

УДК 004.942, 001.57, 37.012, 378.14, 371.263, 519.21, 519.22, 519.23, 519.876.5
DOI: 10.25559/SITITO.15.201902.386-394

Проектирование учебных материалов с использованием систем компьютерной математики

Е. А. Власова, Н. М. Меженная*, В. С. Попов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

*natalia.mezhennaya@gmail.com

Аннотация

В работе описан метод проектирования иллюстративного материала, используемого при обучении студентов технического направления подготовки, с использованием систем компьютерной математики (Mathematica, Matlab, MatCad и др.). Обсуждаются его основные методические характеристики. Рассматриваемый метод отличают вариативность достигаемых целей обучения, персонафицированность процесса обучения, градация материалов по уровням освоения, возможность простого и быстрого создания дополнительных материалов, допустимость использования как для аудиторной, так и внеаудиторной работы. Данный метод используется авторами в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана при подготовке студентов факультета «Специальное машиностроение». В качестве примера применения метода приведен код системы Mathematica, используемый для создания интерактивных учебных материалов по одной из тем, изучаемых в начале курса математической статистики, посвященный описанию и представлению выборочных данных.

Ключевые слова: учебные материалы, системы компьютерной математики, интерактивные шаблоны, математическая статистика, ИТ-образование.

Для цитирования: Власова Е. А., Меженная Н. М., Попов В. С. Проектирование учебных материалов с использованием систем компьютерной математики // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 2. С. 386-394. DOI: 10.25559/SITITO.15.201902.386-394

© Власова Е. А., Меженная Н. М., Попов В. С., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Designing Teaching Materials Supported by Computer Algebra Systems

E. A. Vlasova, N. M. Mezhennaya*, V. S. Popov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

5/1 2-nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia

* natalia.mezhennaya@gmail.com

Abstract

The paper presents the method of designing of illustrative materials, used in teaching students of the technical training program, supported by computer algebra systems (Mathematica, Matlab, MatCad, etc.). Its main didactics characteristics are considered. The method under consideration characterizes by variability of the achieved learning goals, personification of the learning process, grading of materials by the grasping levels, ability to easily and quickly create additional materials, the possibility of using both for classroom and extracurricular work. This method is used by the authors at the Bauman Moscow State Technical University in teaching students of the Faculty "Special Engineering". As an example of the application of the method, we present the Mathematica code which was used to create interactive education materials on one of the topics studied at the beginning of the course of mathematical statistics, devoted to the description and presentation of sample data.

Keywords: educational material, computer algebra systems, interactive templates, mathematical statistics, IT-education.

For citation: Vlasova E.A., Mezhennaya N.M., Popov V.S. Designing Teaching Materials Supported by Computer Algebra Systems. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019;15(2):386-394. DOI: 10.25559/SITITO.15.201902.386-394



Введение

Современное образование по естественнонаучным дисциплинам в техническом университете должно быть ориентировано в первую очередь на формирование способностей по творческому применению полученных знаний в профессиональной деятельности [1]. Нахождению нужной информации из различных источников, ее творческой обработке, систематизации и анализу полученных результатов, умению строить верные выводы способствует самостоятельная работа обучающихся, в том числе контролируемая. Рассматриваемые примеры и задачи должны быть направлены на формирование соответствующих познавательных, творческих, исследовательских и общепрофессиональных компетенций [2-4]. Иллюстративный материал должен соответствовать содержанию программ учебных дисциплин, иметь прикладную направленность и отражать современный уровень науки [5]. Внедрение новых образовательных технологий способствует повышению эффективности учебного процесса и контроля над получаемыми знаниями [6], мотивированности обучающихся, делают процесс обучения более персонализированным [7; 8]. Поэтому особенно важной становится подготовка иллюстративного материала [9], включаемого в учебные пособия, в том числе электронные, и решаемые задания на семинарских занятиях и лабораторных работах [10; 11].

В связи с этим важно иметь не только банк примеров и задач, которые способствуют формированию соответствующих познавательных, творческих, исследовательских и общепрофессиональных компетенций, но и создать иллюстративный материал, соответствующий содержанию программ учебных дисциплин, имеющий прикладную направленность, отражающий современный уровень науки. Еще одной важной особенностью при разработке иллюстративного материала является обязательное использование учащимися новых образовательных технологий, которые способствовали бы повышению эффективности учебного процесса, контроля над получаемыми знаниями, повышали бы мотивированность обучения [12]. К таким технологиям можно отнести использование различного рода математических пакетов, таких, например, как Mathematica, Matlab, MatCad. Использование в учебном процессе интерактивных компьютерных систем [6] (или математических пакетов (МП)) в рамках дисциплин математического образования способствует формированию у студентов глубоких и прочных знаний, умений и навыков, развивает продуктивное, эвристическое, творческое мышление.

В работе описан метод разработки и составления иллюстративного материала с использованием систем компьютерной математики по курсу математической статистики при обучении студентов технического университета. Целью представленной статьи является описание методологии проектирования и применения иллюстративного материала с использованием систем компьютерной математики в курсе математической статистики при обучении студентов технического университета, которая легко может быть адаптирована для достижения любых целей обучения. Различные методики применения систем компьютерной математики при изучении естественнонаучного цикла были описаны в работах [9]. Отметим, что вероятностные дисциплины имеют свою специфику и методику их преподавания студентам-инженерам [9].

Основные задачи при проектировании иллюстративного материала

К основным задачам, решаемым при помощи демонстрации иллюстративного материала на занятиях, относятся:

1. Рассматриваемые задачи и их решения должны иметь четкую постановку задачи и алгоритм решения;
2. Рассматриваемые задачи и их решения должны быть снабжены списком инструментов и источников, необходимых для их решения;
3. Примеры должны быть структурированы и иметь разбивку по уровням с рейтинговой оценкой каждого уровня освоения материала соответственно получаемым за задания рейтинговым баллам;
4. Преподаватель должен иметь возможность эффективно генерировать иллюстративный материал, варьируя исходными данными.

Для решения поставленных задач необходима разработка методического комплекса дисциплины, включающего учебные и методические пособия, использование информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) [5; 13; 14], электронных средств обучения (курсы лекций, презентации, программные комплексы, включая использование мобильных устройств [15; 16]), а также создание индивидуальных вариантов заданий для самостоятельной работы и оценочных средств, например, в виде вопросов для самоконтроля и вариантов контрольных работ.

Заметим, что при демонстрации примеров на лекционных занятиях часто нет необходимости в показе всего решения, а достаточно привести только полученные результаты и сделать качественные выводы [17; 18]. Однако на семинарских занятиях и лабораторных работах желательнее вовлечение слушателей в сам процесс решения и моделирования рассматриваемых явлений [1; 4; 9; 19]. Для этого необходима разработка соответствующих методических материалов [20]. Для их подготовки в рамках дисциплин естественнонаучного цикла наиболее приемлемым является использование систем компьютерной математики (Mathematica, Matlab, MatCad) [6; 11; 15; 21; 22]. Надо отметить, что возможно проектирование интерактивных шаблонов, которое предполагает дальнейшее освоение студентами математических пакетов и использование их интерфейсных возможностей.

Еще одним важным преимуществом такого метода обучения является возможность численного решения и моделирования реальных явлений. Большинство явлений и процессов, исследуемых на практике, не поддаются точному аналитическому описанию, а требуют построения приближенных математических моделей, использование численных методов и моделирования. Поэтому разработанные примеры очень важны для формирования у студентов базовых знаний эмпирического метода, методов выбора и верификации математических моделей, качественного и количественного анализа и интерпретации его результатов.



Проектирование интерактивных материалов по теме «Основные выборочные характеристики»

В качестве примера использования предложенного метода приведем пример составления методического материала по одной из тем, изучаемых в начале курса математической статистики, посвященной основам выборочного метода.

Рассмотрим следующую постановку задачи. Случайные величины X и Y принимают значения на отрезке $[0;1]$, при этом имеют разные законы распределения: X распределена равномерно, а Y имеет бета-распределение с параметрами $(2,2)$. Напомним, что равномерное распределение – это бета-распределение с параметрами $(1,1)$. При этом оба распределения являются симметричными относительно середины отрезка, но имеют различные плотности распределения. Требуется по смоделированной выборке значений случайных величин X и Y и установить сходство и различия в характеристиках рассматриваемых законов.

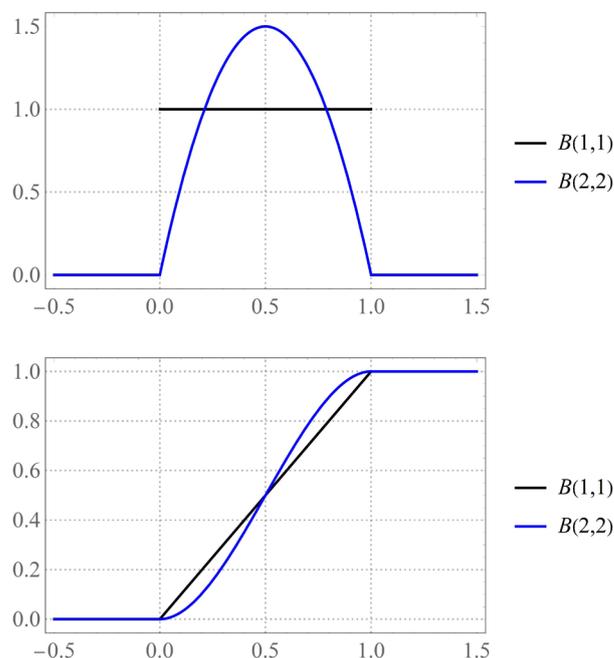
Далее будет приведен код системы Wolfram Mathematica, в котором для простоты изложения опущены некоторые используемые графические директивы.

Начнем с того, что построим графики плотностей и функций распределения для X и Y . Для этого воспользуемся встроенными функциями системы Wolfram Mathematica.

```
DistX=BetaDistribution[1,1];
DistY=BetaDistribution[2,2];
Plot[Evaluate[PDF[#,x]&/@{DistX,DistY}], {x,-0.5,1.5},
PlotLegends->{"B(1,1)","B(2,2)"}]
Plot[Evaluate[CDF[#,x]&/@{DistX,DistY}], {x,-0.5,1.5},
```

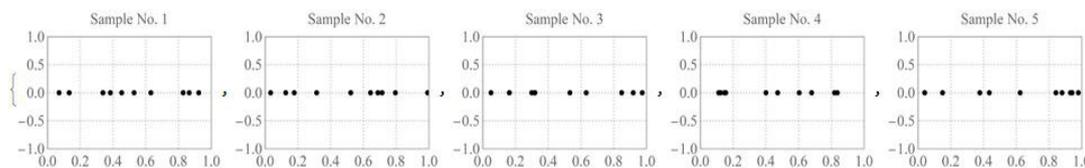
PlotLegends->{"B(1,1)","B(2,2)"}]

В результате выполнения этих команд получим графики, представленные на рис. 1.



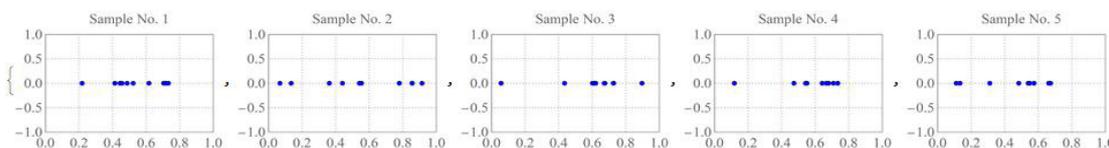
Р и с. 1. Графики плотности распределения (а) и функции распределения (б) для законов $B(1,1)$ и $B(2,2)$

F i g. 1. Probability density plots (a) and distribution functions (b) for laws $B(1,1)$ and $B(2,2)$



Р и с. 2. Диаграммы разброса точек для 5 выборок объема 10 из закона $B(1,1)$

F i g. 2. Диаграммы разброса точек для 5 выборок объема 10 из закона $B(1,1)$



Р и с. 3. Диаграммы разброса точек для 5 выборок объема 10 из закона $B(2,2)$

F i g. 3. Point spread diagrams for 5 samples of the size 10 from Law $B(2,2)$

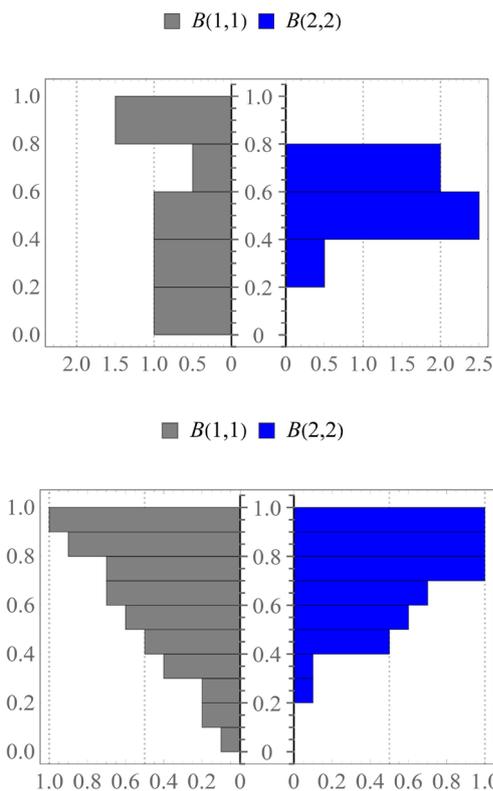
Смоделируем по 5 выборок объема 10 каждая из указанных законов распределения и приведем графическую иллюстрацию полученных значений.

```
N=10;m=5;
SampleX=RandomVariate[DistX,{m,n}];
SampleY=RandomVariate[DistY,{m,n}];
Table[ListPlot[Transpose[{SampleX[[i]], Table[0,{n}]}], PlotLabel->"Sample No. "<<ToString[i]],{i,1,m}]
Table[ListPlot[Transpose[{SampleY[[i]], Table[0,{n}]}], PlotLabel->"Sample No. "<<ToString[i]],{i,1,m}]
```

Результаты выполнения команд представлены на рис. 2 и 3. Приведенные графики позволяют удобно сравнить полученные значения и наглядно демонстрируют отличия в них. Далее построим гистограммы (рис. 4) для двух выборок из различных распределений.

```
PairedHistogram[SampleX[[1]],SampleY[[1]],4,"PDF",
ChartLegends->Placed[{"B(1,1)","B(2,2)"},Top]]
PairedHistogram[SampleX[[1]],SampleY[[1]],10,"CDF",
ChartLegends->Placed[{"B(1,1)","B(2,2)"},Top]]
```





Р и с. 4. Графики эмпирических плотностей распределения (а) и функции распределения (б) для двух выборок объема 10 из законов $B(1,1)$ и $B(2,2)$
F i g. 4. Frequency distribution plots (a) and distribution functions (b) for two samples of the size 10 from laws $B(1,1)$ and $B(2,2)$

Теперь найдем некоторые выборочные характеристики и приведем полученные значения.

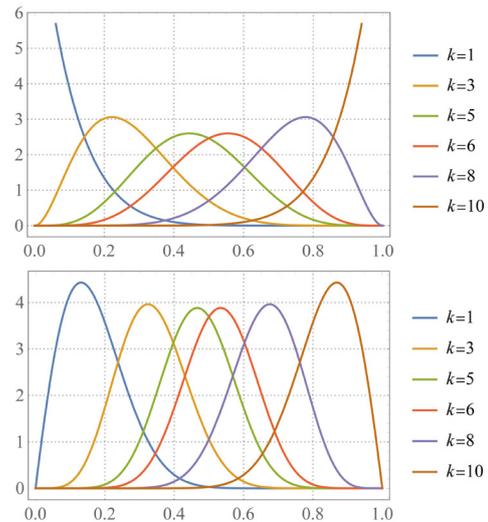
```
Mean/@SampleX
{0.515169,0.500451,0.489354,0.434449,0.619803}
Mean/@SampleY
{0.531031,0.550875,0.602226,0.58476,0.4348}
Median/@SampleX
{0.490515,0.582984,0.424572,0.436,0.732743}
Median/@SampleY
{0.504377,0.548161,0.646272,0.653643,0.511583}
Variance/@SampleX
{0.0887683,0.103256,0.115939,0.0849021,0.121728}
Variance/@SampleY
{0.0265568,0.0918424,0.050493,0.0347107,0.0423442}
```

Эти результаты также можно проиллюстрировать графически, но здесь не будем на этом останавливаться.

Теперь перейдем к изучению распределения порядковых статистик. Воспользуемся известными формулами для их распределения и построим соответствующие графики.

```
fX[x_n,k]:=n Binomial[n-1,k-1] PDF[DistX,x]CDF[DistX,x]^(k-1)
(1-CDF[DistX,x])^(n-k);
fY[x_n,k]:=n Binomial[n-1,k-1] PDF[DistY,x] CDF[DistY,x]^(k-1)
(1-CDF[DistY,x])^(n-k);
Plot[Evaluate@Table[fX[x,n,k],{k,{1,3,5,6,8,10}}],{x,0,1}]
Plot[Evaluate@Table[fY[x,n,k],{k,{1,3,5,6,8,10}}],{x,0,1}]
```

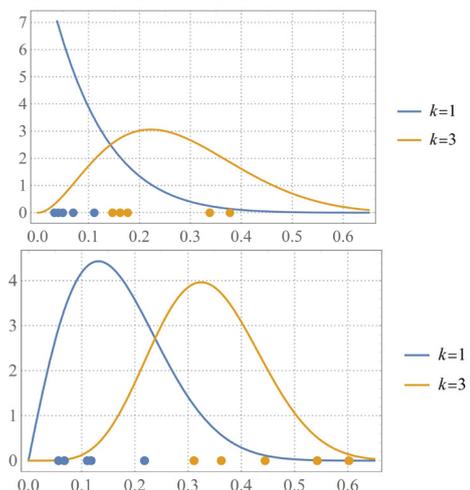
Получим результаты, представленные на рис. 5.



Р и с. 5. Графики плотностей распределения для порядковых статистик с номером $k=1,3,5,6,8,10$ для выборок объема 10 из законов $B(1,1)$ (а) и $B(2,2)$ (б)
F i g. 5. Probability density plots for order statistics with the number $k=1,3,5,6,8,10$ for samples of the size 10 from laws $B(1,1)$ (a) and $B(2,2)$ (b)

Эти графики можно проиллюстрировать и полученными численными значениями порядковых статистик (рис. 6).

```
OrderStatX=Transpose[Sort/@SampleX];
OrderStatY=Transpose[Sort/@SampleY];
k1=1;k2=3;
Show[Plot[{fX[x,n,k1],fX[x,n,k2]},{x,0,0.65},PlotLegends->{"k="<>T
oString[k1],"k="<>ToString[k2]}],
ListPlot[{Transpose[{OrderStatX[[k1]],Table[0,{m}]}],Transpose[{
OrderStatX[[k2]],Table[0,{m}]}]}]]
Show[Plot[{fY[x,n,k1],fY[x,n,k2]},{x,0,0.65},PlotLegends->{"k="<>T
oString[k1],"k="<>ToString[k2]}],
ListPlot[{Transpose[{OrderStatY[[k1]],Table[0,{m}]}],Transpose[{
OrderStatY[[k2]],Table[0,{m}]}]}]]
```



Р и с. 6. Графики плотностей распределения для порядковых статистик с номером $k=1,3$ и их численных значений для выборок объема 10 из законов $B(1,1)$ (а) и $B(2,2)$ (б)

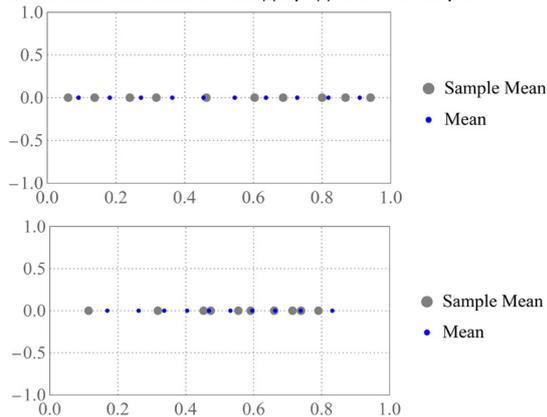
F i g. 6. Probability density plots for order statistics with the number $k=1,3$ and their numerical values for samples of the size 10 from laws $B(1,1)$ (a) and $B(2,2)$ (b)



Далее представим полученные средние значения порядковых статистик для 5 выборок в сравнении с их теоретическими значениями, для нахождения которых удобно использовать численные методы.

```
ListPlot[Transpose[{Mean/@OrderStatX,Table[0,{n}]}],
Transpose[{N[Table[k/11,{k,1,10}],Table[0,{n}]}], PlotLegends->{"Sample Mean","Mean"}]
ListPlot[Transpose[{Mean/@OrderStatY,Table[0,{n}]}],
Transpose[{N[Table[FullSimplify[Integrate[x fY[x,n,k],{x,0,1}],{k,1,10}],Table[0,{10}]}],
PlotLegends->{"Sample Mean","Mean"}]
```

Результат выполнения команд представлен на рис. 7.



Р и с. 7. Диаграммы разброса средних значений порядковых статистик с номером $k=1, \dots, 10$ в сравнении с их теоретическими средними значениями для выборок объема 10 из законов $B(1,1)$ (а) и $B(2,2)$ (б)

Fig. 7. Diagrams of dispersion of average of order statistics with the number $k = 1, \dots, 10$ in comparison with their theoretical average values for samples of the size 10 from the laws $B(1,1)$ (a) and $B(2,2)$ (б)

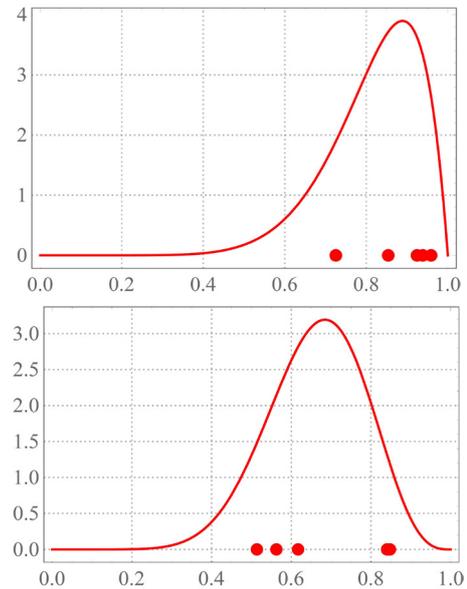
В завершение примера изучим вопрос о распределении размаха выборки R . Для этого сначала найдем аналитические выражения для плотностей.

```
RangeSampX=Last[OrderStatX]-First[OrderStatX]
{0.85387,0.958931,0.924344,0.725164,0.938538}
RangeSampY=Last[OrderStatY]-First[OrderStatY]
{0.513856,0.847453,0.840447,0.616961,0.562698}
fX1n[x_,y_,n_]:=n(n-1) PDF[DistX,x]PDF[DistX,y](CDF[DistX,y]-CDF[DistX,x])^(n-2) Boole[x<y];
fY1n[x_,y_,n_]:=n(n-1)PDF[DistY,x]PDF[DistY,y](CDF[DistY,y]-CDF[DistY,x])^(n-2) Boole[x<y];
FRX[z_,n_]:=Simplify[Integrate[fX1n[x,y,n]Boole[y-x<z],{x,0,1},{y,0,1}],Assumptions->{0<z<1}]
FRY[z_,n_]:=Simplify[Integrate[fY1n[x,y,n]Boole[y-x<z],{x,0,1},{y,0,1}],Assumptions->{0<z<1}]
fRX[z_,n_]:=Simplify[D[FRX[z,n],z]]
fRX[z,n]
-90 (-1+z) z^8
fRY[z_,n_]:=Simplify[D[FRY[z,n],z]]
fRY[z,n]
-(1/323323)108 z^8 (-4199040+21555072 z^2-47056464 z^4+58605120 z^6-46700955 z^8+25131015 z^10-321412455 z^11+1846820976 z^12-4744267605 z^13+7036986528 z^14-6651681120 z^15+4138534400 z^16-1676355408 z^17+413853440 z^18-50282624 z^19+469120 z^21)
```

В случае закона $B(2,2)$ выражение оказывается очень громозд-

ким и его вычисление без использования систем компьютерной математики представляется затруднительным. В то же время с помощью Wolfram Mathematica можно найти плотность распределения быстро и эффективно.

Далее построим плотности распределения размаха выборки для двух рассматриваемых законов в сравнении с полученными численными значениями (рис. 8).



Р и с. 8. Диаграммы разброса значений размаха выборки и их плотностей распределения для выборок объема 10 из законов $B(1,1)$ (а) и $B(2,2)$ (б)

Fig. 8. Diagrams of sample range scatter and frequency distributions for samples of the size 10 from the laws $B(1,1)$ (a) and $B(2,2)$ (б)

Приведенные графики наглядно демонстрируют различия в распределениях выборок.

Заключение

В работе описан метод проектирования иллюстративного материала, используемого при обучении студентов технического направления подготовки, с использованием систем компьютерной математики (Mathematica, Matlab, MatCad и др.). Приведенные примеры показывают основные преимущества описанной технологии:

1. Простое варьирование исходных данных;
2. Возможность подстраивания под любые цели обучения;
3. Интерактивность;
4. Возможность использования на любых видах занятий;
5. Градация по уровням освоения материала;
6. Возможность использования для самостоятельной работы обучающихся.

Данный метод используется авторами в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана при подготовке студентов факультета «Специальное машиностроение». В качестве примера применения метода приведен код системы Mathematica, используемый для создания интерактивных учебных материалов по одной из тем, изучаемых в начале курса математической статистики, посвященный описанию и представлению выборочных данных.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Griffin P, Care E. Assessment and Teaching of 21st Century Skills: Methods and Approach. Springer: New York, 2015. 310 p. DOI: 10.1007/978-94-017-9395-7
- [2] Thomas M. O. J. Teachers using computers in the mathematics classroom: A longitudinal study // Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education / J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (eds). Prague, Czech Republic: Charles University, 2006. Vol. 5. Pp. 265-272. URL: <https://www.emis.de/proceedings/PME30/5/265.pdf> (дата обращения: 10.05.2019).
- [3] Garner S. The CAS classroom // Australian Senior Mathematics Journal. 2004. Vol. 18, No. 2. Pp. 28-42. URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ720051.pdf> (дата обращения: 10.05.2019).
- [4] Kendal M., Stacey K. Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms // Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 2002. Vol. 34, Issue 5. Pp. 196-203. DOI: 10.1007/BF02655822
- [5] Psycharis S. The Impact of computational experiment and formative assessment in inquiry-based teaching and learning approach in STEM education // Journal of Science Education and Technology. 2016. Vol. 25, No. 2. Pp. 316-326. DOI: 10.1007/s10956-015-9595-z
- [6] Розанова С. А., Санина Е. И., Кузнецова Т. А. Дидактические возможности информационных и коммуникационных технологий в обучении математике в вузе // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2012. № 3. С. 93-98. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17927715> (дата обращения: 10.05.2019).
- [7] Власова Е. А., Попов В. С., Пугачев О. В. Использование электронных математических пакетов при обучении высшей математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 120-132. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132
- [8] Nortvedt G. A., Buchholtz N. Assessment in mathematics education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity // ZDM Mathematics Education. 2018. Vol. 50, No. 4. Pp. 555-570. DOI: 10.1007/s11858-018-0963-z
- [9] Власова Е. А., Меженная Н. М., Попов В. С., Пугачев О. В. Использование математических пакетов в рамках методического обеспечения вероятностных дисциплин в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 114-128. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128
- [10] Hoogland K., Pepin B., Bakker A., de Koning J., Gravemeijer K. Representing contextual mathematical problems in descriptive or depictive form: Design of an instrument and validation of its uses // Studies in Educational Evaluation. 2016. Vol. 50. Pp. 22-32. DOI: 10.1016/j.stueduc.2016.06.005
- [11] Bokhove C., Drijvers P. Digital tools for algebra education: criteria and evaluation // International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2010. Vol. 15, No. 1. Pp. 45-62. DOI: 10.1007/s10758-010-9162-x
- [12] Bano M., Zowghi D., Kearney M., Schuck S., Aubusson P. Mobile learning for science and mathematics school education: A systematic review of empirical evidence // Computers & Education. 2018. Vol. 121. Pp. 30-58. DOI: 10.1016/j.compedu.2018.02.006
- [13] Geer R., White B., Zeegers Y., Au W., Barnes A. Emerging pedagogies for the use of iPads in schools // British Journal of Educational Technology. 2017. Vol. 48, Issue 2. Pp. 490-498. DOI: 10.1111/bjet.12381
- [14] Rau M. A. Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning // Educational Psychology Review. 2017. Vol. 29, No. 4. Pp. 717-761. DOI: 10.1007/s10648-016-9365-3
- [15] Fu Q. K., Hwang G. J. Trends in mobile technology-supported collaborative learning: A systematic review of journal publications from 2007 to 2016 // Computers & Education. 2018. Vol. 119. Pp. 129-143. DOI: 10.1016/j.compedu.2018.01.004
- [16] Gueudet G., Pepin B. Didactic contract at the beginning of university: a focus on resources and their use // International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. 2018. Vol. 4, No. 1. Pp. 56-73. DOI: 10.1007/s40753-018-0069-6
- [17] De Vita M., Verschaffel L., Jan E. Towards a better understanding of the potential of interactive whiteboards in stimulating mathematics learning // Learning Environments Research. 2018. Vol. 21, No. 1. Pp. 81-107. DOI: 10.1007/s10984-017-9241-1
- [18] Jones S. R., Watson K. L. Recommendations for a "Target Understanding" of the Derivative Concept for First Semester Calculus Teaching and Learning // International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. 2018. Vol. 4, Issue 2. Pp. 199-227. DOI: 10.1007/s40753-017-0057-2
- [19] Misfeldt M., Jankvist U. T. Instrumental genesis and proof: understanding the use of computer algebra systems in proofs in textbook // Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education. ICME-13 Monographs / L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H. S. Siller, M. Tabach, C. Vale (eds). Springer: Cham, 2018. Pp. 375-385. DOI: 10.1007/978-3-319-76575-4_22
- [20] Kidron I., Tall D. The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process // Educational Studies in Mathematics. 2015. Vol. 88, Issue 2. Pp. 183-199. DOI: 10.1007/s10649-014-9567-x
- [21] Kramarski B., Hirsch C. Using computer algebra systems in mathematical classrooms // Journal of Computer Assisted Learning. 2003. Vol. 19, Issue 1. Pp. 35-45. DOI: 10.1046/j.0266-4909.2003.00004.x
- [22] Hoogland K., Tout D. Computer-based assessment of mathematics into the twenty-first century: pressures and tensions // ZDM Mathematics Education. 2018. Vol. 50, Issue 4. Pp. 675-686. DOI: 10.1007/s11858-018-0944-2

Поступила 10.05.2019; принята к публикации 20.06.2019;
опубликована онлайн 25.07.2019.



Об авторах:

Власова Елена Александровна, доцент кафедры прикладной математики, факультет Фундаментальные науки, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0711-1323>, elena.a.vlasova@yandex.ru

Меженная Наталья Михайловна, доцент кафедры прикладной математики, факультет Фундаментальные науки, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0711-1323>, natalia.mezhenayaya@gmail.com

Попов Владимир Семенович, доцент кафедры прикладной математики, факультет Фундаментальные науки, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7770-4602>, vsopov@bk.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Griffin P, Care E. Assessment and Teaching of 21st Century Skills: Methods and Approach. Springer: New York, 2015. 310 p. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-94-017-9395-7
- [2] Thomas M.O.J. Teachers using computers in the mathematics classroom: A longitudinal study. In: Novotná J, Moraová H, Krátká M, Stehlíková N. (eds). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague, Czech Republic: Charles University. 2006; 5:265-272. Available at: <https://www.emis.de/proceedings/PME30/5/265.pdf> (accessed 10.05.2019). (In Eng.)
- [3] Garner S. The CAS classroom. *Australian Senior Mathematics Journal*. 2004; 18(2):28-42. Available at: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ720051.pdf> (accessed 10.05.2019). (In Eng.)
- [4] Kendal M, Stacey K. Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 2002; 34(5):196-203. (In Eng.) DOI: 10.1007/BF02655822
- [5] Psycharis S. The Impact of computational experiment and formative assessment in inquiry-based teaching and learning approach in STEM education. *Journal of Science Education and Technology*. 2016; 25(2):316-326. (In Eng.) DOI: 10.1007/s10956-015-9595-z
- [6] Rozanova S.A., Sanina E.I., Kuznetsova T.A. Didactic possibilities of the information and communication technologies in teaching mathematics in higher education institution. *Vestnik Rossijskogo universiteta družby narodov. Seriya: Informatizaciya obrazovaniya = RUDN Journal of Informatization in Education*. 2012; 3:93-98. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17927715> (accessed 10.05.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [7] Vlasova E.A., Popov V.S., Pugachev O.V. The Use of Electronic Mathematical Software in Teaching Mathematics. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika = Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*. 2016; 3:120-132. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132
- [8] Nortvedt G.A., Buchholtz N. Assessment in mathematics education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM Mathematics Education*. 2018; 50(4):555-570. (In Eng.) DOI: 10.1007/s11858-018-0963-z
- [9] Vlasova E.A., Mezhenayaya N.M., Popov V.S., Pugachev O.V. The use of mathematical packages in the framework of methodological support of probabilistic disciplines in a technical university. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika = Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017; 4:114-128. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128
- [10] Hoogland K., Pepin B., Bakker A., de Koning J., Gravemeijer K. Representing contextual mathematical problems in descriptive or depictive form: Design of an instrument and validation of its uses. *Studies in Educational Evaluation*. 2016; 50:22-32. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.stueduc.2016.06.005
- [11] Bokhove C., Drijvers P. Digital tools for algebra education: criteria and evaluation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 2010; 15(1):45-62. (In Eng.) DOI: 10.1007/s10758-010-9162-x
- [12] Bano M., Zowghi D., Kearney M., Schuck S., Aubusson P. Mobile learning for science and mathematics school education: A systematic review of empirical evidence. *Computers & Education*. 2018; 121:30-58. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.compedu.2018.02.006
- [13] Geer R., White B., Zeegers Y., Au W., Barnes A. Emerging pedagogies for the use of iPads in schools. *British Journal of Educational Technology*. 2017; 48(2):490-498. (In Eng.) DOI: 10.1111/bjet.12381
- [14] Rau M. A. Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. *Educational Psychology Review*. 2017; 29(4):717-761. (In Eng.) DOI: 10.1007/s10648-016-9365-3
- [15] Fu Q. K., Hwang G. J. Trends in mobile technology-supported collaborative learning: A systematic review of journal publications from 2007 to 2016. *Computers & Education*. 2018; 119:129-143. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.compedu.2018.01.004
- [16] Guedet G., Pepin B. Didactic contract at the beginning of university: a focus on resources and their use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2018; 4(1):56-73. (In Eng.) DOI: 10.1007/s40753-018-0069-6
- [17] De Vita M., Verschaffel L., Jan E. Towards a better understanding of the potential of interactive whiteboards in stimulating mathematics learning. *Learning Environments Research*. 2018; 21(1):81-107. (In Eng.) DOI: 10.1007/s10984-017-9241-1
- [18] Jones S.R., Watson K.L. Recommendations for a "Target Understanding" of the Derivative Concept for First Semester Calculus Teaching and Learning. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2018;



- [19] Misfeldt M., Jankvist U.T. Instrumental genesis and proof: understanding the use of computer algebra systems in proofs in textbook. In: Ball L., Drijvers P., Ladel S., Siller H.S., Tabach M., Vale C. (eds). *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. ICME-13 Monographs. Springer: Cham. 2018; 375-385. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-76575-4_22
- [20] Kidron I., Tall D. The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*. 2015; 88(2):183-199. (In Eng.) DOI: 10.1007/s10649-014-9567-x
- [21] Kramarski B., Hirsch C. Using computer algebra systems in mathematical classrooms. *Journal of Computer Assisted Learning*. 2003; 19(1):35-45. (In Eng.) DOI: 10.1046/j.0266-4909.2003.00004.x
- [22] Hoogland K., Tout D. Computer-based assessment of mathematics into the twenty-first century: pressures and tensions. *ZDM Mathematics Education*. 2018; 50(4):675-686. (In Eng.) DOI: 10.1007/s11858-018-0944-2

Submitted 10.05.2019; revised 20.06.2019;
published online 25.07.2019.

About the authors:

Elena A. Vlasova, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, Faculty of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University (5/1 2-nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0711-1323>, elena.a.vlasova@yandex.ru

Natalia M. Mezhennaya, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, Faculty of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University (5/1 2-nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0711-1323>, natalia.mezhennaya@gmail.com

Vladimir S. Popov, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, Faculty of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University (5/1 2-nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7770-4602>, vspopov@bk.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

