

УДК 517.958

DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.702-711

## Имитационная модель спуска симметричного авторотирующего тела в воздушной среде

**Д. В. Беляков**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия  
125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4  
dimbel@rambler.ru

### Аннотация

В работе построена математическая модель тела сложной конфигурации, состоящего из стержня и двух прямоугольных пластинок, ортогональных к стержню, которое представляет собой рабочий элемент ветротурбины Дарье. Тело совершает плоскопараллельное снижение под действием силы тяжести и аэродинамических сил. Аэродинамические силы, приложенные к пластинкам, приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины. Исследуется вопрос о существовании различных стационарных режимов спуска и их устойчивости. Сначала рассматриваются простейшие стационарные режимы, при которых тело движется поступательно. Указаны наиболее характерные простейшие режимы поступательного движения. Найден режим планирования под углом восемьдесят семь градусов. Наибольший интерес в работе представляет режим авторотации, при котором тело быстро вращается и осуществляет снижение по вертикали или наклонной прямой подобно свободно вращающемуся несущему винту. При помощи метода осреднения получены оценки средней угловой скорости, средней скорости центра масс и среднего угла планирования тела в режиме авторотации; доказано, что режим авторотации является притягивающим. Показано, что спуск в режиме авторотации происходит с наименьшей скоростью по сравнению с другими режимами, что позволяет применять эту конструкцию в качестве системы спуска или аэродинамического тормозного устройства, либо как систему планирования. Численно решены уравнения равновесия и построены зависимости угла планирования от установочного угла и вертикальной проекции скорости от установочного угла. Написаны программы, в которых проводится численное интегрирование уравнений движения рассматриваемого тела и результаты численного интегрирования сравниваются с полученными теоретическими оценками для оценки точности рассматриваемых методов.

**Ключевые слова:** тело, стационарный режим, устойчивость, авторотация.

**Для цитирования:** Беляков Д. В. Имитационная модель спуска симметричного авторотирующего тела в воздушной среде // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 3. С. 702-711. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.702-711

© Беляков Д. В., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## **Simulation Model of Releasing a Symmetric Auto-rotating Body in the Air**

**D. V. Belyakov**

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia  
dimbel@rambler.ru

### **Abstract**

The article presents the creation of a mathematical model of a body with a complex configuration, consisting of a rod and two rectangular plates orthogonal to the rod, which is a working element of the Darier wind turbine. The body makes a plane-parallel decrease under the action of gravity and aerodynamic forces. The aerodynamic forces applied to the plates are adopted in accordance with the empirical theory of stationary flow around a flat plate. The question of the existence of various stationary descent modes and their stability is investigated. First, we consider the simplest stationary modes in which the body moves translationally. The most salient simplest modes of translational motion are indicated. A volplaning mode at an angle of eighty-seven degrees is found. The most interesting point in this article is the autorotation mode, when the body rotates rapidly and decreases vertically or in an inclined straight line like a freely rotating rotor. Using the homogenization method, estimates of the average angular velocity, the average velocity of the mass center and the average glide angle of the body in the autorotation mode are obtained; it is proved that the autorotation mode is attracting. It is shown that the descent in autorotation mode occurs at the lowest speed compared to other modes, which allows you to use this design as a descent system or aerodynamic braking device, or as a planning system. The equilibrium equations are numerically solved; the functional relationship between the glide angle and the rigging angle and functional relationship between the vertical projection of speed on the rigging angle are constructed. Programs are written that numerical integrate the equations of the body motion and the results of numerical integration are compared with the theoretical estimates to evaluate the accuracy of the methods under consideration.

**Keywords:** Body, stationary mode, stability, autorotation.

**For citation:** Belyakov D.V. Simulation Model of Releasing a Symmetric Auto-rotating Body in the Air. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(3):702-711. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.702-711



## Введение

При проведении исследований в области динамики тел, взаимодействующих со средой, часто бывает необходимо использовать различные модели, так натурные эксперименты не всегда возможны как по техническим, так и экономическим соображениям. Математическая модель описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения. При этом вид модели зависит как от природы исследуемого объекта, так и от задач исследования, методики моделирования, необходимой точности описания объекта. В данной работе рассматривается имитационное моделирование движения тела сложной конфигурации. Принцип имитационного моделирования основывается на том, что математическая модель воспроизводит процесс функционирования во времени, причем имитируются элементарные события, протекающие в системе с сохранением логики их взаимодействия и последовательности протекания во времени. Таким образом, есть возможность получения по исходным данным сведения о состоянии системы в определенные промежутки времени, что позволяет оценить характеристики системы. Имитационное моделирование может быть положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая будет оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности. С развитием вычислительной техники появилась возможность проводить достаточно точное моделирование различных систем. При этом значительно сокращаются расходы на проведение непосредственного эксперимента, так как многие параметры модели уточняются еще в ходе компьютерного моделирования. Кроме того, существует ряд задач, где постановка опыта на реальной модели просто невозможна или экономически неоправдана. В работе при помощи системы компьютерной математики MATLAB 18 проводится имитационное моделирование динамической системы, описывающей движение авторотирующего тела, которое можно использовать как систему безопасного спуска в атмосфере.

## Постановка задачи

В работе построена математическая модель плоскопараллельного спуска тела, представляющего собой рабочий элемент ветротурбины Дарье с горизонтальной осью, состоящее из стержня и двух параллельных пластинок, которые могут быть перекошены на угол  $\delta$  относительно нормали к стержню. При создании модели воздействия среды на тело использована гипотеза о квазистационарном обтекании пластинок средой. Согласно этой гипотезе сила воздействия среды на каждую пластинку характеризуется скоростью некоторой ее точки, которая называется центром давления. В рассматриваемой модели предполагается также, что центры давления пластинок точки А и В неподвижны, так как поперечные размеры пластинок намного меньше длины стержня. Считается, также, что среда не оказывает никакого влияния на стержень.

Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку разложим на две составляющие: силы сопротивления  $S_A, S_B$ , направленные против абсолютных скоростей центров давления  $V_A, V_B$ , и подъемные силы  $P_A, P_B$ , направленные ортогонально  $V_A, V_B$ . Введем углы атаки  $\alpha$  между  $V_A$  и  $r\dot{\theta}$ ,  $\beta$  между

$V_B$  и  $-r\dot{\theta}$ . При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha + \delta)V_A^2, |\vec{S}_B| = s(\beta + \delta)V_B^2, |\vec{P}_A| = p(\alpha + \delta)V_A^2, |\vec{P}_B| = p(\beta + \delta)V_B^2$$

$$\text{где } s(\alpha) = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha), s(\beta) = 0.5\rho\sigma c_x(\beta), p(\alpha) = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha), p(\beta) = 0.5\rho\sigma c_y(\beta)$$

где  $c_x(\alpha)$  и  $c_y(\alpha)$  безразмерные аэродинамические функции,  $\rho$  - плотность воздуха,  $\sigma$  - площадь пластинок.

Введем систему координат, связанную с вектором  $\vec{V}$ . Ось  $\tau$  свяжем с направлением вектора  $\vec{V}$ , ось  $\eta$  свяжем с направлением нормальным

$\vec{V}_\perp$  (см рис. 1). В этой системе координат для векторов  $r\dot{\theta}, \vec{V}_A, \vec{V}_B$  имеем представление:

$$r\dot{\theta} = \{-r\dot{\theta} \sin \theta, r\dot{\theta} \cos \theta\}, \quad \vec{V}_A = \{V - r\dot{\theta} \sin \theta, r\dot{\theta} \cos \theta\}, \\ \vec{V}_B = \{V + r\dot{\theta} \sin \theta, -r\dot{\theta} \cos \theta\}$$

Следовательно, силы сопротивления можно определить как:

$$\vec{S}_A = s(\alpha + \delta)V_A \{r\dot{\theta} \sin \theta - V, -r\dot{\theta} \cos \theta\}, \vec{S}_B = s(\beta + \delta)V_B \{-V - r\dot{\theta} \sin \theta, r\dot{\theta} \cos \theta\}$$

А подъемные силы будут иметь вид:

$$\vec{P}_A = p(\alpha + \delta)V_A \{r\dot{\theta} \cos \theta, r\dot{\theta} \sin \theta - V\}, \vec{P}_B = p(\beta + \delta)V_B \{-r\dot{\theta} \cos \theta, -V - r\dot{\theta} \sin \theta\}$$

В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координаты  $x, y$  центра масс, точки О и угол  $\psi$  отклонения стержня АВ от вертикали.

Для описания распределения скоростей точек нашего тела, зададим величину вектора абсолютной скорости центра масс  $\vec{V}$ , угол  $\gamma$  отклонения вектора  $\vec{V}$  от вертикали, угол  $\theta$  отклонения стержня АВ от вектора абсолютной скорости центра масс  $\vec{V}$  и абсолютную угловую скорость стержня  $\omega$ . Для того, чтобы составить уравнения движения тела, воспользуемся теоремой о движении центра масс в проекциях на оси  $\tau$  и  $\eta$ , теоремой об изменении кинетического момента и теоремой о сложении скоростей.

$$mV = p(\alpha + \delta)V_A r\dot{\theta} \cos \theta - p(\beta + \delta)V_B r\dot{\theta} \cos \theta + s(\alpha + \delta)V_A (r\dot{\theta} \sin \theta - V) - s(\beta + \delta)V_B (r\dot{\theta} \sin \theta + V) + mg \cos \gamma \quad (1)$$

$$mV\dot{\gamma} = -s(\alpha + \delta)V_A r\dot{\theta} \cos \theta + s(\beta + \delta)V_B r\dot{\theta} \cos \theta + p(\alpha + \delta)V_A (r\dot{\theta} \sin \theta - V) - p(\beta + \delta)V_B (r\dot{\theta} \sin \theta + V) - mg \sin \gamma$$

$$J\dot{\omega} = r(V_A^2(p(\alpha + \delta) \sin \alpha - s(\alpha + \delta) \cos \alpha) + V_B^2(p(\beta + \delta) \sin \beta - s(\beta + \delta) \cos \beta))$$

$$\dot{\theta} + \dot{\gamma} = \omega$$

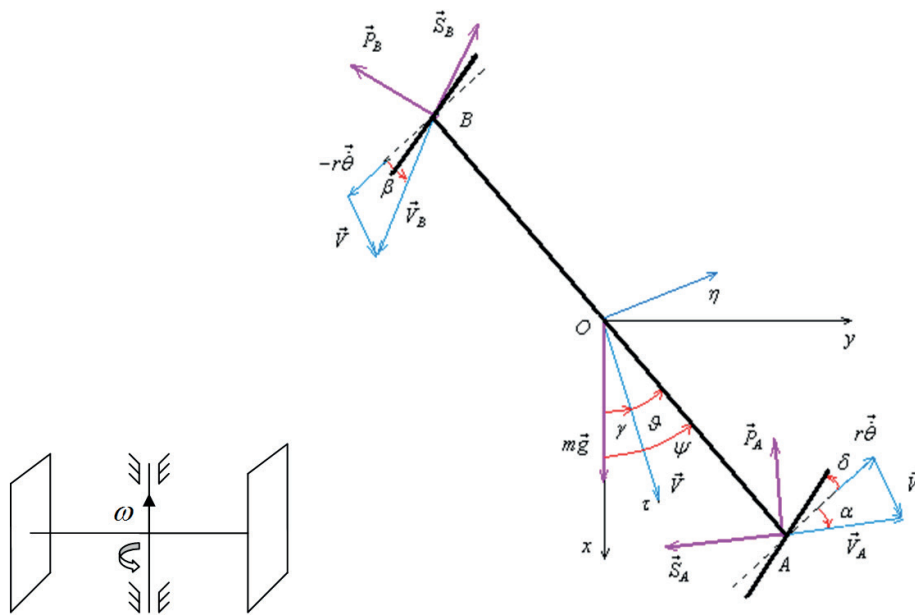
кинематические соотношения, связывающие  $V_A, V_B, \alpha, \beta$  с  $V, \theta, \dot{\theta}$ ,

имеют вид:

$$V_A \sin \alpha = -V \cos \theta, V_B \sin \beta = V \cos \theta, V_A \cos \alpha = r\dot{\theta} - V \sin \theta, V_B \cos \beta = r\dot{\theta} + V \sin \theta \quad (2)$$

После того, как мы проинтегрируем систему уравнений (1.1) - (1.2), мы можем окончательно определить положение тела при помощи интегрирования кинематических соотношений  $\dot{x} = V \cos \gamma, \dot{y} = V \sin \gamma$  и решения уравнения  $\psi = \gamma + \theta$





Р и с.1. Решение уравнений равновесия  
Fig. 1. The solution of equilibrium equations

Будем искать простейшие установившиеся режимы движения, при которых у тела отсутствует вращение. При этом тело будет совершать поступательное движение, т.е.  $\omega \equiv 0$ . Правая часть уравнения вращения системы (1.1) обращается в нуль тождественно, так как

$$V^2 [p(\alpha + \delta) \sin \alpha - s(\alpha + \delta) \cos \alpha + p(\beta + \delta) \sin \beta - s(\beta + \delta) \cos \beta] \equiv 0$$

Таким образом, любая функция вида  $\psi(t) \equiv const = \psi_*$  удовлетворяет уравнению вращения. При поступательном движении кинематические соотношения (2) переписываются в виде:  $tg \alpha = ctg \theta$  или  $\alpha = arctg(ctg \theta) = \frac{\pi}{2} - arctg(ctg \theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$

таким образом мы получим, что  $\alpha$  и  $\theta$  связаны соотношением:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ С другой стороны } \psi = \gamma + \theta. \text{ Поэтому } \gamma = \psi - \theta = \psi + \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Для определения стационарных значений  $V$  и  $\gamma$  запишем уравнения движения центра масс:

$$-2s(\alpha + \delta)V^2 + mg \cos \gamma = 0 \quad (4)$$

$$-2p(\alpha + \delta)V^2 - mg \sin \gamma = 0$$

После несложных преобразований переписем системы (2.2)

Получим уравнение:

$$-tg \gamma = k(\alpha + \delta), \text{ или } \gamma = -arctg(k(\alpha)). \quad (5)$$

учитывая то, что  $tg \gamma = tg(\psi + \alpha - \frac{\pi}{2}) = -ctg(\psi + \alpha)$ , получим:

$$ctg(\psi + \alpha) = \frac{k(\alpha + \delta)}{s(\alpha)} \quad (6)$$

где  $k(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{s(\alpha)}$  - функция качества.

Теперь мы можем задать произвольное стационарное решение уравнения вращения  $\psi(t) \equiv \psi = const$  и при помощи ре-

шения уравнения (6) и использования соотношения (3) определить  $\alpha$  и  $\gamma$ . Таким образом мы полностью определили направление скорости  $V$ . Ее величину можно вычислить по формуле:

$$V = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{2s(\alpha)}} \quad (7)$$

Итак, для произвольного угла установки тела  $\psi$ , мы полностью определили величину и направление установившейся скорости  $V$ . Графически изобразим решение уравнения (6) при  $\psi = \frac{\pi}{4}$  для прямоугольной пластинки с удлинением  $\lambda = 8$

при различных значениях угла ориентации тела  $\psi$ .

Из рисунка 2 видно, что заметному изменению  $\psi$  и  $\gamma$  соответствует достаточно малое изменение угла атаки  $\alpha$ . При этом  $ctg(\psi + \alpha)$  будет иметь только одну точку пересечения с функцией качества  $k(\alpha)$ . Этим значениям  $\psi$  и  $\gamma$  соответствует режим планирования, изображенный на Рис. 3.

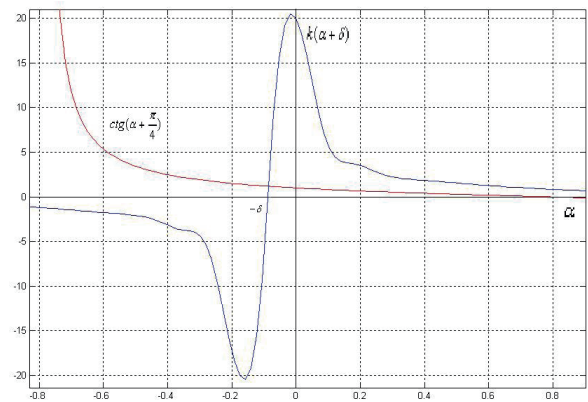


Рис.2 Fig. 2.



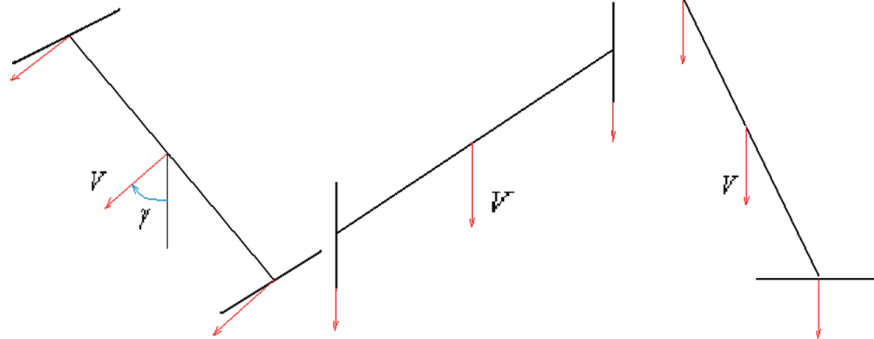


Рис.3 Fig. 3.

Рис.4 Fig. 4.

Приведем некоторые решения уравнения (6) для прямоугольной пластинки с удлинением  $\lambda = 8$  при различных значениях угла ориентации тела  $\psi$ .

1. Два режима вертикального спуска (см Рис. 4):

$$\gamma_1 = 0, V_1 = \sqrt{\frac{mg}{s(\frac{\pi}{2} - \delta)}}; \psi_1 = \delta; \gamma_2 = 0, V_2 = \sqrt{\frac{mg}{s(\delta)}}; \psi_2 = \frac{\pi}{2} + \delta$$

Неустойчивость режимов вертикального спуска показана в работе [1]

2. Режим планирования, при котором пластинки расположены горизонтально.

$$V_3 = \sqrt{\frac{mg}{2(s(0) + p'(0))\alpha_3}}; \gamma_3 = \sqrt{\frac{s(0)}{p'(0)}} - \frac{\pi}{2}; \alpha_3 = \sqrt{\frac{s(0)}{p'(0)}} - \delta; \psi_3 = \delta$$

$$|\gamma_3| \approx 86.8316^\circ$$

3. Режим планирования, при котором стержень расположен горизонтально.

$$\gamma_4 = -\frac{p'(0)\delta}{s(0) + p'(0)}; V_4 = \sqrt{\frac{p'(0)mg\delta}{2s(0)(s(0) + p'(0))}}; \psi_4 = \frac{\pi}{2}$$

Полагая  $\delta = 2^\circ$ , получим:  $|\gamma_4| \approx 1,995^\circ$

$$4. |\gamma_{<0E}| = -\arctg\left(\frac{p_1}{2s_0} \sqrt{\frac{s_0}{s_2}}\right)$$

Это оценка дает максимально возможное значение абсолютной величины угла планирования.

где  $p(\alpha) = p_1\alpha$ ,  $p'(\alpha) = p_1$ ,  $s(\alpha) = s_0 + s_2\alpha^2$ ,  $s'(\alpha) = s_2\alpha$

При  $\delta = 2^\circ$ , получим  $|\gamma_{<0E}| \approx 87,1353^\circ$  и  $\psi_{\max} \approx -0,1153^\circ$

Все эти результаты обобщены при качественном построении зависимости абсолютного значения угла планирования от угла ориентации тела при  $\delta = 0^\circ$ ,  $m = 5$  кг.,  $\sigma = 0.32$  кв. метров. (см Рис.5).

Для решения систем нелинейных уравнений в среде программирования MATLAB используется процедура `fsolve`, входящая в пакет расширения Optimization Toolbox. Эта процедура позволяет решить системы нелинейных уравнений уравнений вида:  $F(X) = 0$  методом наименьших квадратов. Необходимо подготовить файл-функцию для этой системы уравнений. Преобразованная система уравнений для составления файл-функ-

ции будет иметь вид:

$$F(X) = f_1(x_1, x_2) = ctg(x(1) + \psi) - x(2)$$

$$f_2(x_1, x_2) = spline(alfa, k, x(1)) - x(2)$$

Значение функции качества в каждой точке итерационного процесса при поиске численных решений будем приближать кубическим сплайном.

После этого составим в редакторе MATLAB файл-функцию следующего вида:

```
function f=myfyn3(x)
f(1)=cot(x(1)+ksi)-x(2)
f(2)=spline(alfa,k,x(1))-x(2)
```

Далее вводится начальная точка итерационного процесса и происходит вызов процедуры `fsolve`:

```
a=spline(alfa,k, 0.01 )
x=fsolve(@myfyn3,[ 0.01 a ],optimset('Display','off'))
```

После завершения итерационного процесса найденное численное решение выводится с точностью, близкой к машинной. В качестве результата моделирования выводятся графики кривых  $\gamma = \gamma(\psi)$  и  $V_x = V_x(\psi)$

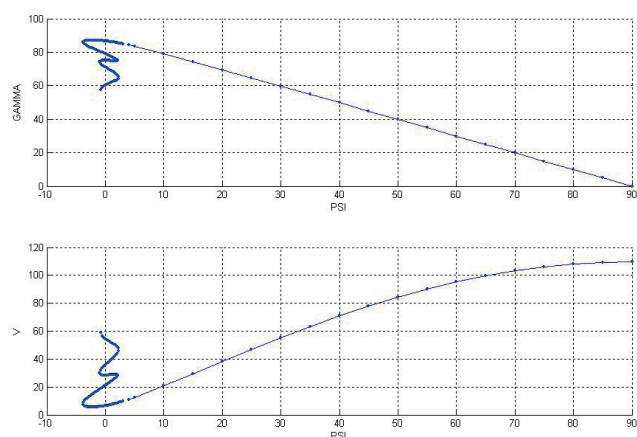


Рис.5 Fig. 5.

Таким образом, мы видим, что построенная нами модель движения имеет весьма интересные и неочевидные стационарные режимы.



## Режим авторотации

Рассмотрим движение тела при высокой угловой скорости под действием силы тяжести и аэродинамических сил. При этом окружная скорость пластинок  $r\dot{\theta}$  велика по сравнению с абсолютной скоростью центра масс  $V$ , поэтому углы атаки  $\alpha, \beta$  близки к нулю. Из уравнения вращения и уравнений движения центра масс системы (1) видно, что правые части этих уравнений при высокой угловой скорости достаточно малы.

Предположим, что существует стационарный режим, при котором тело вращается с высокой угловой скоростью и осуществляет спуск по наклонной прямой под малым углом  $\gamma$ . Итак, пусть тело раскручено до высокой угловой скорости, т.е.  $r\dot{\theta} \gg V, \alpha, \beta \rightarrow 0$ . Проведем линеаризацию функций  $p, s$  при  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ .

$$s(\alpha) = s_\delta + s'_\delta \alpha, p(\alpha) = p_\delta + p'_\delta \alpha,$$

$$s(\beta) = s_\delta + s'_\delta \beta, p(\beta) = p_\delta + p'_\delta \beta$$

$$\text{где: } s_\delta = s(0), s'_\delta = s'(0), p_\delta = p(0), p'_\delta = p'(0).$$

Левые части кинематических соотношений (2) линеаризуем при  $\alpha, \beta \rightarrow 0$

$$V_A \alpha = V \cos \theta, V_B \beta = -V \cos \theta, V_A = r\dot{\theta} - V \sin \theta, V_B = r\dot{\theta} + V \sin \theta$$

Пользуясь этими соотношениями, сделаем в уравнениях (1), переход от переменных  $\alpha, \beta, V_A, V_B$  к переменным  $\theta, \dot{\theta}, V, \omega$ . После вычислений получим уравнения (8)

$$J\dot{\omega} = -2r(s_\delta(r\dot{\theta})^2 + V^2(s_\delta \sin^2 \theta + p'_\delta \cos^2 \theta) - V(s'_\delta + p_\delta) \sin 2\theta) \quad (8)$$

$$m\dot{V} = 2Vr\dot{\theta}(p'_\delta \cos^2 \theta - s_\delta(1 + \sin^2 \theta) + (s'_\delta - p_\delta) \sin 2\theta) + mg$$

$$mV\dot{\gamma} = (p'_\delta + s_\delta)Vr\dot{\theta} \sin 2\theta - Vr\dot{\theta}(s'_\delta \cos^2 \theta + p_\delta(1 + \sin^2 \theta)) - mg\gamma$$

$$\dot{\theta} = \dot{\omega} - \dot{\gamma}$$

Отделив в правых частях системы (8) периодическую часть, среднее которой равно нулю от стационарной, получим систему:

$$J\dot{\omega} = -2r(s_\delta(r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}V^2(p'_\delta + s_\delta) + \frac{1}{2}V^2(p'_\delta - s_\delta) \cos 2\theta - \frac{1}{2}V(s'_\delta + p_\delta) \sin 2\theta)$$

$$m\dot{V} = Vr\dot{\theta}(p'_\delta - 3s_\delta) + mg + Vr\dot{\theta}((p'_\delta + s_\delta) \cos 2\theta + (s'_\delta - p_\delta) \sin 2\theta)$$

$$mV\dot{\gamma} = -Vr\dot{\theta}(s'_\delta + 3p_\delta) - mg\gamma + Vr\dot{\theta}((p'_\delta + s_\delta) \cos 2\theta + (s'_\delta - p_\delta) \sin 2\theta)$$

$$\dot{\theta} = \omega - \dot{\gamma}$$

(9)

Проведем осреднение правых частей системы (9) на отрезке  $[0, 2\pi]$ , оставим в ней только стационарные слагаемые и учтем, что среднее значение  $\dot{\gamma}$  на обороте равно нулю:

$$J\dot{\omega} = -2r(s_\delta(r\omega)^2 + \frac{1}{2}V^2(p'_\delta + s_\delta)) \quad (10)$$

$$m\dot{V} = r\omega V(p'_\delta - 3s_\delta) + mg$$

$$mV\dot{\gamma} = -r\omega V(s'_\delta + 3p_\delta) - mg\gamma$$

Эта система имеет следующие стационарные решения:

$$\omega_0 = \frac{V_0}{r} \sqrt{\frac{-p'_\delta - s_\delta}{2s_\delta}}, V_0 = \frac{mg}{r\omega_0(-p'_\delta + 3s_\delta)}, \gamma_0 = \frac{-s'_\delta - 3p_\delta}{-p'_\delta + 3s_\delta} \quad (11)$$

Воспользуемся тем, что при  $\delta \ll 1$  справедливы соотношения

$$p'_\delta = p'_0, p_\delta = p'_0 \delta, s_\delta = s_0 + \frac{s''_0 \delta^2}{2}, s'_\delta = s''_0 \delta.$$

Исключив из формул (11)  $V_0, \omega_0$ , получим:

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{mg}{-p'_0 + 3s_0}} \sqrt{\frac{-p'_0 - s_0}{2s_0}}, V_0 = \sqrt{\frac{mg}{(-p'_0 + 3s_0)}} \sqrt{\frac{2s_0}{-p'_0 - s_0}}, \gamma_0 = \frac{-(s''_0 + 3p_0)\delta}{-p'_0 + 3s_0} \quad (12)$$

Это установившееся движение носит название режима авторотации.

Таким образом, можно сделать вывод, что установившийся угол планирования пропорционален величине угла перекоса пластинки  $\delta$ . Мы видим, что при уменьшении сопротивления  $s_\delta$  увеличиваются средняя угловая скорость и средний угол планирования и уменьшается средняя скорость центра масс. При увеличении  $\delta$ ,  $\omega_0$  уменьшается, а  $V_0$  и  $\gamma_0$  увеличиваются. В случае  $\delta = 0$  (пластинки ортогональны державке) имеем:  $p_\delta = 0, s'_\delta = 0, \omega_0$  принимает максимальное значение,  $V_0$  принимает минимальное значение,  $\gamma_0 = 0$ .

Заметим, что найденный стационарный режим авторотации  $\omega_0, V_0, \gamma_0$  является притягивающим. Действительно, при  $\omega < \omega_0, V < V_0, \gamma < \gamma_0$  правые части осредненной системы (10) положительны и величины  $\omega, V, \gamma$  в осредненной системе возрастают. Это означает, что и в полной системе (1) величины  $\omega, V, \gamma$  в среднем за период будут возрастать. При  $\omega > \omega_0, V > V_0, \gamma > \gamma_0$  проводим аналогичные рассуждения. В случае  $\delta = 0$  (пластинки ортогональны державке) из третьего уравнения системы (10) мы видим, что средняя боковая сила равна нулю, поэтому свободное плоскопараллельное падение тела, раскрученного до высокой угловой скорости, будет вертикальным. В работе [4] рассмотрен этот случай. При  $\delta \ll 1$  свободное плоскопараллельное падение тела будет проходить по наклонной прямой под малым углом  $\gamma_0$ . В работе [1] проведена линеаризация системы (4.2) в окрестности режима авторотации. Полученные уравнения первого приближения нормализованы и показано, что они имеют ограниченное периодическое решение, т.е. обоснована законность осреднения.

## Сравнение установившейся скорости режима авторотации со скоростями других режимов

Сравним вертикальную составляющую скорости спуска режима авторотации со скоростями спуска на других простейших стационарных режимах, при которых тело движется поступательно. В силу того, что угол планирования тела достаточно мал, вертикальная составляющая скорости спуска близка к найденному стационарному значению скорости. Для обоих случаев (когда  $\delta = 0$  и когда  $\delta \neq 0$ ) имеем, что неравенства  $V_1 > V_2, V_1 > V_0$  выполнены заведомо. Для того, чтобы выполнялось неравенство  $V_2 > V_0$ , необходимо выполнение условия  $\frac{r\omega_0}{V_0} > \frac{2s_m}{-p'_\delta + 3s_\delta}$ . Учтем то, что  $\frac{r\omega_0}{V_0} \gg 1$ , а величина  $\frac{2s_m}{-p'_\delta + 3s_\delta}$  имеет порядок единицы, поэтому неравенство  $V_2 > V_0$  также выполнено заведомо. Так как установившаяся скорость режимов планирования лежит в интервале:  $V_2 < V < V_1$ , то мы видим, что действительно вертикальная составляющая скорости спуска в режиме авторотации является



минимальной по сравнению со скоростями других режимов. Таким образом, в работе: построены динамические уравнения движения тела; найдено множество положений равновесия; найдено стационарное решение осредненной системы, которое названо режимом авторотации; проведено сравнение установившейся скорости режима авторотации со скоростями других простейших режимов, откуда следует, что она минимальна.

## Численное интегрирование уравнений движения

В математическом пакете MATLAB написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений (1)-(2), описывающих колебания пластинки с неподвижным центром давления. Такая модель возможна при условии того, что длина стержня намного больше ширины пластинки. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. При поиске численного решения аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном. После выхода тела на режим авторотации и окончания интегрирования уравнений движения тела происходит сглаживание полученного решения. Численные значения угловой скорости, скорости спуска и угла планирования аппроксимируются набором кубических сплайнов и проводится их осреднение на последнем обороте. При этом используются функции `fnint` и `fnval` из пакета расширения `Spline Toolbox`. Полученные численные результаты сравниваются с теоретическими оценками, найденными при помощи метода осреднения. В качестве результата моделирования изобразим на рисунках 6-9 фазовые зависимости угловой скорости, скорости центра масс и траекторию центра масс при установочных углах пластинки и сравним их со стационарными значениями в случае:

$$\delta = \{0^0, 1^0, 2^0, 3^0\}.$$

При построении модели, используем следующие числовые значения параметров:  $m = 5 : 3$ ,  $J = 0.5 : 3 <^{\circ} 2$ ,  $\sigma = 0,32 <^{\circ} 2$ ,  $r = 1.6 <^{\circ}$ . Начальные условия будут иметь вид:  $[\psi(0), \gamma(0), \omega(0), V(0), x(0), y(0)] = [0, 0, 20, 1, 0, 0]$ .

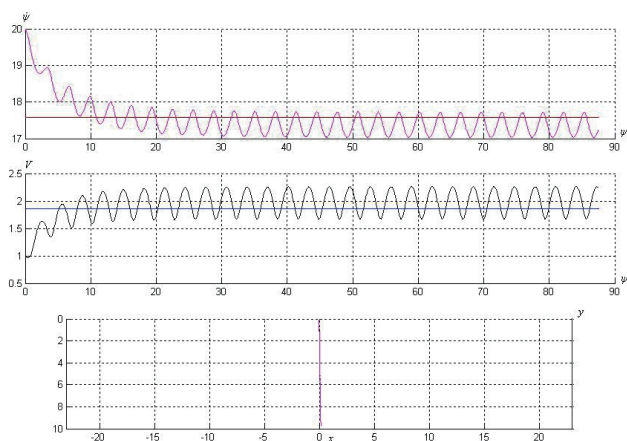


Рис. 6. ( $\delta = 0^0$ ) Fig. 6. ( $\delta = 0^0$ )

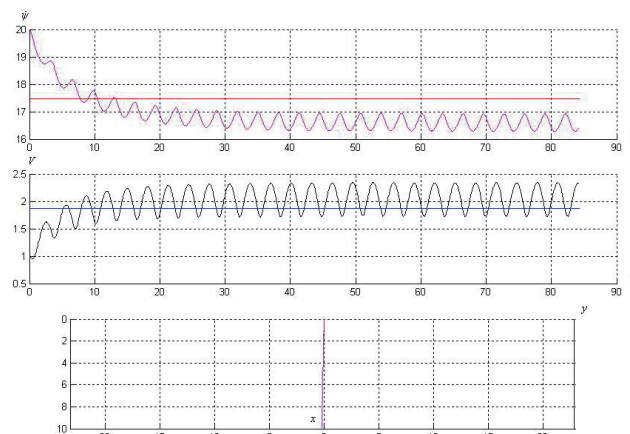


Рис. 7. ( $\delta = 1^0$ ) Fig. 7. ( $\delta = 1^0$ )

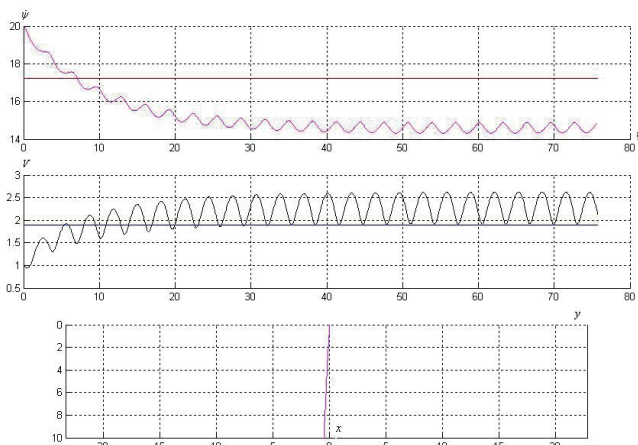


Рис. 8. ( $\delta = 2^0$ ) Fig. 8. ( $\delta = 2^0$ )

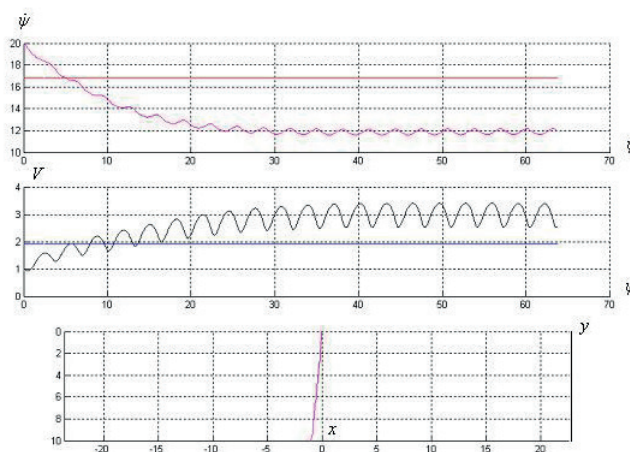


Рис. 9. ( $\delta = 3^0$ ) Fig. 9. ( $\delta = 3^0$ )



## Заключение

Таким образом, в работе:

1. Разработана математическая модель спуска тела.
2. Найдено множество простейших положений равновесия при поступательном движении.
3. Найдено стационарное решение осредненной системы, которое названо режимом авторотации.
4. Проведено сравнение установившейся скорости режима авторотации со скоростями других простейших режимов, откуда следует, что она минимальна.
5. На базе специализированной системы компьютерной математики MATLAB 18 разработаны программы для имитационного моделирования колебаний тела.

## Список использованных источников

- [1] *Беляков Д. В., Самсонов В. А., Филиппов В. В.* Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Вестник Московского энергетического института. 2006. № 4. С. 5-10. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (дата обращения: 02.06.2019).
- [2] *Беляков Д. В.* Разработка и исследование математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 11. С. 20-24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (дата обращения: 02.06.2019).
- [3] *Самсонов В. А., Беляков Д. В., Чебурахин И. Ф.* Вертикальное снижение тяжелого симметричного авторотирующего тела в сопротивляющейся среде // Научные Труды МАТИ. 2005. № 9(81). С. 145-150.
- [4] *Самсонов В. А., Беляков Д. В.* Математическое моделирование движения симметричного авторотирующего тела, раскрученного до высокой угловой скорости, в воздушной среде // Научные Труды МАТИ. 2006. № 10(82). С. 196-200.
- [5] *Беляков Д. В., Самсонов В. А.* Оценка возможностей нового типа ротирующего спускающегося в воздухе объекта // Сборник тезисов XXVI академических чтений по космонавтике / Под ред. А.К. Медведевой. М., 2002. С. 100.
- [6] *Беляков Д. В.* Математическое моделирование движения ротирующего спускающегося в воздухе объекта // Пятый Международный аэрокосмический конгресс IAS06. Посвящается 20-летию вывода в космос орбитальной станции «МИР». Москва, 2006. С. 62-63.
- [7] *Беляков Д. В.* Математическая модель несимметричного авторотирующего тела в сопротивляющейся среде // Гагаринские чтения. Тезисы докладов XXXIII Международной молодежной научной конференции. М., 2007. С. 27-28
- [8] *Беляков Д. В.* Математическое моделирование движения ротирующего спускающегося в воздухе объекта // Пятый Международный аэрокосмический конгресс IAS06 *Беляков Д. В.* Перспективные технологии создания системы безопасного спуска в воздушной среде // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции «Новые материалы и технологии» - НТМ-2008. М.: МАТИ – РГТУ, 2008. С. 117.
- [9] *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во Московского университета, 1986. 88 с.
- [10] *Паршин Д. Е.* Качественный анализ в задаче о движении аэродинамического маятника: дис. канд. физ.-мат. наук. МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 1993. 200 с
- [11] *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Качественный анализ движения твердого тела в сопротивляющейся среде // Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986.
- [12] *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. № 1621. С. 79-93.
- [13] *Strickland J. H., Smith T., Sun K.* A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study // Journal of Fluids Engineering. 1979. Vol. 101, Issue 4. Pp. 500-505. DOI: 10.1115/1.3449018
- [14] *Шоломович Г. И., Карликов В. П., Зверев О. В.* Исследование по оптимизации ортогональных энергоагрегатов для использования энергии воздушных и водных течений. Оценка влияния кривизны и неоднородности потока на аэродинамические характеристики профиля. М., 1990. 33 с.
- [15] *Paraschivoiu J., Delclaux F.* Double Multiple Streamtube model with Recent Improvements // Journal of Energy. 2012. Vol. 7, Issue 3. Pp. 250-255. DOI: 10.2514/3.48077
- [16] *Vittecoq P., Laneville A.* The aerodynamic forces for a Darrieus rotor with straight blades: Wind Tunnel measurement // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. Vol. 15, Issue 1-3. Pp. 381-388. DOI: 10.1016/0167-6105(83)90207-6
- [17] *Parashivoiu I.* Aerodynamics Loads and Performance of the Darrieus Rotor // Journal of Energy. 1982. Vol. 6, Issue 6. Pp. 406-412. DOI: 10.2514/3.62621
- [18] *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Изд-во «Наука», 1988. 328 с.
- [19] *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Изд-во «Наука», 1966. 530 с.
- [20] *Самсонов В. А., Сумин Т. С.* Об устойчивости положения равновесия механической системы с двумя степенями свободы // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2004. № 4. С. 60-62. URL: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmumm&paperid=3669&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmumm&paperid=3669&option_lang=rus) (дата обращения: 02.06.2019).
- [21] *Локшин Б. Я., Самсонов В. А.* Об одной эвристической модели аэродинамического маятника // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 1047-1061. URL: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=341&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=341&option_lang=rus) (дата обращения: 02.06.2019).
- [22] *Беляков Д. В.* Математическое моделирование движения осесимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // International Journal of Open Information Technologies. 2015. Т. 3, № 3. С. 7-16. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22993754> (дата обращения: 02.06.2019).
- [23] *Беляков Д. В.* Задача об автоколебаниях пластинки в потоке среды // Современные информационные технологии и ИТ образование. 2015. Т. 11, № 2. С. 552-555.





URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26167543> (дата обращения: 02.06.2019).

Поступила 02.06.2019; принята к публикации 10.08.2019;  
опубликована онлайн 30.09.2019.

#### Об авторе:

**Беляков Дмитрий Валерьевич**, доцент кафедры 812 «Математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, [dimbel@rambler.ru](mailto:dimbel@rambler.ru)

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

## References

- [1] Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. Motion Investigation of Asymmetric Solid in Resistant Environment. *Vestnik Moskovskogo Energeticheskogo Instituta = Vestnik MEI*. 2006; 4:5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (accessed 02.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [2] Belyakov D.V. Development and Features of Mathematical Model of Movement Asymmetrical Autorotating Bodies in Quasi-static to Environment. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2007; 11:20- 24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (accessed 02.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [3] Samsonov V.A., Belyakov D.V., Cheburakhin I.F. Vertical reduction of a heavy symmetric autorotising body" in a resisting medium. *Nauchnye Trudy MATI*. 2005; 9(81):145-150. (In Russ.)
- [4] Samsonov V.A., Belyakov D.V. Mathematical modeling of the movement of a symmetric autorotising body, promoted to a high angular velocity, in air. *Nauchnye Trudy MATI*. 2006; 10(82):196-200. (In Russ.)
- [5] Belyakov D.V., Samsonov V.A. Assessment of the possibilities of a new type of object rotating the airborne one. In: Medvedeva A.K. (ed). *Proceedings of the XXVI Academic Readings on Astronautics*. 2002, pp. 100. (In Russ.)
- [6] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion of a rotating object descending in the air. In: *Proceedings of the Fifth International Aerospace Congress IAC-06. Dedicated to the 20th anniversary of the launch of the MIR space station*. M., 2006, p. 62-63. (In Russ.)
- [7] Belyakov D.V. Mathematical model of an asymmetric autorotising body in a resisting environment. In: *Proceedings of the International Youth Scientific XXXIII Gagarin Science Conference*. M., 2007, pp. 27-28. (In Russ.)
- [8] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion of a rotating object descending in the air. In: *Proceedings of the Fifth International Aerospace Congress IAC-06. Dedicated to the 20th Anniversary of the launch of the MIR Space Station*. M., 2006. (In Russ.)
- [9] Belyakov D.V. Promising technologies for creating a system of safe descent in the air. In: *Proceedings of the All-Russian Scientific and Technical Conference "New materials and technologies" - NTM-2008*. M., SEI HPE MATI – RGTU, 2008, pp. 117. (In Russ.)
- [10] Lokshin B.Ya., Privalov V.A., Samsonov V.A. Introduction to the problem of the motion of a point and a body in a resisting medium. M., MSU, 1986. (In Russ.)
- [11] Parshin D.E. Qualitative analysis in the problem of the motion of an aerodynamic pendulum: dis. ... Ph.D. (Phys.-Math.). M.: MSU, 1993. (In Russ.)
- [12] Lokshin B. Ya., Privalov V. A., Samsonov V. A. Qualitative analysis in the problem of the motion of an aerodynamic pendulum. In: *Proceedings of the Sixth All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics*. Tashkent, 1986. (In Russ.)
- [13] Tabachnikov V.G. Stationary characteristics of the wings at low speeds over the entire range of angles of attack. *TsAGI Science Journal*. 1974; 1621:79-93. (In Russ.)
- [14] Strickland J. H., Smith T., Sun K. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. *Journal of Fluids Engineering*. 1979; 101(4):500-505. (In Eng.) DOI: 10.1115/1.3449018
- [15] Sholomovich G.I., Karlikov V.P., Zverev O.V. A study on the optimization of orthogonal energy units for using the energy of air and water currents. Evaluation of the effect of curvature and inhomogeneity of the flow on the aerodynamic characteristics of the profile. M., 1990. (In Russ.)
- [16] Paraschivoiu J., Delclaux F. Double Multiple Stremeamtube model with Recent Improvements. *Journal of Energy*. 2012; 7(3):250-255. (In Eng.) DOI: 10.2514/3.48077
- [17] Vittecoq P., Laneville A. The aerodynamic forces for a Darrieus rotor with straight blades: Wind Tunnel measurement. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1983; 15(1-3):381-388. (In Eng.) DOI: 10.1016/0167-6105(83)90207-6
- [18] Parashivoiu I. Aerodynamics Loads and Performance of the Darrieus Rotor. *Journal of Energy*. 1982; 6(6):406-412. (In Eng.) DOI: 10.2514/3.62621
- [19] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Prikladnye metody v teorii kolebanij* [Applied methods in the theory of oscillations]. Nauka, Moscow, 1988. (In Russ.)
- [20] Malkin I.G. *Teoriya ustojchivosti dvizheniya* [The theory of the stability of motion]. Nauka, Moscow, 1966. (In Russ.)
- [21] Samsonov V.A., Sumin T.S. Stability of equilibrium state of a mechanical system with two degrees of freedom. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 2004; 4:60-62. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmummm&paperid=3669&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmummm&paperid=3669&option_lang=rus) (accessed 02.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [22] Lokshin B.Ya., Samsonov V.A. On heuristic model of aerodynamical pendulum. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika = Fundamental and Applied Mathematics*. 1998; 4(3):1047-1061. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=341&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=341&option_lang=rus) (accessed 02.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [23] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion axisymmetric autorotating bodies in quasistatic to ambience. *International Journal of Open Information Technologies*. 2015; 3(3):7-16. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22993754> (accessed 02.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)



- [24] Belyakov D.V. The problem of self-oscillations of the plate in the flow of the medium. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2015; 11(2):552-555. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26167543> (accessed 02.06.2019). (In Russ.)

*Submitted 02.06.2019; revised 10.08.2019; published online 30.09.2019.*

**About the author:**

**Dmitry V. Belyakov**, Associate Professor of the Mathematics Department, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe highway, Moscow 125993, Russia), Ph.D. (Engineering), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, [dimbel@rambler.ru](mailto:dimbel@rambler.ru)

*The author has read and approved the final manuscript.*

