

УДК 681.5.017

DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.635-644

## Повышение временного разрешения оценки состояния процесса с помощью фильтрации Калмана

В. М. Понятский, Б. В. Зенов\*

Акционерное общество «Конструкторское бюро приборостроения им. академика А. Г. Шипунова», г. Тула, Россия

300001, Россия, г. Тула, ул. Щегловская засека, д. 59

\* zbv89@mail.ru

### Аннотация

Рассматриваются вопросы получения оценки состояния процесса с использованием аппарата калмановской фильтрации при наличии измерителя, выдающего показания с временным разрешением меньше требуемого. Выделены два пути решения проблемы: повышение частоты следования отсчетов выходных данных фильтра при использовании данных одного датчика и введение в систему второго, удовлетворяющего требованию по временному разрешению выдаваемых данных, но недостаточно точного, с последующим комплексированием показаний двух датчиков. Проведен анализ известных методов повышения разрешения оценок при использовании одного измерителя, предложены модификации. С использованием этих результатов предлагаются варианты алгоритмов комплексирования, основанные на известных ранее разработанных для объединения показаний с одинаковыми частотами следования и адаптированные под рассматриваемую задачу, в том числе метод объединения измерений на входе фильтра Калмана, метод объединения векторов состояния и его последующие модификации. Также приводятся известные из литературы алгоритмы комплексирования, изначально разработанные для объединения показаний с различными частотами следования. Проводится сравнительный анализ результатов работы всех алгоритмов на примере оценивания процесса по измерениям с различными уровнями шумов, различным соотношением интервалов следования показаний датчиков, исследуется их поведение при различных частотных свойствах фильтрующих контуров. Приводятся соображения по выбору оптимального для конкретного набора значений метода. Проведено сравнение ошибки оценивания с получаемой при использовании одного измерителя, сделаны выводы относительно целесообразности использования каждого из двух обозначенных в начале путей.

**Ключевые слова:** фильтр Калмана, комплексирование измерителей, многоскоростные системы, виртуальный сенсор, расширение вектора состояния, экстраполяция нулевого порядка, предсказание, коррекция, объединение измерений, объединение векторов состояния.

**Для цитирования:** Понятский В. М., Зенов Б. В. Повышение временного разрешения оценки состояния процесса с помощью фильтрации Калмана // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 3. С. 635-644. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.635-644

© Понятский В. М., Зенов Б. В., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Increasing Time Resolution of State Estimation Using Kalman Filtering

V. M. Ponyatsky, B. V. Zenov\*

KBP Instrument Design Bureau, Tula, Russia  
59 Shcheglovskaya Zaseka Str., Tula 300001, Russia

\* zbv89@mail.ru

### Abstract

The problems of state estimation using the Kalman filtering in the presence of a sensor with a less time resolution of measurements compared to required one are considered. Two ways of solving the problem are highlighted: the output sampling rate lifting using a single sensor and introducing into the system a second one that satisfies the requirement for time resolution of the output data, but is not accurate enough, followed by a fusion of these readings. The analysis of known methods for the state estimates lifting using a single sensor is completed, some modifications are proposed. Using these results, some versions of fusion algorithms based on the known ones developed for combining measurements with the same sampling rates and adapted to considered problem, including measurement fusion before Kalman filter, state vector fusion and its succeeding modifications, are proposed. Well-known published fusion algorithms originally designed for multi-rate sensor fusion are also presented. A comparison of the results of all the algorithms is performed by state estimation using the measurements with various noise and various ratios of the intervals between samples, response to changing the band-pass properties of filter loop is studied. Some advances to choose the optimal method for a special set of values are proposed. A comparison with single sensor technique is completed by evaluation the estimation error, conclusion remarks on advisability of using each of two described techniques are given.

**Keywords:** Kalman filter, sensor fusion, multi-rate systems, soft sensor, state lifting, zero-order hold, prediction, correction, measurement fusion, state vector fusion.

**For citation:** Ponyatsky V.M., Zenov B.V. Increasing Time Resolution of State Estimation Using Kalman Filtering. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(3):635-644. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.635-644



## Введение

С развитием цифровых информационно-измерительных систем и появлением доступных быстродействующих вычислителей появилась возможность повышения точности управления объектами за счет снижения интервалов дискретизации получаемых оценок состояния. Однако не всегда имеющиеся в системе измерители способны обеспечить выдачу показаний на желаемой высокой частоте. В одних случаях это бывает связано с физической природой исследуемого процесса (например, [1-6]), в других с конструктивными или функциональными особенностями системы. Характерным примером последней ситуации может служить система, в которой датчик и вычислитель разделены пространственно, а особенности канала связи между ними таковы, что не позволяют передавать информацию с частотой обработки данных в вычислителе. Для решения данной проблемы можно пойти двумя альтернативными путями.

Первый путь заключается в программной генерации недостающих данных. Одним из наиболее очевидных способов такой генерации является экстраполяция редких измерений, полученных с датчика, на временные интервалы более частой сетки, соответствующей требованиям решаемой задачи. Так, для этих целей может применяться как простая линейная экстраполяция, так и более сложные полиномиальные зависимости, учитывающие несколько предыдущих полученных показаний [7]. Однако в присутствии шумов измерений, а также при значительной временной динамике процесса и присутствии колебательной составляющей результаты могут быть неудовлетворительными. Альтернативой для процессов с априори известной математической моделью протекания, позволяющих выполнить оценку их переменных состояния методами калмановской фильтрации, является программное вычисление выходных оценок фильтра с высокой частотой по редким данным измерителя (подход, получивший название «soft sensor» [8]).

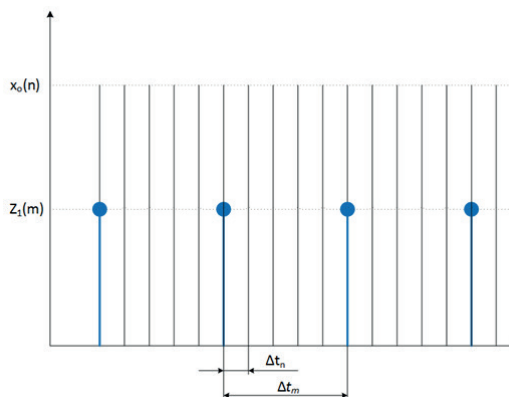
Вторым путем решения задачи оценки состояния с высоким временным разрешением является добавление в систему второго измерителя, выдающего данные с требуемой частотой, и последующее комплексирование его показаний с данными первого измерителя. Попытки практической реализации измерителя, функционально и конструктивно единого с вычислительным устройством, во многих случаях приводят к ограничениям на габариты измерителя и, как следствие, ухудшению его точностных характеристик и повышению уровня шумов в выходных данных. Известные работы в области комплексирования измерений отталкиваются от априорного наличия системы измерителей и необходимости построения алгоритмов, оптимальным образом объединяющих их показания, в большинстве случаев основанных на различии шумов датчиков и отличающихся способами учета этих различий, например, взвешиванием пришедших измерений обратно пропорционально мощности шумов [9], учету их взаимной корреляции [10] и т.д. Однако остается открытым вопрос, позволит ли такое комплексирование, в случае использования сильно зашумленных данных второго измерителя, получить оценку более точную по сравнению с наличием одного измерителя и использованием подхода «soft sensor».

Целью работы является выбор наиболее приемлемого подхода к высокоразрешающему оцениванию переменных со-

стояния процесса с точки зрения минимальной дисперсии ошибки оценки при наличии в системе измерителя с достаточно точными, но редкими во времени измерениями.

## Повышение временного разрешения оценки состояния процесса по данным одного измерителя

Из требования получения на выходе фильтра Калмана оценки с частотой следования отсчетов, отличной от частоты отсчетов измерений, вытекает необходимость его работы в многоскоростном режиме. На рис.1 показаны временные соотношения периодов следования измерений и работы фильтра. Оценка вектора состояния на каждом шаге вычислений получается путем прогнозирования с использованием полученной на предыдущем шаге. Относительно вычисления скорректированной оценки единого мнения в известных работах не выработано. Так, в [8] авторы утверждают, что оптимальным является обнуление коэффициентов усиления при инновации в уравнении коррекции оценки на тех временных тактах, когда отсутствуют данные с измерителя. Таким образом, скорректированная оценка вычисляется только в моменты получения измерений, а остальных же итерациях работы фильтра оценка состояния является обычной экстраполяцией полученной ранее оценки. Напротив, в [11] авторы, взяв за базовый вариант описанный выше алгоритм, модифицировали его таким образом, что коррекция производится на всех тактах по последнему пришедшему измерению, причем ее коэффициенты постоянны. В свою очередь, авторы работы [8] заявляют, что предложенный в [11] метод не оптимален.



Р и с. 1. Соотношение интервалов между измерениями и выходными оценками состояния

Fig. 1. The ratio of the intervals between measurements and output state estimates

В данном разделе рассмотрим подробнее эти два подхода и проведем моделирование их работы для выявления достоинств и недостатков.

### 1.1. Повышение временного разрешения оценки состояния процесса прогнозированием вектора состояния при отсутствии измерений

В предложенном в [8] виде алгоритм оценки имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$



$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n|n-1) &= \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q}(n) + \mathbf{Q}, \\ \mathbf{K}(n) &= \begin{cases} \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T\{\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T(n) + \mathbf{R}\}^{-1} & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0, \\ 0 & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0, \end{cases} \\ \mathbf{x}_o(n) &= \mathbf{x}_o(n|n-1) + \mathbf{K}(n)\{z(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\}, \\ \mathbf{P}(n) &= \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}\left(\text{trunc}\left[\frac{n-1}{q}\right] \cdot q\right)\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_o(n)$  – оценка вектора состояния наблюдаемого процесса;  $\mathbf{x}_o(n|n-1)$  – прогнозная оценка вектора состояния наблюдаемого процесса;

$$z(n) = Z_1\left(\text{trunc}\left[\frac{n-1}{q}\right] + 1\right) - \text{наблю-}$$

дения на входе фильтра с интервалом  $\Delta t_n$ ,  $Z_1(m)$  – показания датчика с интервалом следования  $\Delta t_m$ ,  $n = 1, 2, \dots, \frac{T}{\Delta t_n}$ ,

$m = 1, 2, \dots, \frac{T}{\Delta t_m}$ ,  $\Delta t_m = q\Delta t_n$ ,  $T$  – время наблюдения,  $q$  – отно-

шение частоты отсчетов выходных оценок фильтра к частоте выдачи измерений,  $\Delta t_n$  – временной интервал между двумя соседними оценками,  $\Delta t_m$  – временной интервал между двумя

последовательными измерениями,  $\Phi(n)$  – матрица упреждения;  $\mathbf{H}(n)$  – матрица наблюдения;  $\mathbf{K}(n)$  – матрица коэффициентов усиления;  $\mathbf{P}(n|n-1)$  – дисперсионная матрица предсказания вектора состояния наблюдаемого процесса;  $\mathbf{P}(n)$  – дисперсионная матрица оценки вектора состояния наблюдаемого процесса;  $\mathbf{R}$  – матрица интенсивности шумов;  $\mathbf{Q}$  – матрица интенсивности полезного сигнала;  $\mathbf{U}(n)$  – вектор управления;  $\mathbf{V}(n)$  – матрица коэффициентов управления.

Таким образом, коррекция ковариационной матрицы осуществляется на каждом такте, но с использованием коэффициентов усиления, рассчитанных в момент прихода измерения.

В [12] предлагается вычислять скорректированное значение ковариационной матрицы только одновременно с вычислением усиления, то есть в моменты прихода измерений. Такой подход представляется более целесообразным, поскольку не использует усиление «из прошлого» для коррекции оценки ковариации, экстраполированной к текущему моменту.

В данной работе рассмотрим еще одну схему, отличие которой заключается в вычислении коэффициентов коррекции на каждом этапе фильтрации по прогнозным значениям ковариационной матрицы и использованию их для получения ее обновленной оценки. Уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_o(n|n-1) &= \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{V}(n)\mathbf{U}(n), \\ \mathbf{P}(n|n-1) &= \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q}, \\ \mathbf{K}(n) &= \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T\{\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T(n) + \mathbf{R}\}^{-1}, \\ \mathbf{x}_o(n) &= \mathbf{x}_o(n|n-1) + S(n)\mathbf{K}(n)\{z(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\}, \\ \mathbf{P}(n) &= \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1), \end{aligned}$$

где  $S(n) = \begin{cases} 1 & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0 \\ 0 & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0 \end{cases}$  – признак наличия или

отсутствия измерений.

## 1.2. Повышение временного разрешения оценки состояния процесса вычислением скорректированных оценок по экстраполированным значениям измерения

Фактически подход [11] сводится к схеме фильтрации Калмана, на вход которой подаются измерения, подвергнутые оператору экстраполяции нулевого порядка (ZOH). Уравнения имеют следующий вид:

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{V}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n) &= \mathbf{K}(mq) = \mathbf{K}(mq+1) = \dots = \mathbf{K}((m+1)q) = \\ &= \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T\{\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T(n) + \mathbf{R}\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + \mathbf{K}(n)\{z(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\},$$

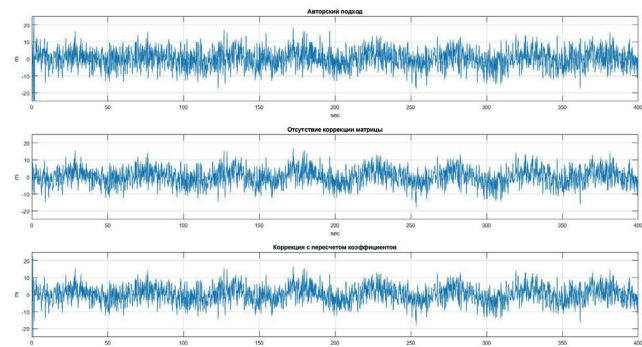
$$z(n) = z(mq) = z(mq+1) = \dots = z((m+1)q) = Z_1\left(\text{trunc}\left[\frac{n-1}{q}\right] + 1\right),$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1).$$

## 1.3. Сравнение результатов

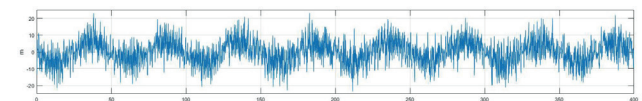
Сравнительную оценку эффективности работы методов с точки зрения минимизации среднеквадратической ошибки проведем на примере оценивания параметров гармонического процесса с частотой 0.02 Гц по данным измерителя, приходящим с частотой в  $q$  раз меньше требуемой частоты выходных оценок (по умолчанию принято  $q=5$ ), с присутствием аддитивного гауссовского шума, при этом отношение сигнал/шум принято равным 40 дБ.

Графики ошибок на выходе вариантов схем фильтрации, выработанных в рамках первого подхода, показаны на рис. 2. На рис. 3 приведена ошибка оценивания, полученная в ходе фильтрации по второму методу с использованием экстраполяции входных данных фильтра. Результаты свидетельствуют о возрастании ошибки и наличии смещения в выходных данных.



Р и с. 2. Ошибка оценки состояния процесса с помощью прогнозирования при отсутствии измерений

Fig. 2. Error in assessing the status of a process through prediction with no measurements



Р и с. 3. Ошибка оценки состояния процесса с помощью использования экстраполированных значений измерения

Fig. 3. Error of assessing process status through the use extrapolated measurement values

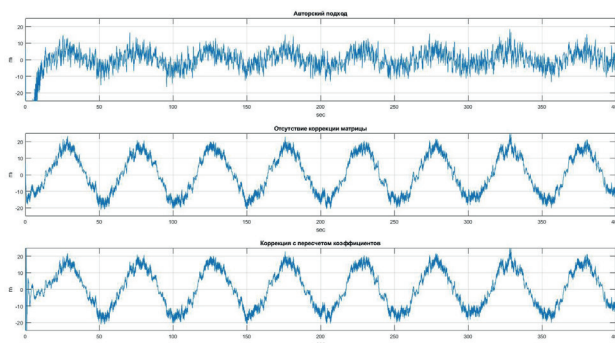


Таблица 1. Погрешности оценок состояния, полученных по одному редкому наблюдению  
Table 1. Errors of state estimates of one rare observation

	Перевод в режим прогнозирования						Экстраполяция	
	1 вариант		2 вариант		3 вариант		М	σ
	М	σ	М	σ	М	σ		
$q=5, Q=Q_0, R_1=R_{10}$	0.133	5.14	0.13	4.78	0.13	4.78	0.352	6.1
$q=5, Q=0.01Q_0, R_1=R_{10}$	0.132	5.82	0.215	16.6	0.215	16.6	0.352	6.27
$q=5, Q=Q_0, R_1=10R_{10}$	0.071	5.07	0.053	5.92	0.053	5.92	0.151	6.02
$q=5, Q=Q_0, R_1=50R_{10}$	0.292	4.99	0.251	10.7	0.251	10.7	0.07	5.87
$q=10, Q=Q_0, R_1=R_{10}$	inf	inf	0.335	6.43	0.336	6.43	0.83	10.7

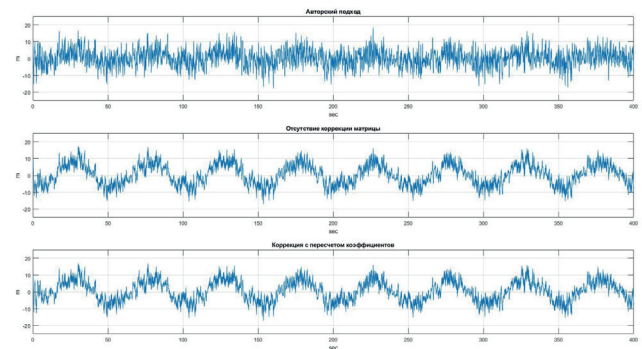
Стоит отметить, что по своим частотным свойствам метод прогнозирования без коррекции является более узкополосным вследствие фильтрации на редкой временной сетке. Для исследования частотных свойств методов проводилось моделирование их работы при значениях  $Q$  и  $R_1$ , отличающихся от оптимальных (минимизирующих ошибку оценки состояния при функционировании фильтра на штатной временной сетке, соответствующей периодичности поступления измерений, без ее расширения). Математические ожидания и среднеквадратические отклонения результатов фильтрации, представленные в таблице 1 и на рис. 4-5, указывают на большую устойчивость авторского варианта метода прогнозирования к вариациям полюсов по сравнению с модифицированными, для которых при чрезмерном сужении полосы характерно возникновение фазовой задержки и наличие гармонической составляющей в выходной ошибке. Судя по результатам, можно говорить о фактической эквивалентности второго и третьего вариантов данного метода, дающих лучшую точность при стандартно заданных параметрах. Таким образом, при переводе фильтра в режим прогнозирования вектора состояния коррекцию ковариационной матрицы можно не выполнять в целях снижения вычислительной нагрузки, а можно выполнять, но обязательно с использованием коэффициентов коррекции, рассчитанных на текущем временном такте.

Также отмечается полная неработоспособность авторского варианта прогнозирования оценки при возрастании промежутков между измерениями, что показано на рис. 6.



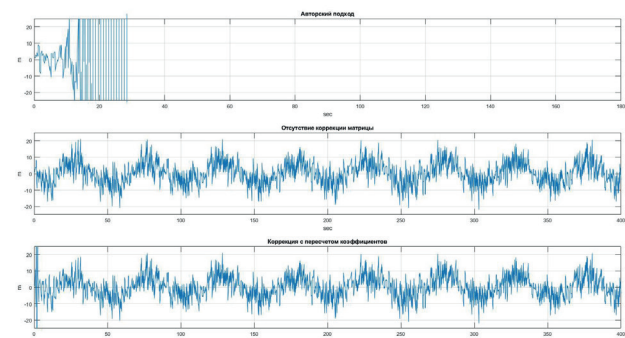
Р и с. 4. Ошибка оценки состояния процесса с помощью прогнозирования при отсутствии измерений при заниженной в 100 раз априори заданной мощности шума процесса

Fig. 4. The error in assessing the state of the process obtained through prediction in the absence of measurements at a 100 times underestimated a priori specified noise power of the process



Р и с. 5. Ошибка оценки состояния процесса с помощью прогнозирования при отсутствии измерений при завышенной в 10 раз априори задаваемой мощности шума

Fig. 5. The error in assessing the state of the process obtained through prediction in the absence of measurements at a 10 times underestimated a priori specified noise power of the process



Р и с. 6. Ошибка оценки состояния процесса с помощью прогнозирования при отсутствии измерений при больших интервалах между моментами прихода измерений

Fig. 6. The error in assessing the state of the process obtained through prediction with no measurements at large intervals between the moments of arrival of measurements

## Комплексирование показаний двух датчиков

При выборе калмановской фильтрации в качестве базовой методологии комплексирования существует три принципиально возможных способа объединения данных: до начала фильтрации, после и в процессе ее. В первом случае можно говорить об объединении измерений (measurement fusion), данный метод достаточно известен в литературе и существует в



двух модификациях: векторизация измерений и взвешивание обратно пропорционально мощностям их шумов  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ . Изначально они были ориентированы на работу с измерениями с одинаковой частотой отсчетов. При таких условиях их выходные результаты эквивалентны. В нашем случае, при различии частот следования информации с измерителей, данное утверждение требует проверки.

Во втором случае, при комплексировании после фильтрации, можно говорить об объединении векторов состояния (state vector fusion). В первоначальном виде метод был предложен Бар-Шаломом с соавторами в [10] как альтернатива объединению измерений при наличии в них взаимной корреляции и основывался на работе двух параллельных фильтров Калмана, вычислении взаимной ковариационной функции и последующем ее учете в весовых коэффициентах при получении итоговой оценки вектора состояния. Именно в таком виде этот метод сравнивался с методом объединения измерений в работах [13-14], причем итоговые мнения относительно эффективности разошлись. Так, в [13] утверждается, что подход на основе объединения измерений позволяет получить меньшую ошибку итоговой оценки, в то время как в [14], напротив, анализ показал превосходство метода объединения векторов состояния. В [15] этот метод получил развитие в виде двух модифицированных версий, одна из которых предполагала объединение скорректированных оценок не за пределами контуров фильтрации, а внутри контура, становившегося единым и содержащего также единую операцию прогнозирования, а вторая содержала две операции объединения данных: одну в контуре фильтрации после прогнозирования оценок и одну за пределами контура на основе оценок после коррекции. В данной работе мы не акцентируем внимание на взаимной корреляции оценок, считая измерения слабо коррелированными, и потому не используем предложенные методы в изначальном их виде. Вместо вычисления весовых коэффициентов с учетом взаимной ковариационной функции возьмем более простой метод объединения некоррелированных оценок с выходов двух параллельных фильтров Калмана путем их взвешивания обратно пропорционально оценкам их ковариаций [16-18] и распространим на него методологию, предложенную в [15] для коррелированных оценок. Также в силу различия частот следования измерений с двух датчиков для одной из параллельных структур коррекции в данной схеме нам придется использовать способы, рассмотренные ранее в предыдущем разделе – либо обнуление коэффициентов коррекции на тактах отсутствия показаний с точного датчика, либо экстраполяцию его данных.

Наконец, методы, основанные на объединении данных непосредственно в теле фильтра, а именно в уравнении коррекции, изначально разрабатывались, в отличие от предыдущих двух групп, для измерителей с разными интервалами следования показаний. В [19] был предложен метод изменения размера вектора измерений  $\mathbf{z}(n)$  в зависимости от наличия или отсутствия показаний более точного датчика и, как следствие, переменных размеров матриц наблюдения  $\mathbf{H}(n)$  и усиления  $\mathbf{K}(n)$ . Позже, в работе [20], метод получил название «switching». В [21] предложено ввести в вектор состояния дополнительную переменную, учитывающую уход показаний менее точного датчика на интервалах между временами прихода точных измерений. При этом меняется уже не размерность матриц, входящих в уравнение коррекции, а само уравнение кор-

рекции, используя при наличии точного измерения только его и основываясь на его уравнении наблюдения, а при отсутствии – на уравнении наблюдения менее точного датчика.

Далее будут рассмотрены подробнее названные методы и проведено их моделирование.

### 2.1. Объединение показаний на входе путем векторизации

Поскольку отказ от учета показателей датчика, когда данные по нему отсутствуют, фактически приводит к ситуации переменности размеров матриц наблюдения и усиления, которая будет рассмотрена позднее в качестве отдельного метода, в данном случае рассматривается только коррекция по экстраполированным данным точного измерителя. Алгоритм фильтрации будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T\{\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T(n) + \mathbf{R}\}^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + \mathbf{K}(n)\{\mathbf{z}(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\},$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1).$$

где  $\mathbf{z}(n) = \begin{bmatrix} Z_1\left(\text{trunc}\left[\frac{n-1}{q}\right] + 1\right) \\ Z_2(n) \end{bmatrix}$ ,  $Z_1(m)$  - показания

первого датчика с интервалом следования  $\Delta t_m$ ,  $Z_2(n)$  - показания второго датчика с интервалом следования  $\Delta t_n$ ,  $\Delta t_m = q\Delta t_n$ .

### 2.2. Объединение показаний на входе путем взвешивания

В данном случае рассматриваются отдельно случаи отказа от использования данных точного измерителя на тактах, когда информация с него не поступала, и использования старых поступивших значений. Общая схема фильтрации будет выглядеть классическим образом:

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T\{\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T(n) + \mathbf{R}(n)\}^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + \mathbf{K}(n)\{\mathbf{z}(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\},$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1),$$

при этом

$$\mathbf{z}(n) = \begin{cases} Z_1(m) + \mathbf{R}_1\left(\sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_i\right)^{-1} (Z_2(n) - Z_1(m)) & \text{для } \text{mod}(n, q) \\ Z_2(n) & \text{для } \text{mod}(n, q) \end{cases}$$

в первом случае (при оценивании состояния процесса по данным второго измерителя в отсутствие показаний первого) и

$$\mathbf{z}(n) = Z_1\left(\text{trunc}\left[\frac{n-1}{q}\right] + 1\right) + \mathbf{R}_1\left(\sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_i\right)^{-1} \left(Z_2(n) - Z_1\left(\text{trunc}\left[\frac{n-1}{q}\right] + 1\right)\right)$$

во втором случае (при использовании старых значений точных измерений),



$$\mathbf{R}(n) = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_i^{-1} \right)^{-1} & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0 \\ \mathbf{R}_2 & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0 \end{cases} \text{ для первого}$$

случая и  $\mathbf{R}(n) = \left( \sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_i^{-1} \right)^{-1}$  для второго.

### 2.3. Объединение выходных оценок двух параллельных фильтров Калмана

На рис. 7 представлена общая схема работы подобного метода. Один из фильтров данной схемы, вырабатывающий оценки по данным с более точного датчика, как и в первом разделе, может работать в режиме прогнозирования либо использовать экстраполированные данные. Алгоритм выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}_{io}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_{io}(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}_i(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}_i(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{K}_i(n) = \mathbf{P}_i(n|n-1)\mathbf{H}_i^T \{ \mathbf{H}_i(n)\mathbf{P}_i(n|n-1)\mathbf{H}_i^T(n) + \mathbf{R}_i \}^{-1},$$

$$\mathbf{x}_{io}(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + S_i(n)\mathbf{K}_i(n)\{z_i(n) - \mathbf{H}_i(n)\mathbf{x}_{io}(n|n-1)\},$$

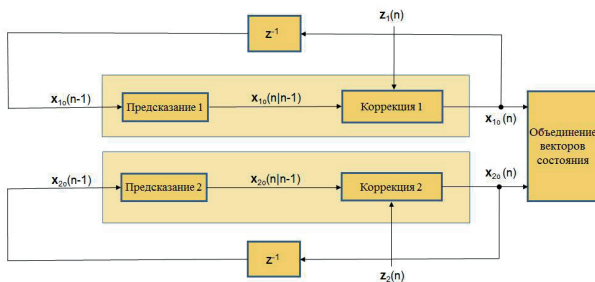
$$\mathbf{P}_i(n) = \mathbf{P}_i(n|n-1) - \mathbf{K}_i(n)\mathbf{H}_i(n)\mathbf{P}_i(n|n-1),$$

$$\mathbf{P}(n) = \left( \sum_{i=1}^2 (\mathbf{P}_i(n))^{-1} \right)^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \sum_{i=1}^2 \left( (\mathbf{P}_i(n))^{-1} \mathbf{x}_{io}(n) \right),$$

где  $\mathbf{x}_{io}(n)$  – оценки векторов состояний наблюдаемого процесса в соответствии с наблюдениями  $\mathbf{z}_i(n)$ ,  $i=1,2$ ,  
 $S_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0 \\ 0 & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0 \end{cases}$  при переводе одного из фильтров

в режим прогнозирования и  $S_1(n) = 1$  при экстраполяции точного измерения,  $S_2(n) = 1$ .



Р и с. 7. Комплексирование на выходе параллельных фильтров Калмана  
F i g. 7. Fusion at the parallel Kalman filters output

### 2.4. Объединение оценок состояния в контуре фильтрации

Схема подобного метода приведена на рис. 8. В отличие от предыдущего метода, объединенная оценка используется на следующем этапе фильтрации при вычислении прогноза. Такой схеме соответствует следующий алгоритм:

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

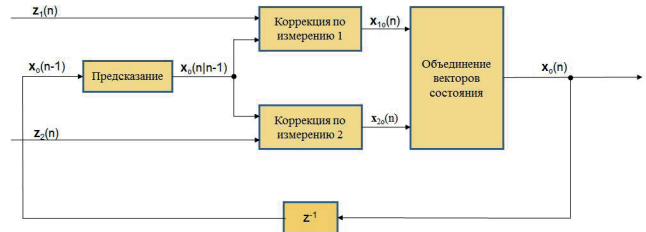
$$\mathbf{K}_i(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}_i^T \{ \mathbf{H}_i(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}_i^T(n) + \mathbf{R}_i \}^{-1},$$

$$\mathbf{x}_{io}(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + S_i(n)\mathbf{K}_i(n)\{z_i(n) - \mathbf{H}_i(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\},$$

$$\mathbf{P}_i(n) = \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}_i(n)\mathbf{H}_i(n)\mathbf{P}(n|n-1),$$

$$\mathbf{P}(n) = \left( \sum_{i=1}^2 (\mathbf{P}_i(n))^{-1} \right)^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \sum_{i=1}^2 \left( (\mathbf{P}_i(n))^{-1} \mathbf{x}_{io}(n) \right).$$



Р и с. 8. Комплексирование в контуре фильтрации при единой операции прогнозирования  
F i g. 8. Fusion in the filtering circuit with a single forecasting operation

### 2.5. Двукратное объединение оценок

Схема с объединением оценок как после прогнозирования, так и после коррекции приведена на рис. 9. Ей будут соответствовать следующие математические зависимости:

$$\mathbf{x}_{io}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_{io}(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}_i(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}_i(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \left( \sum_{i=1}^2 (\mathbf{P}_i(n|n-1))^{-1} \right)^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \sum_{i=1}^2 \left( (\mathbf{P}_i(n|n-1))^{-1} \mathbf{x}_{io}(n|n-1) \right),$$

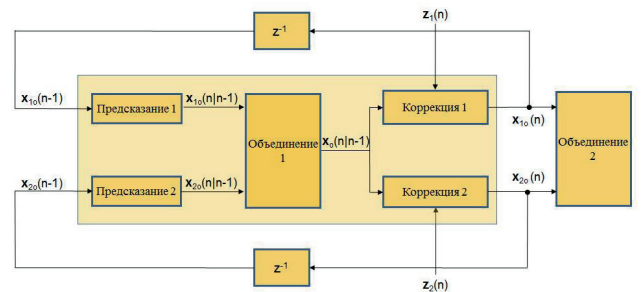
$$\mathbf{K}_i(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}_i^T \{ \mathbf{H}_i(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}_i^T(n) + \mathbf{R}_i \}^{-1},$$

$$\mathbf{x}_{io}(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + S_i(n)\mathbf{K}_i(n)\{z_i(n) - \mathbf{H}_i(n)\mathbf{x}_o(n|n-1)\},$$

$$\mathbf{P}_i(n) = \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}_i(n)\mathbf{H}_i(n)\mathbf{P}(n|n-1),$$

$$\mathbf{P}(n) = \left( \sum_{i=1}^2 (\mathbf{P}_i(n))^{-1} \right)^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \sum_{i=1}^2 \left( (\mathbf{P}_i(n))^{-1} \mathbf{x}_{io}(n) \right).$$



Р и с. 9. Комплексирование оценок дважды за итерацию  
F i g. 9. Fusion of estimates twice per iteration



## 2.6. Фильтр с переменным размером матриц наблюдения и усиления

В соответствии с предложенными в [19] зависимостями алгоритм выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}_o(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{x}_o(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{U}(n),$$

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \Phi(n)\mathbf{P}(n-1)\Phi^T(n) + \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T \{ \mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{H}^T(n) + \mathbf{R}(n) \}^{-1},$$

$$\mathbf{x}_o(n) = \mathbf{x}_o(n|n-1) + \mathbf{K}(n) \{ \mathbf{z}(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}_o(n|n-1) \},$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{P}(n|n-1),$$

$$\mathbf{z}(n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} Z_1 \left( \frac{n-1}{q} + 1 \right) \\ Z_2(n) \end{bmatrix} & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0, \\ Z_2(n) & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0, \end{cases}$$

$$Z_1 = \mathbf{H}_1\mathbf{x} + v_1, Z_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{x} + v_2,$$

$$\mathbf{H}(n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(n) \\ \mathbf{H}_2(n) \end{bmatrix} & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0, \\ \mathbf{H}_2(n) & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}(n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(n) \\ \mathbf{R}_2(n) \end{bmatrix} & \text{для } \text{mod}(n, q) = 0, \\ \mathbf{R}_2(n) & \text{для } \text{mod}(n, q) \neq 0, \end{cases}$$

В данной работе мы исследуем его в авторской версии, без каких-либо корректировок.

2.7. Введение случайного ухода показаний менее точного датчика в вектор состояния

В [21] предлагается неточность показаний одного из датчиков учитывать в виде случайного смещения  $\beta(n) = \beta(n-1) + w_\beta$ . При этом уравнения наблюдения примут вид:

$$Z_1 = \mathbf{H}_1\mathbf{x} + v_1, Z_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{x} + \beta + v_2.$$

В остальном данный метод использует классическую схему фильтрации Калмана, уже представленную ранее.

## Результаты моделирования

Сравнительный анализ методов получения высокоразрешающей оценки состояния проводился при различных отношениях сигнал/шум  $\rho$ , рассчитанных по показаниям точного датчика, соотношениях длительностей интервалов между его измерениями и выходными результатами  $q$  и отношениях среднеквадратических отклонений шумов двух измерителей при их комплексировании  $\gamma$ . Также исследовалось влияние частотных свойств фильтра при различных задаваемых значениях мощностей шумов измерений и процесса. Полученные среднеквадратические ошибки оценок на выходе сведены в таблицу 2, в которой приняты следующие обозначения:

Orig. – ошибка оценивания при использовании классической схемы фильтрации Калмана и наблюдений со второго,

менее точного, измерителя без применения каких-либо алгоритмов;

SL – расширение сетки отсчетов оценки состояния (state lifting) первого, более точного, измерителя при отсутствии второго;

F1 – комплексирование (fusion) с помощью векторизации измерений на входе;

F2 – комплексирование измерений на входе с помощью взвешенного суммирования;

F3 – комплексирование векторов состояния на выходах двух параллельных фильтров Калмана;

F4 – комплексирование векторов состояния в общем контуре фильтрации после коррекции;

F5 – комплексирование векторов состояния после прогнозирования и после коррекции;

F6 – комплексирование измерений в уравнении коррекции с переменными размерностями матриц;

F7 – комплексирование с помощью введения дополнительной компоненты в вектор состояния;

индексы  $a$  и  $b$  соответствуют обнулению коэффициента для учета показания точного датчика при его отсутствии на текущем такте и использованию экстраполированного старого значения.

В соответствии с полученными данными можно утверждать, что во многих случаях вопрос о необходимости использования комплексирования показаний двух датчиков или же переразбиении сетки одного остается открытым. Наиболее явно комплексирование имеет преимущества над расширением сетки отсчетов для одного датчика в случае малого отношения периодов следования первого и второго измерений (например,  $q=2$ ). Однако уже при  $q=5$  они способны показать равные результаты. Также существенный проигрыш в точности оценки, полученной по данным одного датчика, получается при малом соотношении между шумами первого и второго датчиков.

Как можно заметить, для всех методов комплексирования в большинстве случаев использование режима прогнозирования в интервалах между точными измерениями является более предпочтительным по сравнению с их экстраполяцией.

Среди всех рассмотренных методов комплексирования чаще всего оптимальными оказываются объединение оценок на выходе двух параллельных фильтров и объединение в уравнении коррекции при переменных размерностях матриц. Оба метода объединения векторов состояния, являющиеся модификациями объединения результатов работы параллельных фильтров, при малых шумах и малых соотношениях частот следования показаний показывают схожие с ним результаты, но при выборе более жестких параметров функционирования оказываются неработоспособны. Однако, как можно заметить, классический метод объединения оценок состояния, в отличие от них, чувствителен к возрастанию  $Q$ .

Объединение измерений на входе путем вычисления взвешенной суммы исходя из априори заданных мощностей шумов в большинстве случаев проигрывает по точности. Однако при заужении полосы фильтра путем уменьшения  $Q$  данный метод способен дать наилучшую оценку. В то же время повышение априори задаваемых значений шумов измерений приводит к ухудшению его результатов. Заметна значительная чувствительность к вариациям полосы пропускания.

С другой стороны, метод объединения показаний на вхо-





Таблица 2. Среднеквадратическая ошибка на выходе схемы фильтрации  
Table 2. The standard error of the output filter circuit

	Orig.	SLa	SLb	F1	F2a	F2b	F3a	F3b	F4a	F4b	F5a	F5b	F6	F7
q=2, ρ=40 дБ, γ=2	4.5	4.3	4.7	3.4	4.3	4.6	4	4.4	4.3	4.4	4.3	4.3	3.1	5.5
q=2, ρ=40 дБ, γ=2, 0.1R <sub>1</sub>	6.7	4.3	4.7	5.2	5	4.2	2.9	3.3	3.8	4	3.9	3.9	4	5.5
q=2, ρ=40 дБ, γ=2, 0.1Q	6.7	5.4	3.7	3.4	3.4	3.6	3.7	3.6	11.8	6.8	9.5	7.7	3.3	5.5
q=2, ρ=40 дБ, γ=2, 5Q	5.8	4.7	4.9	3.7	4.6	4.8	inf	inf	4.6	4.7	4.6	4.6	4.3	5.5
q=2, ρ=40 дБ, γ=5	8.7	4.3	4.7	3.6	4.6	4.7	3.7	4.2	4.5	4.5	4.5	4.5	3.3	5.5
q=2, ρ=40 дБ, γ=10	14	4.3	4.7	3.7	4.6	4.7	3.7	4.2	4.5	4.6	4.5	4.5	3.8	5.5
q=5, ρ=40 дБ, γ=2	4.5	4.8	6.5	5.3	4.2	6.3	4.3	5.8	5.2	6.6	5.3	6.5	3.7	7.7
q=5, ρ=40 дБ, γ=2, 0.1R <sub>1</sub>	6.7	4.8	6.1	5.8	6	5.4	3.2	4.6	5.3	5.5	5.8	5.3	6.1	7.4
q=5, ρ=40 дБ, γ=2, 0.1Q	6.6	6	5.9	5.6	4.3	5.8	6.8	5.6	28	9.5	19	10	4.5	7.5
q=5, ρ=40 дБ, γ=5	8.9	4.8	6.1	5.5	5	6.1	4.6	5.8	7.2	6.3	7.2	6.4	4.9	7.3
q=5, ρ=40 дБ, γ=5, 0.1R <sub>1</sub>	10.1	4.8	6.1	5.5	6.3	6.2	4.3	5.6	7.9	6.3	7.1	6.3	7.7	7.4
q=5, ρ=40 дБ, γ=5, 0.1Q	20.6	5.9	5.5	6	4.8	6.1	7.4	6.2	31	10	20	10.9	6.5	7.6
q=5, ρ=40 дБ, γ=5, 0.1R <sub>1</sub> , 5R <sub>1</sub>	24.4	16.6	6.3	7.4	7.5	7.5	6	7.8	9.2	7.4	8.1	7.4	6.9	6.5
q=5, ρ=40 дБ, γ=5, 10R <sub>1</sub>	20.9	4.8	6.1	5.8	5.2	6.4	4.8	6.1	8.6	6.6	7.5	6.7	5.7	7.5
q=5, ρ=40 дБ, γ=5, 10R <sub>1</sub> , 0.1R <sub>1</sub>	10	5	6.1	5	6.8	5.8	4.6	5.1	12	7	10	7	8	11
q=2, ρ=30 дБ, γ=2	10	8.6	10.4	8.1	9.5	10.3	7.2	8.7	12	9.3	10	9.5	7	14
q=2, ρ=30 дБ, γ=5	19.4	8.6	10.4	8.4	9.8	10.4	7.5	9	12	9.7	11	10	8	14
q=5, ρ=30 дБ, γ=2	9.6	10.3	13.5	11	11	13.2	9.6	11.8	26	13.1	19	13.2	8.1	17
q=5, ρ=30 дБ, γ=5	18.9	10.3	13.5	12	12.9	13.5	9.3	12.2	27	14.2	19	13.8	11	17
q=5, ρ=30 дБ, γ=10	30.1	10.3	13.5	12	13.8	13.6	9.9	12.5	27	14.7	19	13.9	11	17
q=5, ρ=30 дБ, γ=10, 0.1Q, 0.1R <sub>1</sub>	31	16.1	11.5	10	10.1	10.7	17.9	10.9	inf	44	inf	47	13	17
q=2, ρ=20 дБ, γ=2	23.3	17.1	21.5	17	18.1	20.7	14.8	17.5	inf	46	62	47	16	47
q=2, ρ=20 дБ, γ=5	44.5	17.3	21.5	19	19.7	21.7	16.4	19.7	inf	48	64	50	17	47
q=5, ρ=20 дБ, γ=5	44.9	25.2	33.3	29	26.2	32.6	24.8	29.6	inf	50	inf	51	25	49
q=5, ρ=20 дБ, γ=5, 0.1Q	67.5	57.3	23.6	23	21.8	23.1	60	24.6	inf	inf	inf	inf	32	49
q=10, ρ=40 дБ, γ=5	8.8	6.3	10.3	9.6	5.6	10.3	7.1	10	16.4	10.6	13	10.7	6.3	11
q=10, ρ=30 дБ, γ=5	19	13	17.4	16	14.7	17.3	13.5	16.7	36	17	33	17.3	11.7	20
q=10, ρ=20 дБ, γ=5	47	31.8	47	43	41.4	47	29.6	44	40	26	34	25.5	30.3	35
q=10, ρ=20 дБ, γ=5, 0.1R <sub>1</sub> , 0.1R <sub>2</sub>	57	34	50.4	44	46.8	46.8	31.7	46.6	42	44	36	42	31	31

де путем их векторизации и прямого внедрения в уравнение коррекции показывает более точные результаты при снижении  $R_2$  и повышении  $R_1$ . В целом даваемые им результаты редко достигают оптимальных среди всех методов значений.

Метод, основанный на введении дополнительной переменной, моделирующей уход показаний второго датчика, в вектор состояния, при умеренных значениях шумов дает неизменно худшие результаты по сравнению с другими методами. При существенных уровнях шумов в показаниях обоих измерителей и при коррекции полосы путем снижения  $R_1$  и повышения  $R_2$  существует возможность добиться результатов сопоставимых с прочими методами комплексирования, однако целесообразность его применения, согласно полученным результатам, отсутствует.

## Заключение

Широкое многообразие методов достижения высоких разрешений выходных оценок состояния диктует необходимость тщательного анализа параметров задачи для выбора наиболее эффективного. При достаточно умеренных различиях периодов следования измерений и выходных отсчетов оценок, при возможности внедрения в систему датчика с уровнем шумов, незначительно отличающимся от имеющегося, выгодно применять комплексирование данных, в частности, на основе объединения векторов состояния, полученных путем фильтрации показаний каждого из датчиков отдельным параллельно включенным фильтром. В остальных случаях прогнозирование оценки состояния процесса, полученной по точным, но редко следующим наблюдениям одного датчика, дает результаты, вполне сопоставимые по точности с комплексированием.

## References

- [1] Teixeira B.O.S., Castro W.S., Teixeira A.F., Aguirre L.A. Data-driven soft sensor of downhole pressure for a gas-lift oil well. *Control Engineering Practice*. 2014; 22:34-43. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.conengprac.2013.09.005
- [2] Qiu A., Shi J., Wang S. Fault Detection for Dynamic Systems based on Multirate Sampling. *International Journal of Online and Biomedical Engineering*. 2013; 9(6):62-65. Available at: <https://www.online-journals.org/index.php/i-joe/article/view/3130> (accessed 23.07.2019). (In Eng.)
- [3] Kaya M., Denasi A., Scheggi S., Agbahca E., Yoon C., Gracias D.H., Misra S. A Multi-Rate State Observer for Visual Tracking of Magnetic Micro-Agents Using 2D Slow Medical Imaging Modalities. In: *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Madrid, 2018, pp. 1-8. DOI: 10.1109/IROS.2018.8594349
- [4] Pakzad M.A. Kalman Filter Design for Time Delay Systems // *WSEAS Transactions on Systems*. 2012; 11(10):551-560. Available at: <http://www.wseas.org/multimedia/journals/systems/2012/55-535.pdf> (accessed 23.07.2019). (In Eng.)
- [5] Ellis M.F., Taylor T.W., Gonzalez V., Jensen K.F. Estimation of the molecular weight distribution in batch polymerization. *ALChE Journal*. 1988; 34(8):1341-1353. (In Eng.) DOI: 10.1002/aic.690340812
- [6] Kurumatani H., Katsura S. State Estimation Based On Multirate Kalman Filter For Power Systems Driven By Switching Inverter. *IEEJ Journal of Industry Applications*. 2019; 8(2):231-239. (In Eng.) DOI: 10.1541.ieejia.8.231
- [7] Armesto L., Tomero J. Dual-Rate High Order Holds Based on Primitive Functions. In: *Proceedings of the 2003 American*



- Control Conference, 2003*, Denver, CO, USA, 2003, pp. 1140-1145. (In Eng.) DOI: 10.1109/ACC.2003.1239741
- [8] Sahebsara M., Chen T., Shah S.L. Optimal Fast-Rate Soft-sensor Design for Multi-rate Processes. In: *2006 American Control Conference*, Minneapolis, MN, 2006, pp. 6. (In Eng.) DOI: 10.1109/ACC.2006.1655485
- [9] Willner D., Chang C.B., Dunn K.P. Kalman filter algorithms for a multi-sensor system. In: *1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes*, Clearwater, FL, USA, 1976, pp. 570-574. (In Eng.) DOI: 10.1109/CDC.1976.267794
- [10] Bar-Shalom Y., Campo L. The Effect of the Common Process Noise on the Two-Sensor Fused-Track Covariance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1986; AES-22(6):803-805. (In Eng.) DOI: 10.1109/TAES.1986.310815
- [11] Hara T., Tomizuka M. Multi-rate Controller for Hard Disk Drive with Redesign of State Estimator. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207)*, Philadelphia, PA, USA, 1998, vol. 1.5, pp. 3033-3037. (In Eng.) DOI: 10.1109/ACC.1998.688414
- [12] Steffes S. Computationally Distributed Real-Time Dual Rate Kalman Filter. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2014; 37(4):1064-1068. (In Eng.) DOI: 10.2514/1.G000179
- [13] Roecker J.A., McGillem C.D. Comparison of two-sensor tracking methods based on state vector fusion and measurement fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1988; 24(4):447-449. (In Eng.) DOI: 10.1109/7.7186
- [14] Anitha R., Renuka S., Abudhahir A. Multi sensor data fusion algorithms for target tracking using multiple measurements. In: *2013 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Computing Research*, Enathi, 2013, pp. 1-4. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICCIC.2013.6724283
- [15] Gao J.B., Harris C.J. Some remarks on Kalman Filters for the multisensory fusion. *Information Fusion*. 2002; 3(3):191-201. (In Eng.) DOI: 10.1016/S1566-2535(02)00070-2
- [16] Guo Y., Zhao Y., Huang B. Development of soft sensor by incorporating the delayed infrequent and irregular measurements. *Journal of Process Control*. 2014; 24(11):1733-1739. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.jprocont.2014.09.006
- [17] Yan L.P., Liu B.S., Zhou D.H. The modeling and estimation of asynchronous multirate multisensory dynamic systems. *Aerospace Science and Technology*. 2006; 10(1):63-71. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.ast.2005.09.001
- [18] Dhuli R., Kandagadla M., Lall B. Multirate Kalman Filter for Sensor Data Fusion. In: *Proceedings of the Fifteenth National Conference on Communications (NCC 2009)*, January 16-18, 2009, Guwahati, India, 2009, pp. 229-233. Available at: <http://www.ncc.org.in/authorsearchindex.php?t=Kandagadla> (accessed 23.07.2019). (In Eng.)
- [19] Armesto L., Tornero J., Vincze M. Fast Ego-motion Estimation with Multi-rate Fusion of Inertial and Vision. *International Journal of Robotics Research*. 2007; 26(6):577-589. (In Eng.) DOI: 10.1177/0278364907079283
- [20] Wang Y., Kosti' D., Jansen S.T.H., Nijmeijer H. Filling the Gap between Low Frequency Measurements with Their Estimates. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Hong Kong, 2014, pp. 175-180. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICRA.2014.6906606
- [21] Xie L., Zhu Y., Huang B., Zheng Y. Kalman filtering approach to multirate information fusion for soft sensor development. In: *2012 15th International Conference on Information Fusion*, Singapore, 2012, pp. 641-648. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6289863&isnumber=6289713> (accessed 23.07.2019). (In Eng.)
- [22] Sun S.L., Deng Z.L. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter. *Automatica*. 2004; 40(6):1017-1023. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.automata.2004.01.014
- [23] Feddaoui A., Boizot N., Busvelle E., Hugel V. High-gain extended Kalman filter for continuous-discrete systems with asynchronous measurements. *International Journal of Control*. 2018; 0(0):1-14. (In Eng.) DOI: 10.1080/00207179.2018.1539525
- [24] Jazwinski A.H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New-York, Academic press, 1970. 376 pp. (In Eng.)
- [25] Rossiter J.A. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. CRC Press, 2003. 344 pp. (In Eng.)

Поступила 23.07.2019; принята в печать 25.08.2018;  
опубликована онлайн 30.09.2019.  
Submitted 23.07.2019; revised 25.08.2019;  
published online 30.09.2019.

#### Об авторах:

**Понятский Валерий Мариафович**, начальник отдела, Акционерное общество «Конструкторское бюро приборостроения им. академика А. Г. Шипунова» (300001, Россия, г. Тула, ул. Щегловская засека, д. 59), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8326-165X>, [kbkedr@tula.net](mailto:kbkedr@tula.net)

**Зенов Борис Владиславович**, ведущий инженер-исследователь, Акционерное общество «Конструкторское бюро приборостроения им. академика А. Г. Шипунова» (300001, Россия, г. Тула, ул. Щегловская засека, д. 59), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1914-8892>, [zbv89@mail.ru](mailto:zbv89@mail.ru)

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

#### About the authors:

**Valeriy M. Ponyatsky**, Head of Department, KBP Instrument Design Bureau (59 Shcheglovskaya Zaseka Str., Tula 300001, Russia), Ph.D. (Engineering), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8326-165X>, [kbkedr@tula.net](mailto:kbkedr@tula.net)

**Boris V. Zenov**, Lead Research Engineer, KBP Instrument Design Bureau (59 Shcheglovskaya Zaseka Str., Tula 300001, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1914-8892>, [zbv89@mail.ru](mailto:zbv89@mail.ru)

All authors have read and approved the final manuscript.

