 < i < N_x$ и $0 < j < N_y$. Узел P_{ij} назовем граничным, если выполнено, что выражение

$$f(i, j) = i \times (i - N_x) \times j \times (j - N_y) = 0.$$

Во внутренних узлах P_{ij} необходимо написать разностную аппроксимацию дифференциальных уравнений системы (1), а в граничных узлах P_{ij} должны быть аппроксимированы соответственно граничные условия вида (2).

Для построения разностной схемы запишем систему уравнений (1) в операторном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Omega_1[U, V] + \mu_1 \Lambda_1[U], \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \Omega_2[V, U] + \mu_2 \Lambda_2[V], \end{cases} \quad (1')$$

где приняты обозначения:

$$\Omega_1[U, V] = \alpha U(a_1 - b_1 U - c_1 V) - d_1 UV, \Lambda_1[U] = \text{div}(k_1(U, V) \text{grad } U),$$

$$\Omega_2[V, U] = \beta V(a_2 - b_2 V - c_2 U) - d_2 VU, \Lambda_2[V] = \text{div}(k_2(U, V) \text{grad } V).$$

Дифференциальный оператор второго порядка $\Lambda_s[F] = \text{div}(k_s \text{grad } F), s = 1, 2$ в декартовых координатах (x, y) имеет следующий стандартный вид:

$$\Lambda_s[F] = \text{div}(k_s \text{grad } F) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_s \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_s \frac{\partial F}{\partial y} \right).$$

Разностная аппроксимация этого дифференциального оператора $\Lambda_s[F]$ во внутренних узлах сетки $\{P_{ij}\}$ осуществляется по пятиточечному «крестообразному» шаблону, включающему узлы $P_{i-1,j}, P_{i,j-1}, P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}$:

$$\begin{aligned} \Lambda_s[F]_{ij} \sim \Lambda_s^{(h)}[F_{ij}] &= \frac{\sigma_{s,i}(i+1, j) \frac{(F_{i+1,j} - F_{i,j})}{h_x} - \sigma_{s,i}(i, j) \frac{(F_{i,j} - F_{i-1,j})}{h_x}}{h_x} + \\ &+ \frac{\sigma_{s,j}(i, j+1) \frac{(F_{i,j+1} - F_{i,j})}{h_y} - \sigma_{s,j}(i, j) \frac{(F_{i,j} - F_{i,j-1})}{h_y}}{h_y}. \end{aligned}$$

Подобная аппроксимация рассматривается в книге [4], где рекомендовано сеточные функции $\sigma_{s,i}(i+1, j), \sigma_{s,i}(i, j), \sigma_{s,j}(i, j+1), \sigma_{s,j}(i, j)$ вычислять по следующим усредненным формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{s,i}(i+1, j) &= \frac{k_s(i+1, j) + k_s(i, j)}{2}, \\ \sigma_{s,i}(i, j) &= \frac{k_s(i, j) + k_s(i-1, j)}{2}, \\ \sigma_{s,j}(i, j+1) &= \frac{k_s(i, j+1) + k_s(i, j)}{2}, \\ \sigma_{s,j}(i, j) &= \frac{k_s(i, j) + k_s(i, j-1)}{2}. \end{aligned}$$

Далее обсудим аппроксимацию наших уравнений (1) по временной переменной t , где $0 < t < T_{\max}$. Максимальное время вычислений T_{\max} задается. Шаг по времени $\tau = \frac{T_{\max}}{N_\tau}$, т.е. ре-

шение должно быть рассчитано на N_τ временных слоях.

Альтернатива этому – задание временного шага τ и, соответственно, максимального числа временных слоев N_τ , на которых будет рассчитываться решение поставленной задачи.

Так как для численного решения использовалась явная (по времени) разностная схема типа «предиктор-корректор» [4], то шаг по времени τ надо выбирать достаточно «мелким». Можно рассчитывать, что подобная численная схема будет иметь порядок аппроксимации i , следовательно, точность порядка $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Схема типа «предиктор-корректор» для численного решения двумерной системы

Пусть индекс $k = 0$ соответствует «нулевому» временному слою ($t_0 = 0$), на котором заданы начальные условия нашей задачи вида:

$$U_{ij}^{(k=0)} = U_0(x_i, y_j), V_{ij}^{(k=0)} = V_0(x_i, y_j), i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y. \quad (3')$$

Обозначим как

$$\bar{U}_{ij}^{(k+1/2)} = U(t_{k+1/2}, x_i, y_j), \bar{V}_{ij}^{(k+1/2)} = V(t_{k+1/2}, x_i, y_j), i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y.$$

Промежуточные разностные функции $\bar{U}_{ij}^{(k+1/2)}, \bar{V}_{ij}^{(k+1/2)}$ на промежуточном временном слое $t_{k+1/2} = t_k + 0,5\tau$ будут вычислять-

ся во внутренних узлах $P_{i,j}$ по следующей схеме («предиктор»):

$$\frac{\bar{U}_{ij}^{(k+1/2)} - U_{ij}^{(k)}}{0,5\tau} = \Omega_1[U_{ij}^{(k)}, V_{ij}^{(k)}] + \mu_1 \Lambda_1^{(h)}[U_{ij}^{(k)}],$$

$$\frac{\bar{V}_{ij}^{(k+1/2)} - V_{ij}^{(k)}}{0,5\tau} = \Omega_2[V_{ij}^{(k)}, U_{ij}^{(k)}] + \mu_2 \Lambda_2^{(h)}[V_{ij}^{(k)}].$$

Таким образом, вначале во всех внутренних узлах $P_{i,j}$ рассчитываются промежуточные функции на полуцелом временном слое $t_{k+1/2} = t_k + 0,5\tau$ по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij}^{(k+1/2)} &= U_{ij}^{(k)} + 0,5\tau \left(\Omega_1[U_{ij}^{(k)}, V_{ij}^{(k)}] + \mu_1 \Lambda_1^{(h)}[U_{ij}^{(k)}] \right), \\ \bar{V}_{ij}^{(k+1/2)} &= V_{ij}^{(k)} + 0,5\tau \left(\Omega_2[V_{ij}^{(k)}, U_{ij}^{(k)}] + \mu_2 \Lambda_2^{(h)}[V_{ij}^{(k)}] \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее уже по известной схеме («корректор») осуществляется пересчет решения со слоя $(k) \rightarrow (k+1)$ также во всех внутренних узлах $P_{i,j}$:



$$\frac{U_{ij}^{(k+1)} - U_{ij}^{(k)}}{\tau} = \Omega_1[\bar{U}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}, \bar{V}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}] + \mu_1 \Lambda_1^{(h)}[\bar{U}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}],$$

$$\frac{V_{ij}^{(k+1)} - V_{ij}^{(k)}}{\tau} = \Omega_2[\bar{V}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}, \bar{U}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}] + \mu_2 \Lambda_2^{(h)}[\bar{V}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}],$$

т.е. на этом этапе расчет («корректор») осуществляется по формулам:

$$U_{ij}^{(k+1)} = U_{ij}^{(k)} + \tau \left(\Omega_1[\bar{U}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}, \bar{V}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}] + \mu_1 \Lambda_1^{(h)}[\bar{U}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}] \right),$$

$$V_{ij}^{(k+1)} = V_{ij}^{(k)} + \tau \left(\Omega_2[\bar{V}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}, \bar{U}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}] + \mu_2 \Lambda_2^{(h)}[\bar{V}_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}] \right). \quad (5)$$

Как было отмечено ранее, при использовании подобной схемы можно рассчитывать, что порядок аппроксимации в целом и, как следствие, ее точность будут порядка $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$. Приведенные вычислительные формулы (4) - (5) «работают» только во внутренних узлах $P_{i,j}$ разностной сетки, а в граничных узлах $P_{i,j}$ необходимо аппроксимировать граничные условия вида (2).

Результаты

В ходе численного решения задачи и последующей программной реализации удалось получить качественные результаты для определенных частных случаев. Рассматривалась сетка 100×100 точек с 10000 временными шагами. На графиках, представленных в виде карты, в каждой точке для отображения выбиралась та функция, характеризующая численность населения, значение которой больше. Изначально делалось предположение, что группы занимают две круговые области с равной численностью населения. Коэффициенты взаимодействия выбирались, как степенные функции, в соответствии с представленными выше рассуждениями:

$$k_1(U, V) = k_2(U, V) = e^{UV}.$$

Таким образом, были получены следующие графики для результатов:

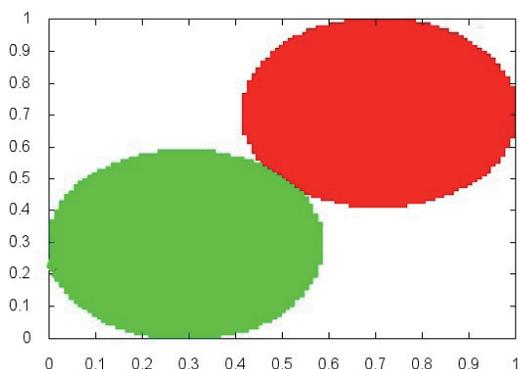


Рис. 1а. («нулевой» шаг по времени)
Fig. 1а. ("zero" time step)

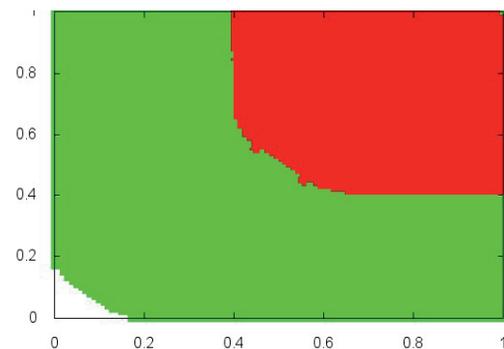


Рис. 1б. (25-й шаг по времени)
Fig. 1б. (25th time step)

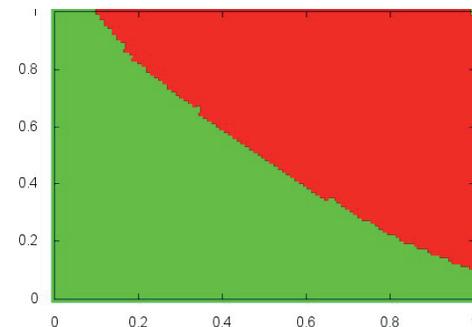


Рис. 1в. (50-й шаг по времени)
Fig. 1в. (50th time step)

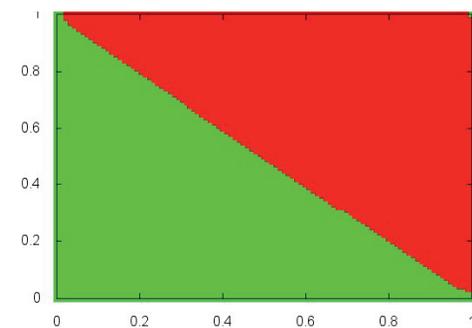


Рис. 1г. (5000-й шаг по времени)
Fig. 1г. (5000th time step)

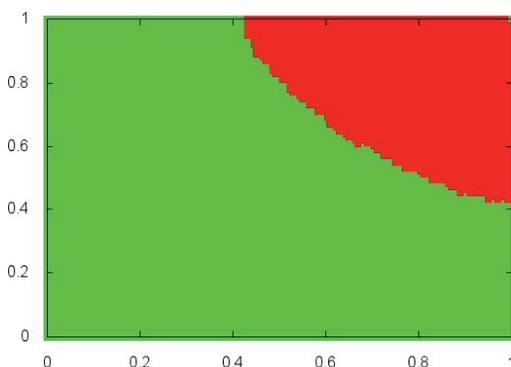


Рис. 1д. (10000-й шаг по времени)
Fig. 1д. (10000th time step)



Отображается эволюция взаимодействия двух групп. В данном случае имеет место жесткая сегрегация двух групп на выделенной территории. Отметим, что в течение первых тридцати шагов группы занимают все выделенное пространство.

С некоторого временного шага наблюдается медленное вытеснение одной группы другой, и, в итоге, на последнем шаге получаем следующую картину: Отдельный интерес для понимания результатов моделирования представляет собой изучение трехмерной картины визуализации, на которой наглядно видны непосредственные значения численности каждой группы в каждой точке городского пространства:

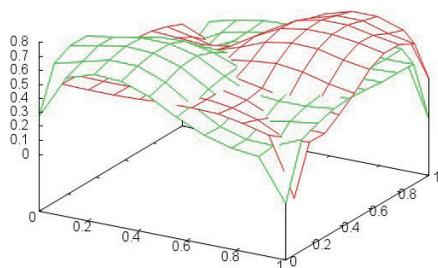


Рис. 2а. (100-й шаг по времени)

Fig. 2a. (100th time step)

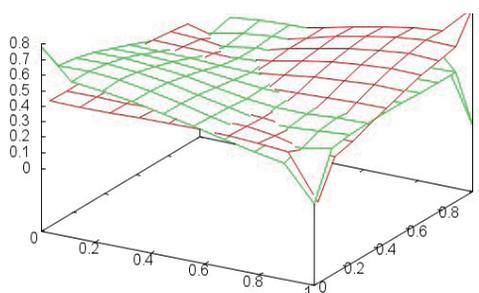


Рис. 2б. (1000-й шаг по времени)

Fig. 2б. (1000th time step)

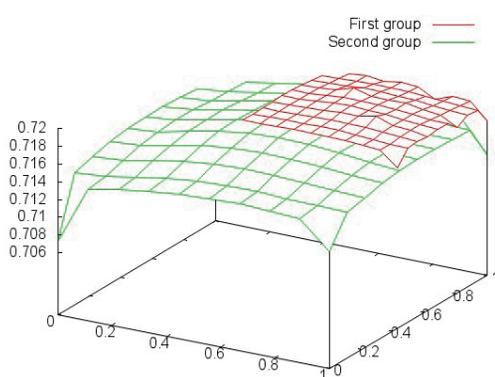


Рис. 2в. (10000-й шаг по времени)

Fig. 2в. (10000th time step)

Аналогично можем увидеть, как первая группа вытесняет вторую на некоторое подобие острова. Важно отметить, что в случае, если две группы настроены дружелюбно по отношению друг к другу и способны к ассимиляции, отображение резуль-

тата их взаимодействия на карте будет строиться по отличиям от выбранных принципов.

Заключение

Впервые предложена и исследована двумерная модель временной динамики расселения двух групп населения в городской среде. Найдены условия, при которых одна группа населения вытесняет другую. Модель позволяет на качественном уровне исследовать тенденции заселения различными группами городской среды.

Список использованных источников

- [1] Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2004. 32 с. URL: http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/d62a30c8-a780-11dc-945c-d34917fee0be/09_arnold-models.pdf (дата обращения: 20.10.2018).
- [2] Beckmann M., Puu T. Spatial Economics: Density, Potential, and Flow. Amsterdam: North-Holland, 1985. 320 p.
- [3] Zhang W.-B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Springer series in Synergetics. Vol. 53. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991. 246 p. DOI: 10.1007/978-3-642-75909-3
- [4] Samarskii A.A. The Theory of Difference Schemes. CRC Press, 2001. 786 p.
- [5] Purvis B., Mao Y., Robinson D. Entropy and its Application to Urban Systems // Entropy. 2019. Vol. 21, Issue 1. Article 56. DOI: 10.3390/e21010056
- [6] Guichard F., Gouhier T.C. Non-equilibrium spatial dynamics of ecosystems // Mathematical Biosciences. 2014. Vol. 255. Pp. 1-10. DOI: 10.1016/j.mbs.2014.06.013
- [7] Tekwa E.W., Gonzalez A., Loreau M. Spatial evolutionary dynamics produce a negative cooperation–population size relationship // Theoretical Population Biology. 2019. Vol. 125. Pp. 94-101. DOI: 10.1016/j.tpb.2018.12.003
- [8] Wang B., Zhang Z. Dynamics of a diffusive competition model in spatially heterogeneous environment // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 470, Issue 1. Pp. 169-185. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.09.062
- [9] Drawert B., Jacob B., Li Z., Yi T.-M., Petzold L. A hybrid smoothed dissipative particle dynamics (SDPD) spatial stochastic simulation algorithm (sSSA) for advection–diffusion–reaction problems // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. Pp. 1-17. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.043
- [10] Badillo-Hernandez U., Alvarez J., Alvarez-Icaza L. Efficient modeling of the nonlinear dynamics of tubular heterogeneous reactors // Computers & Chemical Engineering. 2019. Vol. 123. Pp. 389-406. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2019.01.018
- [11] Xu G., Jiao L., Liu J., Shi Z., Zeng C., Liu Y. Understanding urban expansion combining macro patterns and micro dynamics in three Southeast Asian megacities // Science of The Total Environment. 2019. Vol. 660. Pp. 375-383. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2019.01.039
- [12] Papachristos G. System dynamics modelling and simulation for sociotechnical transitions research // Environmental Innovation and Societal Transitions. 2018. DOI: 10.1016/j.



- eist.2018.10.001
- [13] *Hu L., Wilhelmi O.V., Uejio C.* Assessment of heat exposure in cities: Combining the dynamics of temperature and population // *Science of The Total Environment*. 2019. Vol. 655. Pp. 1-12. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2018.11.028
- [14] *Chen Y.* Urban chaos and replacement dynamics in nature and society // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2014. Vol. 413. Pp. 373-384. DOI: 10.1016/j.physa.2014.06.060
- [15] *Zhang L., Zhang M., Yao Y.* Mapping seasonal impervious surface dynamics in Wuhan urban agglomeration, China from 2000 to 2016 // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2018. Vol. 70. Pp. 51-61. DOI: 10.1016/j.jag.2018.04.005
- [16] *Saeedi S.* Integrating macro and micro scale approaches in the agent-based modeling of residential dynamics // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2018. Vol. 68. Pp. 214-229. DOI: 10.1016/j.jag.2018.02.012
- [17] *Li X., Zhou Y., Asrar G.R., Meng L.* Characterizing spatiotemporal dynamics in phenology of urban ecosystems based on Landsat data // *Science of The Total Environment*. 2017. Vol. 605-606. Pp. 721-734. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2017.06.245
- [18] *Huffaker R., Canavari M., Muñoz-Carpena R.* Distinguishing between endogenous and exogenous price volatility in food security assessment: An empirical nonlinear dynamics approach // *Agricultural Systems*. 2018. Vol. 160. Pp. 98-109. DOI: 10.1016/j.agsy.2016.09.019
- [19] *Basile R., Durbán M., Mínguez R., Montero J.M., Mur J.* Modeling regional economic dynamics: Spatial dependence, spatial heterogeneity and nonlinearities // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2014. Vol. 48. Pp. 229-245. DOI: 10.1016/j.jedc.2014.06.011
- [20] *Fu Y., Li J., Weng Q., Zheng Q., Li L., Dai S., Guo B.* Characterizing the spatial pattern of annual urban growth by using time series Landsat imagery // *Science of The Total Environment*. 2019. Vol. 666. Pp. 274-284. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2019.02.178
- [21] *Fan C., Myint S.W., Rey S.J., Li W.* Time series evaluation of landscape dynamics using annual Landsat imagery and spatial statistical modeling: Evidence from the Phoenix metropolitan region // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2017. Vol. 58. Pp. 12-25. DOI: 10.1016/j.jag.2017.01.009
- [22] *Haddad J.* Optimal perimeter control synthesis for two urban regions with aggregate boundary queue dynamics // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2017. Vol. 96. Pp. 1-25. DOI: 10.1016/j.trb.2016.10.016
- [23] *Tian Y., Yao X., Chen L.* Analysis of spatial and seasonal distributions of air pollutants by incorporating urban morphological characteristics // *Computers, Environment and Urban Systems*. 2019. Vol. 75. Pp. 35-48. DOI: 10.1016/j.compenvurbsys.2019.01.003
- [24] *Shen L., van Gorder R.A.* Predator-prey-subsidy population dynamics on stepping-stone domains // *Journal of Theoretical Biology*. 2017. Vol. 420. Pp. 241-258. DOI: 10.1016/j.jtbi.2017.03.013
- [25] *Gao Z., Kii M., Nonomura A., Nakamura K.* Urban expansion using remote-sensing data and a monocentric urban model // *Computers, Environment and Urban Systems*. 2017. DOI: 10.1016/j.compenvurbsys.2017.05.002
- [26] *Chu J.* Monotone solutions of a nonlinear differential equation for geophysical fluid flows // *Nonlinear Analysis*. 2018. Vol. 166. Pp. 144-153. DOI: 10.1016/j.na.2017.10.010
- [27] *Li W., Li C.* Second-order explicit difference schemes for the space fractional advection diffusion equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 257. Pp. 446-457. DOI: 10.1016/j.amc.2014.11.030
- [28] *Martín-Vaquero J., Sajavičius S.* The two-level finite difference schemes for the heat equation with nonlocal initial condition // *Applied Mathematics and Computation*. 2019. Vol. 342. Pp. 166-177. DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.025
- [29] *Parsaee M., Joybari M.M., Mirzaei P.A., Haghighat F.* Urban heat island, urban climate maps and urban development policies and action plans // *Environmental Technology & Innovation*. 2019. Vol. 14. Article 100341. DOI: 10.1016/j.eti.2019.100341
- [30] *Lv Y., Wang W.* Diffusion approximation for nonlinear evolutionary equations with large interaction and fast boundary fluctuation // *Journal of Differential Equations*. 2019. Vol. 266, Issue 6. Pp. 3310-3327. DOI: 10.1016/j.jde.2018.09.001

Поступила 25.10.2018; принята к публикации 15.01.2019;
опубликована онлайн 19.04.2019.

Об авторе:

Киселёв Дмитрий Олегович, аспирант, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5981-9051>, dmi3iii@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Arnold V.I. "Hard" and "Soft" Mathematical Models. Moscow: MCCME, 2004. 32 p. (In Russ.)
- [2] Beckmann M., Puu T. *Spatial Economics: Density, Potential, and Flow*. Amsterdam: North-Holland, 1985. 320 p. (In Eng.)
- [3] Zhang W.-B. *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*. Springer series in Synergetics. Vol. 53. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991. 246 p. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-642-75909-3
- [4] Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. CRC Press, 2001. 786 p. (In Eng.)
- [5] Purvis B., Mao Y., Robinson D. Entropy and its Application to Urban Systems. *Entropy*. 2019; 21(1):56. (In Eng.) DOI: 10.3390/e21010056
- [6] Guichard F., Gouhier T.C. Non-equilibrium spatial dynamics of ecosystems. *Mathematical Biosciences*. 2014; 255:1-10. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.mbs.2014.06.013
- [7] Tekwa E.W., Gonzalez A., Loreau M. Spatial evolutionary dynamics produce a negative cooperation-population size relationship. *Theoretical Population Biology*. 2019; 125:94-101. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.tpb.2018.12.003



- [8] Wang B., Zhang Z. Dynamics of a diffusive competition model in spatially heterogeneous environment. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019; 470(1):169-185. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.09.062
- [9] Drawert B., Jacob B., Li Z., Yi T.-M., Petzold L. A hybrid smoothed dissipative particle dynamics (SDPD) spatial stochastic simulation algorithm (sSSA) for advection-diffusion-reaction problems. *Journal of Computational Physics*. 2019; 378:1-17. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.043
- [10] Badillo-Hernandez U., Alvarez J., Alvarez-Icaza L. Efficient modeling of the nonlinear dynamics of tubular heterogeneous reactors. *Computers & Chemical Engineering*. 2019; 123:389-406. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.compchemeng.2019.01.018
- [11] Xu G., Jiao L., Liu J., Shi Z., Zeng C., Liu Y. Understanding urban expansion combining macro patterns and micro dynamics in three Southeast Asian megacities. *Science of The Total Environment*. 2019; 660:375-383. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.scitotenv.2019.01.039
- [12] Papachristos G. System dynamics modelling and simulation for sociotechnical transitions research. *Environmental Innovation and Societal Transitions*. 2018. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.eist.2018.10.001
- [13] Hu L., Wilhelmi O.V., Uejio C. Assessment of heat exposure in cities: Combining the dynamics of temperature and population. *Science of The Total Environment*. 2019; 655:1-12. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.scitotenv.2018.11.028
- [14] Chen Y. Urban chaos and replacement dynamics in nature and society. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2014; 413:373-384. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.physa.2014.06.060
- [15] Zhang L., Zhang M., Yao Y. Mapping seasonal impervious surface dynamics in Wuhan urban agglomeration, China from 2000 to 2016. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2018; 70:51-61. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jag.2018.04.005
- [16] Saeedi S. Integrating macro and micro scale approaches in the agent-based modeling of residential dynamics. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2018; 68:214-229. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jag.2018.02.012
- [17] Li X., Zhou Y., Asrar G.R., Meng L. Characterizing spatiotemporal dynamics in phenology of urban ecosystems based on Landsat data. *Science of The Total Environment*. 2017; 605-606:721-734. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.scitotenv.2017.06.245
- [18] Huffaker R., Canavari M., Muñoz-Carpena R. Distinguishing between endogenous and exogenous price volatility in food security assessment: An empirical nonlinear dynamics approach. *Agricultural Systems*. 2018; 160:98-109. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.agsy.2016.09.019
- [19] Basile R., Durbán M., Mínguez R., Montero J.M., Mur J. Modeling regional economic dynamics: Spatial dependence, spatial heterogeneity and nonlinearities. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2014; 48:229-245. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jedc.2014.06.011
- [20] Fu Y., Li J., Weng Q., Zheng Q., Li L., Dai S., Guo B. Characterizing the spatial pattern of annual urban growth by using time series Landsat imagery. *Science of The Total Environment*. 2019; 666:274-284. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.scitotenv.2019.02.178
- [21] Fan C., Myint S.W., Rey S.J., Li W. Time series evaluation of landscape dynamics using annual Landsat imagery and spatial statistical modeling: Evidence from the Phoenix metropolitan region. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2017; 58:12-25. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jag.2017.01.009
- [22] Haddad J. Optimal perimeter control synthesis for two urban regions with aggregate boundary queue dynamics. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2017; 96:1-25. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.trb.2016.10.016
- [23] Tian Y., Yao X., Chen L. Analysis of spatial and seasonal distributions of air pollutants by incorporating urban morphological characteristics. *Computers, Environment and Urban Systems*. 2019; 75:35-48. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.compenvurbsys.2019.01.003
- [24] Shen L., van Gorder R.A. Predator-prey-subsidy population dynamics on stepping-stone domains. *Journal of Theoretical Biology*. 2017; 420:241-258. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jtbi.2017.03.013
- [25] Gao Z., Kii M., Nonomura A., Nakamura K. Urban expansion using remote-sensing data and a monocentric urban model. *Computers, Environment and Urban Systems*. 2017. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.compenvurbsys.2017.05.002
- [26] Chu J. Monotone solutions of a nonlinear differential equation for geophysical fluid flows. *Nonlinear Analysis*. 2018; 166:144-153. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.na.2017.10.010
- [27] Li W., Li C. Second-order explicit difference schemes for the space fractional advection diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2015; 257:446-457. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.amc.2014.11.030
- [28] Martín-Vaquero J., Sajavičius S. The two-level finite difference schemes for the heat equation with nonlocal initial condition. *Applied Mathematics and Computation*. 2019; 342:166-177. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.025
- [29] Parsaee M., Joybari M.M., Mirzaei P.A., Haghight F. Urban heat island, urban climate maps and urban development policies and action plans. *Environmental Technology & Innovation*. 2019; 14:100341. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.eti.2019.100341
- [30] Lv Y., Wang W. Diffusion approximation for nonlinear evolutionary equations with large interaction and fast boundary fluctuation. *Journal of Differential Equations*. 2019; 266(6):3310-3327. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jde.2018.09.001

Submitted 25.10.2018; revised 15.01.2019; published online 19.04.2019.

About the author:

Dmitry O. Kiselyov, Postgraduate student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1, Leninskie gory, Moscow 119991, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5981-9051>, dmi3iii@yandex.ru

The author has read and approved the final manuscript.

