УДК 621
DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.232-241

Развитие моментно-семиинвариантного программного обеспечения стохастического анализа

Т. Д. Конашенкова
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия
tkonashenkova64@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена описанию методических основ и результатов сравнительного тестирования научного программного обеспечения стохастического анализа многомерных нелинейных стохастических систем (СтС), описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, разработанного на основе модифицированного моментно-семиинвариантного метода (M^2 СМ) и ортогонального разложения неизвестной одномерной плотности вектора состояния системы по биортогональной системе полиномов. Получены точные дифференциальные уравнения для компонент вектора математического ожидания, ковариационной матрицы и старших начальных моментов вектора состояния нелинейной СтС, описываемой стохастическим дифференциальным уравнением Ито, содержащим коэффициенты неполиномиального вида (непрерывные или имеющие точки разрыва первого рода) и векторный случайный процесс с независимыми приращениями. Программное обеспечение (ПО) «СтС-Анализ-M^2 СМ» содержит разработанные автором модули, позволяющие частично автоматизировать действия по составлению замкнутой системы дифференциальных уравнений для параметров вектора состояния нелинейной СтС. ПО «СтС-Анализ-M^2 СМ» разработано на языке Python и совместимо с новыми отечественными процессорами и высокопроизводительными платформами. Проверка работоспособности ПО «СтС-Анализ-M^2 СМ» осуществлялась на примерах нелинейных СтС, имеющих точные решения. Результаты сравнивались с методом нормальной аппроксимации (МНА) и методом эллипсоидальной аппроксимации (МЭА). M^2 СМ дает высокую точность (менее 2%) определения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния СтС, удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент математического ожидания, ковариационной матрицы и вероятностных старших начальных моментов, входящих в правые части точных незамкнутых уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы. ПО «СтС-Анализ-M^2 СМ» может применяться в научных исследованиях; для обучения в системе высшего образования на курсах «Случайные процессы», «Теория стохастических дифференциальных систем» и т.д.; в управлении техническими, организационно-экономическими, экологическими и другими системами.

Ключевые слова: стохастический процесс (СтП), стохастический анализ, стохастическая система (СтС), стохастическое дифференциальное уравнение, математическое ожидание, ковариационная матрица, вероятностный момент, модифицированный моментно-семиинвариантный метод (M^2 СМ).

Благодарности: автор выражает благодарность и глубокую признательность доктору технических наук, профессору, главному научному сотруднику Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук Игорю Николаевичу Синицыну за постановку задачи и обсуждение результатов.

Для цитирования: *Конашенкова Т. Д.* Развитие моментно-семиинвариантного программного обеспечения стохастического анализа // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 1. С. 232-241. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.232-241

Development of Moment-Semiinvariant Software for Stochastic Analysis

T. D. Konashenkova
Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
tkonashenkova64@mail.ru

Abstract

The article describes the methodological foundations and the results of comparative testing of scientific software for stochastic analysis of multidimensional nonlinear stochastic systems (StS) described by stochastic differential equations, developed on the basis of the modified moment-semi-invariant method (M^2SM) and orthogonal factorization of the unknown one-dimensional density of the system state vector by the bi-orthogonal system of polynomials. We have obtained exact differential equations for the components of the expectation vector, the covariance matrix, and the higher initial moments of the state vector of the nonlinear StS, described by the Ito stochastic differential equation containing non-polynomial coefficients (continuous or having first-kind discontinuous points) and a vector random process with independent increments. Software "StS-Analysis-M^2SM" contains the modules developed by the author, which allow you to partially automate actions to compile a closed-loop system of differential equations for parameters of the state vector of a nonlinear StS. Software "StS-Analysis-M^2SM" is developed in the Python language and is compatible with new domestic processors and high-performance platforms.

Verification of the performance of the software "StS-Analysis-M^2SM" was carried out using examples of non-linear StS that have exact solutions. The results were compared with the normal approximation method (NAM) and the ellipsoidal approximation method (EAM). M^2SM gives a high accuracy (less than 2%) of determining the expectation function and the covariance matrix of the state vector of the StS, complying with the system of ordinary differential equations for the expectation function components, the covariance matrix and probabilistic higher initial moments included in the right-hand parts of the exact open equations for the expectation and covariance matrix. Software "StS-Analysis-M^2SM" can be applied in scientific research; for training in higher education in the courses "Random Processes", "Theory of Stochastic Differential Systems", etc.; in the management of technical, organizational and economical, environmental and other systems.

Keywords: Stochastic process, stochastic analysis, stochastic system, stochastic differential equation, mathematical expectation, covariance matrix, probability moment, modified moment-semiinvariant method (M^2 SIM).

Acknowledgements: The author is deeply grateful to Igor N. Sinitsyn, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Federal Research Center "Informatics and Management" of the Russian Academy of Sciences for the problem statement and discussion of the results.

For citation: Konashenkova T.D. Development of Moment-Semiinvariant Software for Stochastic Analysis. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(1):232-241. DOI: 10.25559/SITITO.15.201901.232-241

Введение

Для описания математических моделей сложных систем (технических, организационно-экономических, экологических и т.д.) в условиях случайных возмущений широкое применение нашли стохастические дифференциальные системы (СДС) [1-13]. Решение задачи стохастического анализа СДС имеет точное решение только для линейных и очень узкого класса нелинейных СтС, поэтому актуальна проблема разработки приближенных методов анализа СДС. Для исследования тонких стохастических эффектов, связанных с выбросами стохастических процессов, оценки предельных возможностей, допущения о нормальности распределения приводят к существенным качественным и количественным погрешностям. В настоящее время для моделирования процессов сложных СДС применяют как прямые вычислительные методы, лежащие в основе методов статистического моделирования, так и методы интерполяционного аналитического моделирования и методы параметризации распределений.

В работах [1,14,15] создано методическое обеспечение и на его основе разработано инструментальное программное обеспечение «СтС-Анализ» на базе сред MATLAB и Microsoft Visual Studio для решения задачи стохастического анализа многомерных стохастических дифференциальных систем следующих типов:

- стационарные и нестационарные линейные СДС;
- линейные СДС со случайными параметрами;
- линейные СДС с параметрическими шумами;
- нелинейные СДС с полиномиальными коэффициентами.

Программное обеспечение «СтС-Анализ» и его расширенные версии [16-24] получили широкое распространение в науке и промышленности.

В настоящее время в РФ в рамках программы импортозамещения ведутся научные работы по созданию отечественных процессоров и высокопроизводительных систем на их основе. С учетом особенностей отечественных вычислительных систем перенос в их среду пакета MATLAB невозможен в принципе, но успешно переносится открытое ПО с распространяемыми исходными кодами [25]. В связи с этим появилась необходимость разработки ПО стохастического анализа на базе открытого ПО с возможностью развертывания его на новых отечественных процессорах и высокопроизводительных платформах.

В работе рассматривается методическое и инструментальное программное обеспечение стохастического анализа многомерных нелинейных СтС на основе M^2 СМ и ортогонального разложения неизвестной одномерной плотности вектора состояния системы по биортогональной системе полиномов.

Методическое обеспечение стохастического анализа

Пусть вектор состояния Y нелинейной СтС описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$dY = a\left(Y,t\right)+b\left(Y,t\right)dW, t \ge t_0, Y\left(t_0\right)=Y_0, \quad (1)$$

где Y=Y(t)ϵR^p стохастический процесс (СтП), Y_0 – случайный вектор с известным распределением; W(t)ϵR^n; $W_1\left(t\right),\dots,W_{n(t)}$ – независимые между собой процессы с независимыми приращениями; $a\left(y,t\right)$, $b\left(y,t\right)$ –непрерывные или имеющие точки разрыва первого рода известные функции y и t размерности px1 и pxn соответственно. Y_0 не зависит от приращений W(t_2)-W(t_1) при $t_0 \le t_1 < t_2$. Известна одномерная характеристическая функция $h_1\left(\mu;t\right)$ процесса W(t).

Решение задачи стохастического анализа СтС (1) имеет точное решение только для линейных и очень узкого класса нелинейных СтС. Известны многие методы приближенного анализа сложных СтС, основанные на параметризации неизвестных распределений (характеристических функций или плотностей вероятности) вектора состояния системы [1]. Выбор метода зависит от класса СтС, а также постановки задачи, например, требуется определить вероятность попадания случайного вектора системы в заданную область или вероятностные моменты случайного вектора системы. В Институте проблем информатике РАН было разработано инструментальное программное обеспечение «СтС-Анализ» на базе сред MATLAB и Microsoft Visual Studio для решения задачи анализа многомерных СДС: стационарных и нестационарных линейных СДС, линейных СДС со случайными параметрами, линейных СДС с параметрическими шумами, нелинейных СДС с полиномиальными коэффициентами.

Для сложных СтС, описываемых многомерными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, рассматривается задача стохастического анализа путем определения вероятностных моментов первого и второго порядков и некоторого набора старших начальных моментов. Такая постановка задачи стохастического анализа возникает, например, в следующих случаях:

- для более точного определения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния системы необходимо вычислить старшие моменты, входящие в правые части точных незамкнутых уравнений для этих параметров;
- для определения одномерных распределений отдельных компонент вектора состояния;
- в задачах анализа точности, когда требуется вычислить функции, зависящие от определенного набора старших моментов вектора состояния;
- в задачах анализа устойчивости и чувствительности, когда необходимо вычислить функционалы от моментов вектора состояния.

Для решения этой задачи предлагается использовать модифицированный моментно-семиинвариантный метод.

Как известно [1], приближенные методы параметризации неизвестных распределений вектора состояния СтС (1) основаны на аппроксимации неизвестных характеристической функции или плотности вероятности известными функциями, зависящими от конечного числа неизвестных параметров (моментов, семиинвариантов, квазимоментов и т.д.), что позволяет свести решение задачи анализа к нахождению этих параметров, удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений. Эти методы дают высокую точность решения задачи, но требуют составления и решения большого количества уравнений для параметров, особенно в случае большой размерности вектора состояния стохастической системы. Зависимость числа уравнений $Q_1\left(p,N\right)$ для параметров распределений от размерности p вектора состояния и наивысшего порядка учитываемых параметров N вычисляется по формуле $Q_1\left(p,N\right)=C_{N+p}^{p}-1$.

Так, например, при анализе 10-мерной стохастической системы количество уравнений для моментов вектора состояния системы $Q_1(10,4)=1000$, если учитываются моменты до 4-го порядка.

Модифицированный моментно-семиинвариантный метод требует значительно меньшего объема вычислений. Идея метода была впервые изложена в [14] и состоит в составлении уравнений для математического ожидания, ковариационной матрицы и определенного набора старших моментов вектора состояния системы. При этом семиинварианты, не соответствующие этому набору старших моментов, полагаются равными нулю. Этот подход к замыканию системы для моментов дает лучшие результаты по сравнению с другими приближенными методами, например, с методом моментов, в котором обнуляются старшие моменты, порядок которых больше некоторого заданного натурального числа. Семиинварианты убывают с увеличением порядка в отличие от моментов, которые растут. Проверка работоспособности М[2] СМ на конкретных примерах СтС с полиномиальными нелинейностями показала его высокую эффективность [1,14,15]: метод незначительно уступает в точности полным методам стохастического анализа, например, моментно-семиинвариантному методу, и при этом количество уравнений для параметров распределений равно $Q_2(p,N)=p+\frac{1}{2}p(p+1)+p(N-2)$. Так, при p=10 и N=4 имеем $Q_2(10,4)$=85.

Основываясь на [1], для получения уравнений для начальных моментов

$\alpha_r=\alpha_{r_1,r_2,\dots,r_p}=M[Y_1^{r_1}Y_2^{r_2}\dots Y_p^{r_p}]$

$(r=[r_1,r_2,\dots,r_p]^B\ |r|=r_1+r_2+\dots+r_p;r_1,r_2,\dots,r_p=0,1,\dots)$ стохастического процесса Y(t) воспользуемся формулой связи момента α_r и характеристической функции (х.ф.) $g_1(\lambda;t)$:

$$\alpha_r=\alpha_{r_1,r_2,\dots,r_p}=\left[\frac{\partial^{|r|}g_1(\lambda;t)}{\partial(\lambda i_1)^{r_1}\dots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right]_{\lambda=0} \tag{2}$$

Уравнение для одномерной х.ф. $g_1(\lambda;t)$ СтП Y(t), заданного уравнением (1), имеет вид [3]:

$$\frac{\partial g_1(\lambda,t)}{\partial t}=M\left\{\left[i\lambda^Ta(Y,t)+(\lambda;Y,t)\right]e^{i\lambda^TY}\right\},g_1(\lambda,t_0)=g_0(\lambda),t\ge t_0, \tag{3}$$

где $g_0(\lambda)$ – известная х.ф. $Y_0,\lambda,=[\lambda_1,\dots,\lambda_p]^T$. Функция x определяется формулой $x(\mu;t)=\frac{\partial}{\partial t}lnh_1(\mu;t)$, после подстановки вместо μ выражения $b(Y,t)^T\lambda$ имеем

$$(\lambda;Y,t)=\chi\left(b(Y,t)^T\lambda;t\right) \tag{4}$$

Применим формулу (2) к уравнению (3):

$$\dot{\alpha}_r=M\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(iK_1)^{r_1}\dots\partial(iK_p)^{r_p}}\left[i\lambda^Ta(Y,t)+\chi(\lambda;Y,t)\right]e^{i\lambda^TY}\right\}_{\lambda=0,} \tag{5}$$

$$\lambda_r(t_0)=M\left[Y_1(t_0)^{r_1}\dots Y_p(t_0)^{r_p}\right],t>t_0.$$

Дифференцируя уравнения (5) r_1 раз по $i\lambda_1$, r_2 раз по $i\lambda_2$, ..., r_p раз по $i\lambda_p$ и положив после этого λ=0, получим

$$\dot{\alpha}_r=M\{\sum_{k=1}^{p}r_ka_k(Y,t)Y_1^{r_1}\dots Y_k^{r_{k-1}}\dots Y_p^{r_p}+\\+\sum_{h_1=0}^{r_1}\dots\sum_{h_p=0}^{r_p}C_{r_1}^{h_1}\dots C_{r_p}^{h_p}\left[\frac{\partial^{h_1+\dots+h_p}}{\partial(i\lambda_1)^{h_1}\dots\partial(i\lambda_p)^{h_p}}\chi(\lambda;Y,t)\right]_{\lambda=0}Y_1^{r_1-h_1}\dots Y_1^{r_p-h_p}\} \tag{6}$$

Введем обозначение

$$Z_r(Y,t)=\sum_{k=1}^{p}r_ka_k(Y,t)Y_1^{r_1}\dots Y_k^{r_{k-1}}\dots Y_p^{r_p}+\\+\sum_{h_1=0}^{r_1}\dots\sum_{h_p=0}^{r_p}C_{r_1}^{h_1}\dots C_{r_p}^{h_p}\frac{\partial^{h_1+\dots+h_p}}{\partial(i\lambda_1)^{h_1}\dots\partial(i\lambda_p)^{h_p}}\left[\chi(\lambda;Y,t)\right]_{\lambda=0}Y_1^{r_1-h_1}\dots Y_1^{r_p-h_p}$$

Тогда уравнения (6) примут вид $\dot{\alpha}_r=MZ_r(Y,t)$

$$\text{или}\quad \dot{\alpha}_r=\int_{-\infty}^{+\infty}Z_r(y,t)f_1(y,t)dy, \tag{7}$$

где $f_1(y,t)$ – плотность вероятности Y(t).

Для приближенного вычисления интегралов в уравнениях (7) аппроксимируем одномерную плотность вероятности $f_1(y,t)$ конечным отрезком ее ортогонального разложения по биортогональной системе полиномов $\{p_\nu(y),q_\nu(y)\}$ с весом $\omega_1(y)$ [1]:

$$f_1(y,t)\approx\omega_1(y)\left[1+\sum_{\beta=3}^{N}\sum_{|\nu|=\beta}c_\nu p_\nu(y)\right], \tag{8}$$

где $|\nu|=\nu_1+\dots+\nu_p$ для векторного индекса $\nu=[\nu_1,\dots,\nu_p]^T$, $\nu_1,\dots,\nu_p=0,1,\dots,N$; $\omega_1(y)$ – некоторая известная плотность, для которой существуют все моменты, а первый и второй моменты совпадают с соответствующими моментами плотности вероятности $f_1(y,t)$; $c_\nu=Mq_\nu(y)=q_\nu(\alpha)$ - линейная комбинация моментов случайного процесса Y(t), полученная из $q_\nu(y)$ заменой всех одночленов $y_1^{k_1}\dots y_p^{k_p}$ соответствующими моментами $\alpha_{k_1,\dots,k_p}$.

После подстановки (8) в (7) имеем

$$\dot{\alpha}_r=\varphi_{r,0}(m,K,t)+\sum_{\beta=3}^{N}\sum_{|\nu|=\beta}c_\nu\varphi_{r,\nu}(m,K,t),$$

где m=m(t), K=K(t) – математическое ожидание и ковариационная матрица соответственно СтП Y(t),

$$\varphi_{r,0}(m,K,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}Z_r(y,t)\omega_1(y)dy,$$

$$\varphi_{r,\nu}(m,K,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}Z_r(y,t)p_\nu(y)\omega_1(y)dy.$$

Требуется определить m(t), K(t) и некоторые старшие моменты вида $M(Y_{j_1}^{l_1}\dots Y_{j_k}^{l_k})$ (9)

где $j_1,\dots,j_k$ – выборка k различных чисел из J={1,2,...,p}; $l_1,\dots,l_k$ – выборка k чисел из $\mathcal{L}$={1,2,...,N}, удовлетворяющих условию $3\le l_1+\dots+l_k\le N$.

Дифференциальное уравнение для математического ожидания m(t) СтП Y(t), заданного уравнением (1), имеет вид

$$\dot{m}(t)=\varphi_{1,0}(m,K,t)+\sum_{\beta=3}^{N}\sum_{|\nu|=\beta}c_\nu\varphi_{1,\nu}(m,K,t), \tag{10}$$

где $\varphi_{1,0}(m,K,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(y,t)\omega_1(y)dy$,

$$\varphi_{1,\nu}(m,K,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(y,t)p_\nu(y)\omega_1(y)dy.$$

Дифференциальное уравнение ковариационной матрицы K(t) СтП Y(t), заданного уравнением (1), имеет вид

$$\dot{K}(t) = \varphi_{20}^{1}(m,K,t) + \sum_{\beta=3}^{N}\sum_{|\nu|=\beta} c_\nu \varphi_2^1(m,K,t)\ , \tag{11}$$

где $\varphi_{20}^{1}(m,K,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\{a(y,t)(y^T - m^T) + (y-m)a(y,t)^T +,$

$$\chi_1 y^T + y\chi_1^T + yy^T\chi(\lambda;y,t) + \chi_2\}_{\lambda=0}\,\omega_1(y)\,dy$$

$$\varphi_{2\nu}^{1}(m,K,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\{a(y,t)(y^T - m^T) + (y-m)a(y,t)^T +,$$

$$\chi_1 y^T + y\chi_1^T + yy^T\chi(\lambda;y,t) + \chi_2\}_{\lambda=0}\,p_\nu(y)\,\omega_1(y)\,dy$$

функция $\chi(\lambda;y,t)$ имеет вид (4), $\chi_1 = [\frac{\partial\chi(\lambda;y,t)}{\partial(i\lambda_1)};\ldots;\frac{\partial\chi(\lambda;y,t)}{\partial(i\lambda_p)}]^T$, $\chi_2 = [\frac{\partial^2\chi(\lambda;y,t)}{\partial(i\lambda_k)\partial(i\lambda_j)}]_{k,j=1}^{p}$.

Дифференциальные уравнения для набора старших моментов (9) СтП Y(t), заданного уравнением (1), имеют вид

$$\frac{d}{dt}M(Y_{j_1}^{l_1}\ldots Y_{j_k}^{l_k}) = \varphi_{l_1,\ldots,l_k}^{0}(m,K,t) + \sum_{\beta=3}^{N}\sum_{|\nu|=\beta} c_\nu \varphi_{l_1,\ldots,l_k}^{\nu}(m,K,t), \tag{12}$$

где

$$\varphi_{l_1,\ldots,l_k}^{0}(m,K,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{l_1,\ldots,l_k}(y,t)\,\omega_1(y)\,dy$$

$$\varphi_{l_1,\ldots,l_k}^{\nu}(m,K,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{l_1,\ldots,l_k}(y,t)\,p_\nu(y)\,\omega_1(y)\,dy,$$

$$Z_{l_1,\ldots,l_k}(y,t) = \sum_{h=1}^{k} l_h a_{j_h}(y,t)\, y_{j_1}^{l_1}\ldots y_{j_h}^{l_{h-1}}\ldots y_{j_k}^{l_k} +$$

$$+\sum_{h_1=0}^{l_1}\ldots\sum_{h_k=0}^{l_k} C_{h_1}^{l_1}\ldots C_{h_k}^{l_k}\left[\frac{\partial^{h_1+\ldots+h_k}}{\partial(i\lambda_{j_1})^{h_1}\ldots\partial(i\lambda_{j_k})^{h_k}}\chi(\lambda;y,t)\right]_{\lambda=0} y_{j_1}^{l_1-h_1}\ldots y_{j_k}^{l_k-h_k}\ .$$

Начальными условия для уравнений (10), (11), (12) для СтП Y(t), заданного уравнением (1), являются

$$m(t_0) = m_0 = MY(t_0),\ K(t_0) = K_0 = \tag{13}$$

$$= M\big(Y(t_0) - m_0\big)\big(Y(t_0) - m_0\big)^T$$

а также значения начальных моментов $M(Y_{j_1}^{l_1}(t_0)\ldots Y_{j_k}^{l_k}(t_0))$.

Правые части уравнений (10), (11), (12) содержат параметры c_ν , зависящие от старших моментов $M(Y_{j_1}^{d_1}\ldots Y_{j_m}^{d_m})$, отличных от набора (9). Для замыкания системы уравнений надо выразить моменты $M(Y_{j_1}^{d_1}\ldots Y_{j_m}^{d_m})$ через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (9), используя рекуррентные формулы связи моментов и семиинвариантов [1,14,15]:

$$M(Y_{j_1}^{d_1}\ldots Y_{j_m}^{d_m}) = \sum_{h_{1=1}}^{d_1} C_{d_{1-1}}^{h_{1-1}} \sum_{h_2=0}^{d_2} C_{d_2}^{h_2}\ldots \tag{14}$$

$$\ldots\sum_{h_m=0}^{d_m} C_{d_m}^{h_m} s_{j_1,\ldots,j_k}^{h_1,\ldots,h_k} M(Y_{j_1}^{d_1-h_1} Y_{j_2}^{d_2-h_2}\ldots Y_{j_m}^{d_m-h_m})$$

$$s_{j_1,\ldots,j_k}^{h_1,\ldots,h_k} = M(Y_{j_1}^{h_1}\ldots Y_{j_m}^{h}) - [\sum_{l_{1=1}}^{h_1} C_{h_{1-1}}^{l_{1-1}} \sum_{l_2=0}^{h_2} C_{h_2}^{l_2}\ldots \tag{15}$$

$$\ldots\sum_{l_m=0}^{h_m} C_{h_m}^{l_m} s_{j_1,\ldots,j_k}^{l_1,\ldots,l_k} M(Y_{j_1}^{h_1-l_1} Y_{j_2}^{h_2-l_2}\ldots Y_{j_m}^{h_m-l_m})],$$

где в (15) из выражения стоящего в квадратных скобках следует исключить $s_{j_1,\ldots,j_m}^{h_1,\ldots,h_m}$, $s_{j_1,\ldots,j_k}^{h_1,\ldots,h_k}$ – семиинвариант порядка $h_1+\ldots+h_k$ случайного вектора $\left[Y_{j_1},\ldots,Y_{j_k}\right]^T$. При этом все семиинварианты в (14), (15), не соответствующие моментам (9), выражаются через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (9) по формулам (14), (15). Процесс замыкания систем (10), (11), (12) достигается рекуррентным использованием формул связи (14), (15).

Таким образом, в основе методического обеспечения стохастического анализа лежит следующий алгоритм:

1. составление обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11), (12) (где функция $\chi(\lambda;y,t)$ задается формулой (4)) соответственно для математического ожидания m(t), ковариационной матрицы K(t) и набора старших начальных моментов вида (9) случайного процесса Y(t), описываемого стохастическим дифференциальным уравнением Ито (1);
2. замыкание систем (10), (11), (12) путем выражения старших начальных моментов, содержащихся в правых частях уравнений (10), (11), (12) и отличных от старших моментов вида (9), через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (9) по формулам связи моментов и семиинвариантов (14), (15), при этом все старшие семиинварианты, не соответствующие моментам вида (9), полагаются равными нулю;
3. решение замкнутой системы дифференциальных уравнений (10), (11), (12) с начальными условиями (13).

Инструментальное ПО «СтС-Анализ-М² СМ»

В ФИЦ ИУ РАН была исследована и осуществлена возможность реализации на базе открытых программных платформ инструментального ПО для моделирования процессов в организационно-экономических системах ПО «СЭ-Анализ». В качестве базовой платформы был выбран язык Python. Программное обеспечение «СЭ-Анализ» показало высокую эффективность реализации и работы метода нормальной аппроксимации (МНА) на базе открытого ПО с возможностью развертывания подобных программных средств на новых отечественных процессорах и высокопроизводительных платформах [25].

В рамках работ по разработке научного ПО, совместимого с отечественными процессорами и вычислительными системами, автором разработан инструментальный макет ПО «СтС-Анализ-М² СМ», который реализует описанный выше алгоритм и осуществляет:

- ввод исходных данных в матричном и аналитическом виде,
- автоматическое составление замкнутой системы дифференциальных уравнений для искомых параметров;
- численные вычисления с использованием численных библиотек SkiPy и NumPy,
- сохранение полученных результатов в памяти ЭВМ,
- получение результатов в числовом виде.

В отличие от ПО «СТС-Анализ», разработанного для стохастического анализа нелинейных СтС только с полиномиальными коэффициентами, ПО «СтС-Анализ-М² СМ» позволяет вводить коэффициенты любого типа (непрерывные или имеющие точки разрыва первого рода) в виде пользовательских функций-подпрограмм.

Исходные данные для ПО «СтС-Анализ-M² СМ», задаваемые в числовом или матричном виде:

- начальный момент времени t_0;
- конечный момент времени T;
- размерность p случайного процесса Y;
- параметры набора старших моменты вида $M(Y_{j_1}^{l_1}\dots Y_{j_k}^{l_k})$ в виде двух векторов $\left[j_1,\dots,j_k\right]^T$ и $\left[l_1,\dots,l_k\right]^T$;
- начальные значения $m(t_0)=m_0=MY(t_0)$ в виде вектора;
- начальные значения $K(t_0)=K_0=M\left(Y(t_0)-m_0\right)\left(Y(t_0)-m_0\right)^T$ в виде матрицы;
- начальные значения старших моментов $M(Y_{j_1}^{l_1}(t_0)\dots Y_{j_k}^{l_k}(t_0))$ в виде матрицы.

Исходные данные в аналитическом в виде для ПО «СтС-Анализ-M² СМ», задаваемые в виде пользовательских функций-подпрограмм:

- функция $a(y,t)$;
- полиномы p_v (y);
- линейные комбинации $c_v = Mq_v(y)=q_v(\alpha)$ моментов СтП Y(t), полученные из $q_v(y)$ заменой всех одночленов $y_1^{k_1}\dots y_p^{k_p}$ соответствующими моментами $\alpha_{k_1,\dots,k_p}$;
- плотность $\omega_1(y)$;
- функция $\chi(\lambda;y,t)$ при $\lambda=0$;
- вектор функций $\chi_1=[\frac{\partial\chi(\lambda;y,t)}{\partial(i\lambda_1)};\dots;\frac{\partial\chi(\lambda;y,t)}{\partial(i\lambda_p)}]^T$ при $\lambda=0$;
- матрица функций $\chi_2=[\frac{\partial^2\chi(\lambda;y,t)}{\partial(i\lambda_k)\partial(i\lambda_j)}]_{k,j=1}^p$ при $\lambda=0$;
- набор функций $\frac{\partial^{h_1+\dots+h_k}}{\partial(i\lambda_{j_1})^{h_1}\dots\partial(i\lambda_{j_k})^{h_k}}\chi(\lambda;y,t)$ при $\lambda=0$; $(h_1=0,\dots,l_1;\dots;h_k=0,\dots,l_k)$ для вычисления набора старших начальных моментов $M(Y_{j_1}^{l_1}\dots Y_{j_k}^{l_k})$.

В состав ПО «СтС-Анализ-M² СМ» входят программные модули, реализующие процесс составления системы дифференциальных уравнений (10), (11), (12) и ее замыкание путем выражения старших начальных моментов, содержащихся в правых частях уравнений (10), (11), (12) и отличных от старших моментов вида (9), через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (9) по формулам связи моментов и семиинвариантов (14), (15), при этом все старшие семиинварианты, не соответствующие моментам вида (9), полагаются равными нулю.

Результаты выдаются в табличном виде.

Тестовый пример

Проверка работоспособности ПО «СтС-Анализ-M² СМ» осуществлялась на примере дифференциальной двумерной нелинейной СтС, для которой имеется точное решение. Рассматривались различные варианты. Результаты сравнивались с МНА и МЭА [1,3].

Пусть двумерный стохастический процесс Y(t) описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (1)

$$dY_1=-Y_1Y_2dt,\quad dY_2=-\gamma Y_2dt+dW_0,t\ge 0,Y(0)=Y_0, \tag{27}$$

где Y_0 – гауссовский случайный вектор с параметрами

$$m_0=\begin{bmatrix}0,5\\0,5\end{bmatrix},K_0=\begin{bmatrix}0,1&0\\0&0,1\end{bmatrix},$$

W_0 – одномерный стандартный винеровский процесс, $\gamma=5$.

Точное выражение для моментов $\alpha_{k0}(t)=MY_1^k(t)$ имеет вид [3]

$$\alpha_{k0}(t)=\alpha_{k0}(0)\exp\left(\frac{k^2D_\theta(t)}{2}-km_\theta(t)\right).$$

Здесь $m_\theta(t)$ и $D_\theta(t)$– математическое ожидание и дисперсия случайного процесса $\theta(t)=\int_0^t Y_2(\tau)d\tau$, определяемые по формулам

$$m_\theta(t)=\frac{\alpha_{02}(0)\left(1-\exp(-\gamma t)\right)}{\gamma},$$

$$D_\theta(t)=\frac{K_0(2,2)}{2}-\frac{1,5}{\gamma^3}+\frac{t}{\gamma^2}-\frac{K_0(2,2)\exp(-\gamma t)\left(2-\exp(-\gamma t)\right)}{\gamma^2}+$$
$$+\frac{\exp(-\gamma t)\left(4-\exp(-\gamma t)\right)}{2\gamma^3},$$

где $\alpha_{02}(0)$=1,25.

Плотность вероятности $f_1(y,t)$ СтП Y(t) аппроксимируется конечным отрезком ее ортогонального разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов до четвертого порядка с весом $\omega_1(y)$– нормальной плотностью с математическим ожиданием m и ковариационной матрицей K СтП Y(t). С помощью M² СМ были рассчитаны следующие варианты:

- *вариант 1:* вычисление m, K, α_{40};

- *вариант 2:* вычисление m, K, α_{30},α_{40};

- *вариант 3:* вычисление m, K и α_{21},α_{22} для уточнения m, K.

Для проведения сравнительного анализа параметры m, K, α_{40} были вычислены также с применением МНА и МЭА.

Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Table 1.

Момент	Метод	t				
		0	0,1	0,2	0,4	0,6
$\alpha_{10}=m_1$	ТР	0,5	0,482	0,473	0,467	0,466
	МНА	0,5	0,482	0,473	0,467	0,465
	МЭА	0,5	0,482	0,473	0,467	0,465
	M² СМ (все варианты)	0,5	0,482	0,473	0,467	0,466
$D_1=K_{11}$	ТР	0,1	0,096	0,095	0,098	0,102
	МНА	0,1	0,096	0,092	0,091	0,093
	МЭА	0,1	0,096	0,092	0,091	0,093
	M² СМ (варианты 1,2)	0,1	0,094	0,093	0,092	0,093
	M² СМ (вариант 3)	0,1	0,096	0,095	0,098	0,102
α_{40}	ТР	0,242	0,218	0,216	0,229	0,245
	МНА	0,242	0,211	0,199	0,192	0,194
	МЭА	0,242	0,218	0,217	0,225	0,240
	M² СМ (вариант 1)	0,242	0,213	0,203	0,201	0,205
	M² СМ (вариант 2)	0,242	0,213	0,204	0,201	0,206

Примечание. ТР – точное решение, МНА – метод нормальной аппроксимации, МЭА – метод эллипсоидальной аппроксимации, M² СМ – модифицированный моментно-семиинвариантный метод.

На рисунках 1-3 показана точность вычисления математического ожидания m_1, дисперсии D_1 и начального момента α_{40} компоненты Y_1 соответственно.

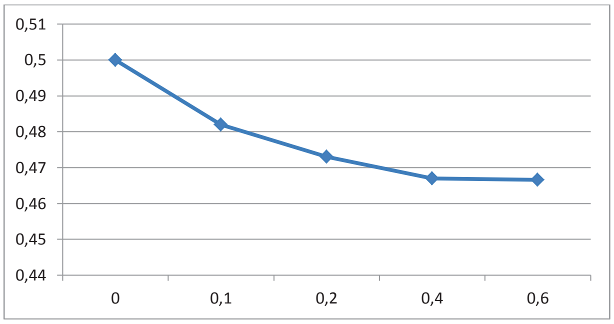

Рис. 1. График $\alpha_{10} = m_1$
Fig. 1. Schedule $\alpha_{10} = m_1$

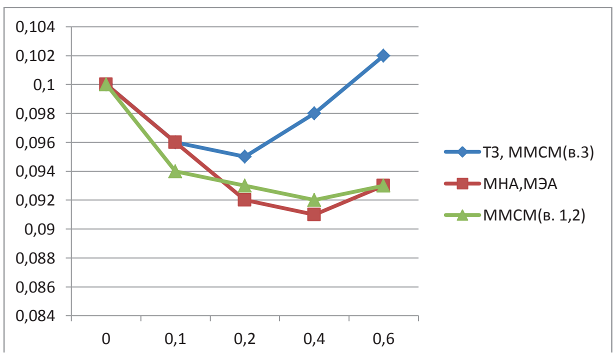

Рис. 2. График $D_1 = K_{11}$
Fig. 2. Schedule $D_1 = K_{11}$

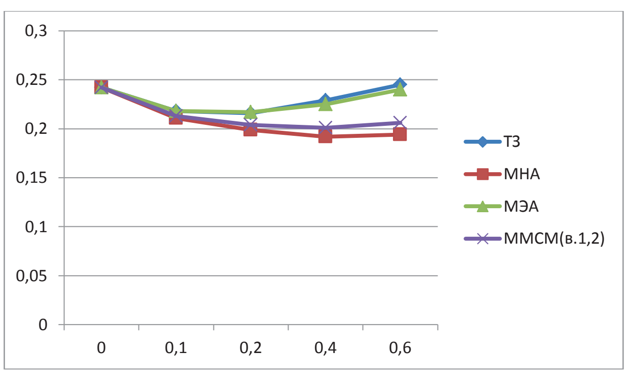

Рис. 3. График α_{40}
Fig. 2. Schedule α_{40}

Примечание. На графиках введено обозначение: ММСМ – модифицированный моментно-семиинвариантный метод.

Результаты сравнительного анализа, приведенные в таблице 1 и на рисунках 1-3, показывают:
– высокую точность вычисления математического ожидания m_1, полученную с применением M^2 СМ , МНА, МЭА;
– высокую точность вычисления дисперсии D_1, полученную с помощью M^2 СМ с учетом старших начальных моментов, присутствующих в правых частях уравнений для m и K (около 0,1%);
– высокую точность вычисления начального момента α_{40}, полученную с помощью МЭА, (около 2%);

Заключение

Разработано методическое и научное инструментальное программное обеспечение стохастического анализа многомерных нелинейных стохастических систем на основе модифицированного моментно-семиинвариантного метода и ортогонального разложения неизвестной одномерной плотности вектора состояния системы по биортогональной системе полиномов. Результаты допускают обобщение на случай многомерных распределений вектора состояния системы.

Тестовые примеры показали, что M^2 СМ дает высокую точность (менее 2%) определения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния СтС, удовлетворяющих замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы, а также вероятностных старших моментов $(r > 2)$, входящих в правые части точных незамкнутых уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы.

Программное обеспечение «СтС-Анализ-M^2 СМ » может применяться:
- в научных исследованиях;
- для обучения в системе высшего образования на курсах «Случайные процессы», «Теория стохастических дифференциальных систем» и т.д.;
- в управлении техническими, организационно-экономическими высокой доступности, экологическими и другими системами.

Список использованных источников

[1] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 999 с.

[2] *Синицын И.Н., Шаламов А.С.* Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. 624 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29734015 (дата обращения: 21.09.2018).

[3] *Синицын И.Н., Синицын В.И.* Лекции по теории нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. М.: Торус Пресс, 2013. 488 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=27567381 (дата обращения: 21.09.2018).

[4] *Guo L., Cao S.* Anti-disturbance control theory for Systems with multiple disturbances: a survey // ISA Transactions. 2014. Vol. 53, Issue 4. Pp. 846-849. DOI: 10.1016/j.isatra.2013.10.005

[5] *Moon W., Wettlaufer J.S.* A stochastic perturbation theory for non-autonomous systems // Journal of Mathematical Physics. 2013. Vol. 54, Issue 12. Article 123303. Pp. 1-31. DOI: 10.1063/1.4848776

[6] *Silvestrov S., Malyarenko A., Rancic M.* Stochastic Processes and Applications // SPAS2017, Västerås and Stockholm, Sweden, October 4-6, 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 271. Springer International Publishing, 2018. 475 p. DOI: 10.1007/978-3-030-02825-1

[7] *Kozachenko Yu., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A.* 3 – Simulation of Gaussian Stochastic Processes with Respect to Out-

put Processes of the System // Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. 2016. Pp. 105-168. DOI: 10.1016/B978-1-78548-217-5.50003-9

[8] *Liu Z., Wang W.* Favard separation method for almost periodic stochastic differential equations // Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 260, Issue 11. Pp. 8109-8136. DOI: 10.1016/j.jde.2016.02.019

[9] *Riedel S., Scheutzow M.* Rough differential equations with unbounded drift term // Journal of Differential Equations. 2017. Vol. 262, Issue 1. Pp. 283-312. DOI: 10.1016/j.jde.2016.02.021

[10] *Shena J., Zhaob J., Lu K., Wang B.* The Wong–Zakai approximations of invariant manifolds and foliations for stochastic evolution equations // Journal of Differential Equations. 2019. Vol. 266, Issue 8. Pp. 4568-4623. DOI: 10.1016/j.jde.2018.10.008

[11] *Anton C.* Error Expansion for a Symplectic Scheme for Stochastic Hamiltonian Systems // Recent Advances in Mathematical and Statistical Methods. AMMCS 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics / D. Kilgour, H. Kunze, R. Makarov, R. Melnik, X. Wang (eds). Springer, Cham, 2018. Vol. 259. Pp. 567-577. DOI: 10.1007/978-3-319-99719-3_51

[12] *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85-116. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24896759 (дата обращения: 21.09.2018).

[13] *Рыбаков К.А.* Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 1001-1005. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30777674 (дата обращения: 21.09.2018).

[14] *Конашенкова Т.Д., Шин В.И.* Приближенный метод определения моментов фазовых координат многомерных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 1. С. 43-52. URL: http://www.mathnet.ru/links/37f3f79b8d31d38b0913be900cd7a0f3/at5280.pdf (дата обращения: 21.09.2018).

[15] *Андреева Е.В., Конашенкова Т.Д., Маишева Е.Ю., Огнева О.С., Петрова М.В., Шин В.И.* Модифицированные квазимоментные и моментно-семиинвариантные методы анализа многомерных стохастических систем и их программная реализация // Системы и средства информатики. 1992. № 2. С. 160-171.

[16] *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендяев Н.Н., Басилашвили Д.А.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (I) // Наукоемкие технологии. 2009. Т. 10, № 10. С. 4-52. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=13070122 (дата обращения: 21.09.2018).

[17] *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендяев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (II) // Наукоемкие технологии. 2010. Т. 11, № 5. С. 4-45. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=19135495 (дата обращения: 21.09.2018).

[18] *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендяев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (III) // Системы высокой доступности. 2010. Т. 6, № 4. С. 23-47. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=22831889 (дата обращения: 21.09.2018).

[19] *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV) // Системы высокой доступности. 2017. Т. 13, № 3. С. 55-69. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30554622 (дата обращения: 21.09.2018).

[20] *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Стохастические канонические вейвлет разложения в задачах моделирования виброударонадежности компьютерного оборудования // Системы компьютерной математики и их приложения. 2017. № 18. С. 123-124. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30469426 (дата обращения: 21.09.2018).

[21] *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V) // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 1. С. 59-70. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=32795845 (дата обращения: 21.09.2018).

[22] *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VI) // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 2. С. 40-56. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=35256128 (дата обращения: 21.09.2018).

[23] *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений // Системы компьютерной математики и их приложения. 2018. № 19. С. 213-220. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=35177124 (дата обращения: 21.09.2018).

[24] *Синицын И.Н.* Метод интерполяционного аналитического моделирования одномерных распределений в стохастических системах // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12, № 1. С. 55-61. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=32686788 (дата обращения: 21.09.2018).

[25] *Белоусов В.В.* Опыт разработки инструментов для моделирования организационно-экономических систем высокой доступности на базе открытого программного обеспечения // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 5. С. 3-11. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36833182 (дата обращения: 21.09.2018).

Поступила 21.09.2018; принята к публикации 15.12.2018; опубликована онлайн 19.04.2019.

Об авторе:

Конашенкова Татьяна Дмитриевна, ведущий программист, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8498-979X, tkonashenkova64@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

[1] Pugachev V.S., Sinitsyn, I.N. Stochastic Systems. Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 2001. 908 p. (In Eng.)

[2] Sinitsyn I.N., Shalamov A.S. Lektsii po teorii sistem integrirovannoy logisticheskoy podderzhki [Lectures on the theory of systems of integrated logistics support]. Moscow: Torus Press, 2012. 624 p. (In Russ.)

[3] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I. Lektsii po teorii normal'noi i ellipsoidal'noi approksimatsii raspredelenii v stokhasticheskikh sistemakh [Lectures on the Theory of Normal and Ellipsoidal Approximation of Distributions in the Stochastic Systems]. Moscow: Torus Press, 2013. 488 p. (In Russ.)

[4] Guo L., Cao S. Anti-disturbance control theory for Systems with multiple disturbances: a survey. *ISA Transactions.* 2014; 53(4):846-849. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.isatra.2013.10.005

[5] Moon W., Wettlaufer J.S. A stochastic perturbation theory for non-autonomous systems. *Journal of Mathematical Physics.* 2013; 54(12):123303. (In Eng.) DOI: 10.1063/1.4848776

[6] Silvestrov S., Malyarenko A., Rancic M. Stochastic Processes and Applications. SPAS2017, Västerås and Stockholm, Sweden, October 4-6, 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 271. Springer International Publishing, 2018. 475 p. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-030-02825-1

[7] Kozachenko Yu., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A. 3 – Simulation of Gaussian Stochastic Processes with Respect to Output Processes of the System. *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability.* 2016:105-168. (In Eng.) DOI: 10.1016/B978-1-78548-217-5.50003-9

[8] Liu Z., Wang W. Favard separation method for almost periodic stochastic differential equations. *Journal of Differential Equations*. 2016; 260(11):8109-8136. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jde.2016.02.019

[9] Riedel S., Scheutzow M. Rough differential equations with unbounded drift term. *Journal of Differential Equations.* 2017; 262(1):283-312. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jde.2016.02.021

[10] Shena J., Zhaob J., Lu K., Wang B. The Wong–Zakai approximations of invariant manifolds and foliations for stochastic evolution equations. *Journal of Differential Equations.* 2019; 266(8):4568-4623. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jde.2018.10.008

[11] Anton C. Error Expansion for a Symplectic Scheme for Stochastic Hamiltonian Systems. In: Kilgour D., Kunze H., Makarov R., Melnik R., Wang X. (eds) Recent Advances in Mathematical and Statistical Methods. AMMCS 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, Cham, 2018; 259:567-577. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-99719-3_51

[12] Averina T.A., Rybakov K.A. Two Methods for Analysis of Stochastic Systems with Poisson Component. *Differential Equations and Control Processes*. 2013; 3:85-116. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24896759 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[13] Rybakov K.A. Statistical Methods of Analysis and Filtering for Continuous Stochastic Systems. *Differential Equations and Control Processes*. 2017; 4:1001-1005. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30777674 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[14] Konashenkova T. D., Shin V.I. Approximate method of determination of moments of phase variables of multivariable stochastic systems. *Autom. Remote Control*. 1990; 51(1):35-42. (In Eng.)

[15] Andreeva E.V., Konashenkova T.D., Maisheva E.Yu., Ogneva OS, Petrova M.V., Shin V.I. Modified quasi-momentary and moment-semi-invariant methods for analyzing multidimensional stochastic systems and their software implementation. *Systems and Means of Informatics*. 1992; 2:160-171. (In Russ.)

[16] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Belousov V.V., Konashenkova T.D., Semendyaev N.N., Basilashvili D.A. Software tools for analysis and synthesis of stochastic systems of with high availability (I). *Science Intensive Technologies.* 2009; 10(10):4-52. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=13070122 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[17] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Belousov V.V., Konashenkova T.D., Semendyaev N.N., Basilashvili D.A. Software tools for analysis and synthesis of stochastic systems with high availability (II). *Science Intensive Technologies.* 2010; 11(5):4-45. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=19135495 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[18] Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Belousov V.V., Konashenkova T.D., Semendyaev N.N., Basilashvili D.A. Software tools for analysis and synthesis of stochastic systems with high availability (III). *Highly available systems*. 2010; 6(4):23-47. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=22831889 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[19] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software tools for analysis and synthesis of stochastic syste*ms with high abailability (IV).* Highly available systems. 2017; 13(3):55-69. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30554622 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[20] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Stochastic canonical wavelet expansions in problems of simulation of vibro-shock reliability of computer equipment. *Computer mathematics systems and their applications*. 2017; 18:123-124. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30469426 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[21] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software tools for analysis and synthesis of stochastic systems with high abailability (V). Highly available systems. 2018; 14(1):59-70. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=32795845 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[22] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. Software tools for analysis and synthesis of stochastic systems with high availability (VI). *Highly available systems*. 2018; 14(2):40-56. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=35256128 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[23] Sinitsyn I.N., Sergeev I.V., Korepanov E.R., Konashenkova T.D. express modeling of stochastic highly available systems based on wavelet canonical expansions. *Computer mathematics systems and their applications*. 2018; 19:213-220. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=35177124 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

[24] Sinitsyn I.N. Method of interpolational analytical modeling of processes in stochastic systems. *Informatics and Applications*. 2018; 12(1):55-61. Available at: https://elibrary.ru/

item.asp?id=32686788 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)
[25] Belousov V.V. Experience in tools developing for organization-economical systems modeling based on the open source software. *Highly available systems*. 2018; 14(5):3-11. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36833182 (accessed 21.09.2018). (In Russ.)

Submitted 21.09.2018; revised 15.12.2018;
published online 19.04.2019.

About the author:

Tatyana D. Konashenkova, Senior Software Developer, Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences (40 Vavilova St., Moscow 119333, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8498-979X, tkonashenkova64@mail.ru

The author has read and approved the final manuscript.