

УДК 519.622+539.376
DOI: 10.25559/SITITO.15.201904.970-980

Многослойный метод идентификации характеристик ползучести в интервале напряжений для задачи разрушения металлов в условиях ползучести

А. Н. Васильев¹, Е. Б. Кузнецов², С. С. Леонов^{2*}, Д. А. Тархов¹

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

*powerandglory@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается коэффициентная обратная задача идентификации характеристик ползучести металлических конструкций, деформируемых в условиях высокотемпературной ползучести. Деформирование в условиях ползучести широко применяется в различных задачах машиностроения, в том числе формообразовании элементов конструкций и расчета длительной прочности. Явление ползучести проявляют большинство известных материалов, в том числе металлы, бетон и композиты. При этом не существует единой теории ползучести, что объясняется сложностью описываемого процесса. Определяющие уравнения ползучести, как правило, содержат набор настраиваемых параметров (материальных констант) необходимых к идентификации. Существует ряд методов определения материальных констант, но большинство из них подходят только для узких классов моделей ползучести. В предыдущих работах авторы предложили метод многослойных функциональных систем, который в сочетании с нейросетевой технологией приводил к оригинальному подходу в приложении глубоких нейронных сетей к построению приближенных решений дифференциальных уравнений. Он сочетает гибкость глубоких полуэмпирических нейронных сетей и быстроедействие традиционных численных методов решения задачи Коши и обратных задач. Применительно к задаче идентификации моделей ползучести многослойный метод позволяет естественным образом получать глубокие сети, дающие приближенное решение рассматриваемой задачи с явным вхождением материальных констант. С использованием построенного многослойного решения идентификация материальных констант сводится к приближению экспериментальных данных, например, по методу наименьших квадратов. Преимущества многослойного метода показаны при решении задачи идентификации для интервала напряжений материальных констант модели ползучести, описывающей растяжение образцов из стали 45 при постоянных напряжении и температуре $T = 850^\circ C$. Проводится анализ результатов и сопоставление полученных расчетных данных с экспериментальными данными и результатами других авторов.



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Ключевые слова: ползучесть, разрушение, идентификация параметров, механическое напряжение, интервальный параметр, задача Коши, обыкновенное дифференциальное уравнение, многослойная нейронная сеть.

Финансирование: данная работа была подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научных проектов № 18-38-00424мол_а «Численные методы решения плохо обусловленных задач высокотемпературной ползучести» и 19-08-00718_а «Разработка методов и вычислительных программ решения краевых задач, моделирующих нелинейное деформирование материалов со сложной реологией».

Для цитирования: *Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Тархов Д. А.* Многослойный метод идентификации характеристик ползучести в интервале напряжений для задачи разрушения металлов в условиях ползучести // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 4. С. 970-980. DOI: 10.25559/SITITO.15.201904.970-980

© Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Тархов Д. А., 2019



A multilayer Method for Identifying Creep Characteristics in the Stress Range for the Problem of Metals Creep Rupture

A. N. Vasilyev¹, E. B. Kuznetsov², S. S. Leonov^{2*}, D. A. Tarkhov¹

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

29 Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg 195251, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia

*powerandglory@yandex.ru

Abstract

The paper considers the coefficient inverse problem of identifying the creep characteristics for metal structures deformed under high-temperature creep conditions. Creep deformation is widely used in various engineering problems, including the shaping of structural elements and the calculation of long-term strength. The creep phenomenon is exhibited by most known materials, including metals, concrete, and composites. Herein, there is no unified creep theory, which is explained by the complexity of the described process. The constitutive creep equations, as a rule, contain a set of tunable parameters (material constants) necessary for identification. There are many methods for determining material constants, but most of them are suitable only for specific creep models. In previous works, the authors proposed a method of multilayer functional systems, which in combination with neural network technique led to an original approach in the application of deep learning neural networks to the construction of approximate solutions of differential equations. Such approach allows combining the flexibility of artificial neural networks and the performance of traditional numerical methods for solving inverse and Cauchy problems. With regard to the creep models identification problem multilayer method allows naturally obtain a deep network, giving an approximate solution to the problem under consideration with an explicit occurrence of material constants. The identification of material constants is reduced to approximating experimental data, for example, by the least-squares method using the constructed multilayer solution. The advantages of the multilayer method are shown in solving the identification problem of the material constants for stress range. We selected the creep model describing the tension of cylindrical specimens of steel 45 at a constant stress level and temperature $T = 850^\circ C$ as a test problem for our multilayer method. Authors carry out analysis of obtained results and a comparison of the calculated data with the experiment and the results of other authors to confirm the reliability of the method used.

Keywords: Creep, fracture, parameter identification, mechanical stress, interval parameter, the Cauchy problem, ordinary differential equation, multilayer neural network.

Funding: This work was prepared with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research as a part of scientific projects № HYPERLINK “<https://kias.rfbr.ru/index.php>”18-38-00424мол_а “Numerical Methods for Solving the Poorly Defined Problems of High Temperature Creep” and 19-08-00718_а “Development of Methods and Computational Programs for Solving Boundary Value Problems, Simulating Nonlinear Deformation of Materials with Complex Rheology”.

For citation: Vasilyev A.N., Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A. A multilayer Method for Identifying Creep Characteristics in the Stress Range for the Problem of Metals Creep Rupture. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(4):970-980. DOI: 10.25559/SITITO.15.201904.970-980



Введение

В современном аэрокосмической отрасли и машиностроении большое значение принимают исследования, связанные с поведением металлических и композитных конструкций в условиях сложного напряженного состояния при различных температурно-силовых режимах. Это связано с появлением в последние несколько десятилетий новых перспективных задач, связанных с проектированием ядерных реакторов, сверхзвуковых летательных аппаратов и строительных конструкций, в том числе бетонных и композитных. Указанные задачи требуют расчета деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций в широком диапазоне температур в условиях сложного напряженного состояния. При этом недостаточно учитывать только упругие и пластические свойства материала. На передний план выходят упруго-вязко-пластические свойства и изменение напряжено-деформированного состояния во времени и по пространственным переменным [1, 2]. В статье рассматривается связанная с описанным классом задача высокотемпературной ползучести. Несмотря на то, что свойство ползучести обнаруживают металлы, бетон, стекло и композиты, широко применяемые в промышленности, не существует единой теории, описывающей деформирование и разрушение в условиях ползучести. Существует несколько десятков феноменологических теорий, использующих различные гипотезы о процессе накопления деформации и поврежденности [3]. Это связано со сложностью явления ползучести, которое зависит как от используемого материала, его состояния и изотропии, так и от условий нагружения, температуры и памяти формы [1, 2, 4]. Все это усложняет процесс моделирования ползучести, поскольку любые определяющие соотношения ползучести содержат набор материальных констант (характеристик ползучести), необходимых к нахождению. Традиционные методы идентификации моделей ползучести базируются на геометрических подходах и ориентированы на конкретные определяющие соотношения (см., например, работу [4]). Большинство методов идентификации моделей ползучести узкоспециализированы, но в последние несколько лет появляются более универсальные подходы, базирующиеся на аппарате искусственных нейронных сетей. В качестве общего подхода к идентификации материальных констант авторами уже использовались методы на основе искусственных нейронных сетей [5, 6], в том числе многослойных [6]. Однако нейросетевые подходы являются очень ресурсоемкими и их использование сопряжено со значительными вычислительными трудностями, что не дает возможности решать крупные прикладные задачи. В данной работе предложен более простой метод, основанный на идеологии глубоких многослойных полуэмпирических сетей, разработанный в работах [7–11]. Этот метод позволяет сочетать в себе гибкость искусственных нейронных сетей и быстрдействие традиционных численных методов.

Цели исследования

Целью данной работы является разработка и апробация многослойного метода для идентификации материальных констант, входящих в определяющие соотношения ползучести и длительной прочности. Ранее в работах авторов рассматривалась задача идентификации материальных констант при по-

стоянном уровне напряжения. В данной же статье будет рассмотрена идентификация для интервала напряжений $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$. В качестве тестовой задачи рассматривается идентификация характеристик ползучести модели, описывающей одноосное растяжение цилиндрических образцов из изотропной авиационной стали марки Ст. 45 при постоянных напряжении и температуре $T = 850^\circ\text{C}$. Полученные результаты сравним с экспериментальными данными и результатами других авторов.

Одноосное растяжение образцов из стали 45

Задача растяжения металлов в режиме ползучести вплоть до разрушения в рамках теории структурных параметров Ю. Н. Работнова описывается системой [12, 13], состоящей из определяющего соотношения

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = f_1(\sigma, T) \cdot \Psi(\omega, T), \quad (1)$$

связывающего напряжение и деформацию, и эволюционного уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = f_2(\sigma, T) \cdot \Psi(\omega, T), \quad (2)$$

описывающего процесс накопления поврежденности в конструкции. Здесь ε – деформация ползучести, ω – скалярный параметр поврежденности, σ – действующее напряжение, t – время, T – температура. Функциональные зависимости в системе (1)–(2) определяются по результатам эксперимента. Функцию $\Psi(\omega, T)$ выберем в форме [13]

$$\Psi(\omega, T) = \omega^{-\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{-m},$$

где α и m – параметры модели, в общем случае зависящие от температуры T .

Функции $f_1(\sigma, T)$ и $f_2(\sigma, T)$ выберем в степенном виде [13]

$$f_1(\sigma, T) = B_\varepsilon \sigma^n, f_2(\sigma, T) = B_\omega \sigma^k,$$

где B_ε , B_ω , n , k – характеристики ползучести, в общем случае зависящие от температуры T .

При постоянной температуре $T = \text{const}$ система (1)–(2) примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \quad (4)$$

Считая образец в начальный момент ненагруженным и неповрежденным, дополним полученную систему (3)–(4) однородными начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \varepsilon(0) = 0. \quad (5)$$

При $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ можно получить решение задачи Коши (3)–(5) как это сделано в статье [14]

$$\omega(t) = \left(1 - \left(1 - (\alpha + 1)(m + 1) B_\omega \sigma_0^k t \right)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \omega(t). \quad (7)$$



Учитывая, что параметр поврежденности принимает значение единица в момент разрушения, из соотношения (6) получим значение длительной прочности t^* данной конструкции

$$t^* = [(\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (8)$$

Различные аспекты численного решения задачи (3)–(5) рассматривались ранее в статьях [15, 16]. В них при известных материальных константах в уравнениях (3)–(4) разработаны эффективные методы численного интегрирования на основе традиционных разностных схем и продолжения решения по аргументам различного вида. Более трудной задачей является идентификация материальных констант. С использованием искусственных нейронных сетей задача решалась в работах [5, 6], в том числе и при помощи многослойного подхода (описанного ниже) [6], но только для случая $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Последнее ограничение является существенным для прикладных задач, поскольку, как сама конструкция может эксплуатироваться при различных постоянных уровнях напряжения, так и само напряжение может изменяться во времени. Поэтому целесообразно рассматривать материальные константы как интервальные параметры: так механическое напряжение σ необходимо определять в характерном интервале напряжений $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$. Далее описан подход к решению этой задачи при такой постановке.

Экспериментальные данные

Экспериментальные данные, полученные для деформации ползучести при $T = 850^\circ\text{C}$ для уровней напряжения $\sigma_0 = 35; 40; 45$ МПа, взяты из статьи [13]. Данные эксперимента для параметра поврежденности рассчитаны по формуле $\omega = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}$, где ε_* – значение деформации ползучести в момент разрушения. Все экспериментальные точки приведены в таблицах 1–3.

Таблица 1. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 35$ МПа
Table 1. Experimental data for steel 45 with $\sigma_0 = 35$ MPa

	1	2	3	4	5	6	7
$t, \text{ч}$	0.51	0.98	1.461	1.918	2.441	2.935	3.433
ε	0.044	0.081	0.109	0.141	0.163	0.175	0.195
ω	0.084	0.157	0.211	0.273	0.316	0.34	0.378
	8	9	10	11	12	13	14
$t, \text{ч}$	3.902	4.445	4.898	5.327	5.837	6.531	6.706
ε	0.211	0.234	0.249	0.264	0.287	0.379	0.516
ω	0.41	0.454	0.482	0.512	0.557	0.735	1

Таблица 2. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 40$ МПа
Table 2. Experimental data for steel 45 with $\sigma_0 = 40$ MPa

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t, \text{ч}$	0.286	0.51	0.735	0.906	1.429	2	2.429	2.714	2.947	2.98
ε	0.05	0.111	0.155	0.187	0.24	0.3	0.366	0.412	0.505	0.616
ω	0.0808	0.18	0.253	0.303	0.39	0.487	0.595	0.67	0.82	1

Таблица 3. Экспериментальные данные для стали 45 при $\sigma_0 = 45$ МПа
Table 3. Experimental data for steel 45 with $\sigma_0 = 45$ MPa

	1	2	3	4	5	6
$t, \text{ч}$	0.088	0.273	0.392	0.527	0.637	0.739
ε	0.007	0.072	0.134	0.183	0.232	0.273
ω	0.012	0.113	0.211	0.29	0.366	0.431
	7	8	9	10	11	12
$t, \text{ч}$	0.857	0.996	1.061	1.163	1.184	1.224
ε	0.318	0.368	0.413	0.468	0.541	0.633
ω	0.503	0.581	0.652	0.738	0.854	1

Многослойная методология

Классические методы численного решения задачи Коши вида (1)–(2) состоят в разбиении промежутка $[t_0; t^*]$ на n частей: $t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = t^* = t_0 + a$, и применении итерационной формулы вида $y_{i+1} = A(\mathbf{f}, y_i, y_{i+1}, h_i, t_i)$. Здесь $h_i = t_{i+1} - t_i$; y_i – приближение к точному значению искомого решения, A – функция, определяющая применяемый метод. Наш подход [7] состоит в том, чтобы с помощью данной итерационной формулы (с функцией A , соответствующей выбранному методу) строить приближённое решение задачи (1)–(2) на интервале переменной длины $[t_0, t]$, $t \in [t_0; t^*]$. В этом случае $h_i = h_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $y_0(t) = y_0$. В качестве приближённого решения предлагается использовать $y_N(t)$. Материальные константы, представленные вектором параметров задачи \mathbf{a} , явным образом входят в выражение для решения $y_N(t) = y_N(t, \mathbf{a})$. Для их нахождения по экспериментальным данным $\{y(t_q) = y_q^e\}_{q=1}^l$ можно воспользоваться минимизацией

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{q=1}^l \|y_N(t_q, \mathbf{a}) - y_q^e\|^2.$$

Данный подход успешно применялся к решению подобных прикладных задач [7–11].

Построение многослойной сети для явного метода Эйлера

Применим описанную многослойную методологию для задачи идентификации характеристик ползучести для задачи растяжения образцов из стали марки Ст. 45. Рассмотрим упрощенную задачу развития поврежденности в образце, которая описывается уравнением (4) и соответствующим начальным условием (5). Запишем полученную начальную задачу отдельно:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \omega(0) = 0. \quad (9)$$

Применим нашу модификацию явного метода Эйлера для идентификации параметров задачи (9) [7–11]. Для этого используем рекуррентную формулу вида

$$t_{i+1}(\omega) = t_i(\omega) + \frac{(\omega_{i+1} - \omega_i)}{B_\omega \sigma^k} \omega_i^\alpha (1 - \omega_i^{\alpha+1})^m, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (10)$$

В качестве начала отсчета выберем середину отрезка $\omega \in [0; 1]$, определив начальное значение искомой функции в виде $t_0(\omega - 0.5) = t_0$. Шаг интегрирования будем определять из соотношения $\omega_i = 0.5 + i(\omega - 0.5)/N$. В качестве приближенного решения задачи (9) будем использовать $t = t_N(\omega)$.

Подставляя выражение для ω_i в уравнение (10), получим выражение

$$t_{i+1}(\omega) = t_i(\omega) + a(\sigma, \alpha, m, k, B_\omega) \cdot (\omega - 0.5) \cdot S_i(\omega, \alpha, m), \quad (11)$$

$$S_i(\omega, \alpha, m) = (0.5N + i \cdot (\omega - 0.5))^\alpha (N^{\alpha+1} - (0.5N + i \cdot (\omega - 0.5))^{\alpha+1})^m,$$

$$a(\sigma, \alpha, m, k, B_\omega) = N^{-(\alpha+1)(m+1)} / B_\omega \sigma^k.$$

Суммирую по i , получим выражение для времени в зависимости от параметра поврежденности



$$t = t_0 + a(\sigma, \alpha, m, k, B_\omega) \cdot (\omega - 0.5) \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\omega, \alpha, m). \quad (12)$$

Подставляя начальное значение, вычислим значение $t_0 = 0.5 \cdot a(\sigma, \alpha, m, k, B_\omega) \sum_{i=0}^{N-1} S_i(0, \alpha, m)$, используя которое, найдем из (12) окончательный вид

$$t = a(\sigma, \alpha, m, k, B_\omega) \cdot \left(0.5 \sum_{i=0}^{N-1} S_i(0, \alpha, m) + (\omega - 0.5) \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\omega, \alpha, m) \right).$$

Материальные константы α, m, k и B_ω явно входят в последнее соотношение и могут быть найдены в интервале напряжений $\sigma \in [35 \text{ МПа}; 45 \text{ МПа}]$ с использованием экспериментальных данных таблиц 1–3 методом наименьших квадратов, сводящемуся к минимизации функционала вида

$$J = \delta_1 \sum_{q=1}^{14} F^2(\omega_q^{35}, t_q^{35}, 35, \alpha, m, k, B_\omega) + \delta_2 \sum_{q=1}^{10} F^2(\omega_q^{40}, t_q^{40}, 40, \alpha, m, k, B_\omega) + \delta_3 \sum_{q=1}^{12} F^2(\omega_q^{45}, t_q^{45}, 45, \alpha, m, k, B_\omega) + \frac{(\alpha + k + m^2) \cdot \exp(m \cdot k)}{\alpha^2 \cdot (1 - \exp(m \cdot k))} \rightarrow \min. \quad (13)$$

Здесь верхними индексами у ω и t обозначены соответствующие эксперименту уровни напряжений,

$$F(\omega, t, \sigma, \alpha, m, k, B_\omega) = t - a(\sigma, \alpha, m, k, B_\omega) \cdot \left(0.5 \sum_{i=0}^{N-1} S_i(0, \alpha, m) + (\omega - 0.5) \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\omega, \alpha, m) \right),$$

последнее слагаемое в функционале (13) – регуляризирующая функция, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – штрафные множители.

Исходя из физического смысла рассматриваемой задачи, функционал (13) необходимо дополнить ограничениями на область изменения материальных констант вида

$$\alpha > 0, m > 0, k > 0, B_\omega > 0. \quad (14)$$

Численные результаты

Задача минимизации (13)–(14) решалась методом Левенберга-Марквардта [17], реализованным в среде Mathcad 15. Разбиение $N = 100$, а штрафные множители принимают значения: $\delta_1 = 3, \delta_2 = 1, \delta_3 = 10$. В таблице 4 приводятся значения полученных материальных констант в сравнении с результатами статьи [13].

Таблица 4. Параметры модели, описываемой задачей (9)

Table 4. Model parameters described by task (9)

$\sigma_0, \text{ МПа}$	$B_\omega, \text{ МПа}^k \cdot \text{ч}^{-1}$	k	α	m
Результаты статьи [13]				
35	$3.488 \cdot 10^{-13}$	6.97	0.849	2.83
40				
45				
Результаты решения задачи (13)–(14)				
35	$2.363 \cdot 10^{-10}$	5.16	0.899	2.715
40				
45				

Для характеристики качества построенной модели в данной работе будем использовать абсолютное отклонение модельных данных от эксперимента, вычисляемое как модуль разности, и относительное отклонение, вычисляемое как модуль разности деленный на экспериментальное значение. Здесь и далее будем понимать под модельными данными полученные аналитические решения (6) и (8) для задачи (9) с определенными значениями материальных констант.

Основные данные о деформационном процессе даны в таблице 5, где $\delta t^*, \delta \omega^*$ – относительные отклонения модельных значений длительной прочности и параметра поврежденности в момент разрушения соответственно от экспериментальных значений, t_n – время счета, J^* – полученное приближение к минимальному значению функционала (13). Значение параметра поврежденности в момент разрушения ω^* принимается равным единице.

Таблица 5. Основные сведения о процессе накопления поврежденности
Table 5. Highlights of the damage accumulation process

Результаты	$t^*, \text{ ч}$	ω^*	$\delta t^*, \%$	$\delta \omega^*, \%$	J^*	$t_n, \text{ с}$
35 МПа	Параметры [13]	7.0005	4.39	26.7196	–	–
	Задача (13)–(14)	6.4684	1	3.54	22.9572	41.723
	Эксперимент [13]	6.7061	–	–	–	–
40 МПа	Параметры [13]	2.7601	7.37	30.0044	–	–
	Задача (13)–(14)	3.2476	1	8.99	31.3833	41.723
	Эксперимент [13]	2.9796	–	–	–	–
45 МПа	Параметры [13]	1.2145	0.82	16.1308	–	–
	Задача (13)–(14)	1.7685	1	44.43	49.6314	41.723
	Эксперимент [13]	1.2245	–	–	–	–

В таблице 6 даны основные данные об абсолютном отклонении полученных по формулам (6), (8) значений параметра поврежденности от экспериментальных данных таблиц 1–3. Для абсолютного отклонения значений параметра поврежденности от эксперимента вводятся следующие обозначения: $\Delta \omega_{\max}$ – максимальное значение, $\Delta \omega_{\text{mean}}$ – среднее значение, $\Delta \omega_{\text{med}}$ – медиана, $\Delta \omega_{\text{dev}}$ – среднеквадратическое отклонение от среднего значения.

Таблица 6. Абсолютное отклонение решения задачи (9) от эксперимента
Table 6. The absolute deviation of the solution of problem (9) from the experiment

Результаты	$\Delta \omega_{\max}$	$\Delta \omega_{\text{mean}}$	$\Delta \omega_{\text{med}}$	$\Delta \omega_{\text{dev}}$	
35 МПа	Параметры [13]	0.2672	0.034	0.0167	0.0683
	Задача (13)–(14)	0.2296	0.0698	0.0437	0.0689
40 МПа	Параметры [13]	0.3	0.0819	0.0284	0.1045
	Задача (13)–(14)	0.3138	0.0758	0.0433	0.0921
45 МПа	Параметры [13]	0.1613	0.0557	0.0406	0.052
	Задача (13)–(14)	0.4963	0.1606	0.1049	0.1472

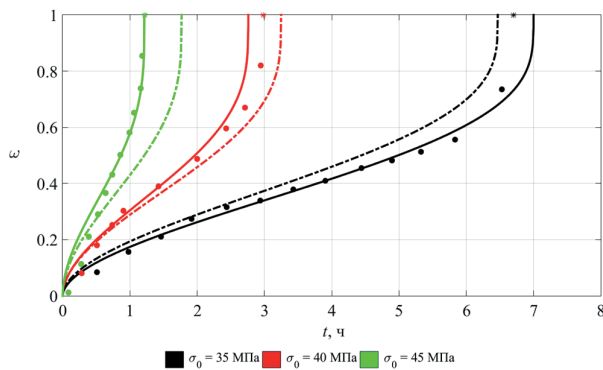
При анализе качества построенной модели не всегда достаточно абсолютного отклонения, поэтому в таблице 7 даны основные данные об относительном отклонении полученных по формулам (6), (8) значений параметра поврежденности от экспериментальных данных таблиц 1–3. Для относительного отклонения значений параметра поврежденности от эксперимента вводятся следующие обозначения: $\delta \omega_{\max}$ – максимальное значение, $\delta \omega_{\text{mean}}$ – среднее значение, $\delta \omega_{\text{med}}$ – медиана, $\delta \omega_{\text{dev}}$ – среднеквадратическое отклонение от среднего значения.



Таблица 7. Относительная отклонение решения задачи (9) от эксперимента
Table 7. Relative deviation of the solution of problem (9) from the experiment

Результаты		$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{mean}}, \%$	$\delta\omega_{\text{med}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
35 МПа	Параметры [13]	41.2364	8.1373	4.7608	11.6369
	Задача (13)-(14)	58.3852	17.0776	13.5832	14.0082
40 МПа	Параметры [13]	79.3864	18.5668	9.0873	23.891
	Задача (13)-(14)	75.4168	18.0718	9.4865	21.5968
45 МПа	Параметры [13]	906.1778	91.7527	8.3327	258.0049
	Задача (13)-(14)	782.9374	92.4438	28.7238	218.2427

Кривые ползучести для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 35; 40; 45$ МПа приведены на рисунке 1, где точками обозначены данные эксперимента, звездочкой – момент разрушения для каждого уровня начального напряжения, непрерывными линиями – модельные данные, соответствующие параметрам, полученным в статье [13], а штрих-пунктирными линиями – модельные данные, соответствующие параметрам, полученным при решении задачи минимизации (13)–(14). Все кривые соответствуют аналитическому решению (6), (8).



Р и с. 1. Кривые ползучести
Fig. 1. Creep curves

Замечание. Помимо сравнения экспериментальных значений с аналитическим решением важным является анализ точности моделирования по значению функционала ошибки, поскольку не каждая система определяющих уравнений может быть проинтегрирована аналитически (см., например, работу [18]). В таблице 5 указано значение $J^* = 41.723$, принимаемое функционалом (13) при найденных значениях параметров (приближение к глобальному минимуму). Помимо этого значения, можно вычислить

$J_e^* = J^*(\alpha, m, k, B_\omega) - (\alpha + k + m^2) \cdot \exp(m \cdot k) / [\alpha^2 \cdot (1 - \exp(m \cdot k))] = 25.101$, которое дает значение функционала (13) в экспериментальных точках, за вычетом значения регуляризирующей функции. Также важны нормированные значения $\bar{J}^* = 16.768$ и $\bar{J}_e^* = 0.146$. Еще одной полезной характеристикой является квадратный корень из значения функционала: $J_s = \sqrt{J_e^*} = 5.01$ и $\bar{J}_{se} = \sqrt{\bar{J}_e^*} = 0.382$. Эти значения являются приближениями к среднеквадратическому отклонению модельных данных от эксперимента. Сопоставим указанные значения функционала ошибки с аналогичными характеристиками для набора мате-

риальных констант из статьи [13], представленных в таблице 4: $J_1^* = 24.456$, $J_{e1}^* = 2.497$, $\bar{J}_1^* = 21.974$, $\bar{J}_{e1}^* = 0.015$, $J_{s1}^* = 1.58$, $\bar{J}_{se1}^* = 0.122$. Используя полученные данные можно сделать вывод, что приближенное среднеквадратическое отклонение (даваемое функционалом ошибки) для модели, полученной в работе [13], на порядок меньше, чем для модели, построенной многослойным методом. Эти выводы качественно совпадают с результатами, приведенными в таблицах 5–6. Таким образом, значение функционала (13) может адекватно оценивать качество полученной модели.

Анализ расчетных данных

Используя полученные значения отклонений проанализируем качество моделей, полученных в данной работе и статье [13]. Визуальное сопоставление представленных на рисунке кривых ползучести позволяет сделать вывод о том, что для уровня напряжения $\sigma_0 = 35$ МПа и $\sigma_0 = 40$ МПа функциональные зависимости обоих моделей качественно и количественно аппроксимируют экспериментальные данные с сопоставимыми отклонениями от эксперимента. Для уровня напряжения $\sigma_0 = 45$ МПа заметно значительное расхождение между кривыми построенными с использованием материальных констант, полученных авторами, и модельными данными статьи [13]. При этом отклонение от эксперимента для $\sigma_0 = 45$ МПа гораздо больше для кривых, полученных в данной работе. Эти наблюдения подтверждаются приводимыми в таблицах 6 и 7 значениями абсолютного и относительного отклонения от эксперимента. Для напряжения $\sigma_0 = 40$ МПа все рассчитанные характеристики качества моделирования отличаются незначительно для обеих моделей. Для $\sigma_0 = 35$ МПа отклонение полученных в работе расчетных данных от эксперимента в 1.5–2 раза превышает аналогичные характеристики модельных данных работы [13]. Для $\sigma_0 = 45$ МПа это отличие достигает 3 раз.

Стоит также прокомментировать большие значения относительного отклонения эксперимента в таблице 7. На рисунке можно видеть, что все построенные модели плохо согласуются с экспериментом вблизи начала координат. Это и приводит к большому значением относительного отклонения в окрестности начального момента времени. Расчетные значения и эксперимент могут расходиться в разы, но по абсолютному значению отклонение в окрестности начала координат принимает малые значения. Это можно видеть из таблицы 6 по среднему значению абсолютного отклонения. Максимальное абсолютное отклонение приходится на момент разрушения, при этом среднее абсолютное отклонение принимает сотые доли, не превосходя 0.2. В целом же все рассмотренные в работе модели удовлетворительно согласуются с экспериментом. Об этом говорят средние значения и медианы отклонений из таблиц 6 и 7.

Для данной задачи, как и для задач ползучести в общем, наилучшей характеристикой качества модели является медиана абсолютного и относительного отклонений. Это происходит из-за больших значений абсолютного отклонения вблизи момента разрушения и относительного отклонения вблизи начального момента времени. В результате увеличивается как среднее значение отклонений, так и среднеквадратическое отклонение.

Поясним разницу в точности между моделями, полученными в данной работе и в статье [13]. В статье [13] не описывается ал-



горитм и процесс нахождения материальных констант, но, как правило, материальные константы для данного типа определяющих соотношений находятся в полулогарифмических (экспоненциальной или показательной зависимостей) или логарифмических координатах путем сопоставления экспериментальных и расчетных данных, полученных в результате численного или аналитического интегрирования определяющих соотношений [4]. Использование полулогарифмических и логарифмических координат позволяет с высокой точностью аппроксимировать кривые ползучести кусочно-линейными функциями, коэффициентами наклона и смещениями которых являются значения материальных констант (или их логарифмы). За счет этого удается получать модели ползучести высокой точности, примером чего и являются результаты работы [13]. При этом, описанный алгоритм подходит не для любого класса определяющих соотношений, что является его существенным недостатком. Предложенный авторами многослойный подход является более общим, так как не использует характерных свойств определяющих соотношений (3)–(4) и распределение экспериментальных данных. Это делает многослойный метод применимым к любому классу определяющих соотношений ползучести. Эта общность делает более трудоемким процесс нахождения материальных констант. Это можно видеть из полученных результатов. Применение метода Левенберга-Марквардта не позволяет получить глобального минимума задачи минимизации (13)–(14), поэтому полученные значения материальных констант хуже соответствуют эксперименту, в сравнении со статьей [13]. Повысить точность можно используя методы глобальной оптимизации, например метаэвристические [19].

Выводы

В статье рассмотрена задача идентификация материальных констант, входящих в модель, описывающую накопление поврежденности в цилиндрических образцах из стали марки Ст. 45 под действием одноосного растяжения в условиях ползучести при постоянной температуре $T = 850^\circ\text{C}$. Ранее рассматривалась идентификация характеристик ползучести для фиксированного уровня напряжения [5, 6]. В данной же работе решена задача идентификации материальных констант в интервале напряжений $\sigma \in [35\text{МПа}; 45\text{МПа}]$ Для решения задачи предложен новый многослойный подход, базирующийся на методологии глубокого нейросетевого моделирования. С помощью этого метода получены материальные константы в рассматриваемом интервале изменения начальных напряжений. Результаты моделирования, полученные с использованием идентифицированных материальных констант, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными и результатами статьи [13].

Используемый метод позволяет находить материальные константы в интервале напряжений $\sigma \in [35\text{МПа}; 45\text{МПа}]$ для модели, описывающей растяжение образцов из стали марки Ст. 45. Многослойный метод сочетает в себе гибкость нейронных сетей и быстродействие традиционных методов, как решения задачи Коши, так и решения обратных задач. Фактически рассматриваемый подход позволяет находить параметры модели, используя рекуррентное приближение к точному решению задачи, получаемое предложенным многослойным методом по явной схеме Эйлера. При этом метод является универсальным,

пригодным для любого типа определяющих и эволюционных уравнений. В сравнении с нейросетевым моделированием, результаты применения которого даны в статьях [5, 6] применительно к задаче идентификации материальных констант при фиксированном уровне напряжения, многослойный подход позволяет для более сложной задачи интервальной идентификации сократить время счета до 50 раз при сохранении приемлемой точности.

В работе не ставится задача построения приближенного решения задачи (9). Но в случае необходимости можно решить и эту задачу, если вместо экспериментальных точек в функционале (13) использовать нейросетевые разложения для параметра поврежденности. С соответствующими изменениями в архитектуре для построения приближенного решения задачи (9) можно получить глубокую рекуррентную сеть (при использовании одного общего нейросетевого разложения для параметра поврежденности) или глубокую нейронную сеть прямого распространения (при использовании набора нейросетевых разложений на каждом шаге численного метода). Также можно совместить процесс идентификации параметров и решения задачи (9). Это связывает представленный в статье многослойный подход с глубоким обучением. Кроме того, эта идея связывает единой нитью традиционные численные методы и современные исследования по искусственным нейронным сетям и глубокому обучению. Еще одним преимуществом многослойного подхода является то, что в при использовании схем численного интегрирования задачи Коши справедливыми остаются все оценки точности полученного приближенного решения, которые можно использовать для контроля погрешности многослойного решения.

Используя результаты, полученные в статье, можно определить и оставшиеся параметры задачи (3)–(5). Первым вариантом решения этой задачи является составление новой задачи минимизации для уравнения (3). Новая задача минимизации примет вид

$$J = \delta_1 \sum_{q=1}^{14} G^2(\varepsilon_q^{35}, \omega_q^{35}, t_q^{35}, 35, \alpha, m, n, B_\varepsilon) + \delta_2 \sum_{q=1}^{10} G^2(\varepsilon_q^{40}, \omega_q^{40}, t_q^{40}, 40, \alpha, m, n, B_\varepsilon) + \delta_3 \sum_{q=1}^{12} G^2(\varepsilon_q^{45}, \omega_q^{45}, t_q^{45}, 45, \alpha, m, n, B_\varepsilon) + \tilde{R}(n) \rightarrow \min. \quad (15)$$

Здесь введены обозначения:

$$G(\varepsilon, \omega, t, \sigma, \alpha, m, k, B_\omega) = t - b(\sigma, \alpha, m, n, B_\varepsilon) \cdot \left(\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\omega, \alpha, m) \right),$$

$\tilde{R}(n)$ – регуляризирующая функция,

$b(\sigma, \alpha, m, n, B_\varepsilon) = N^{-(\alpha+1)(m+1)} / B_\varepsilon \sigma^n$. Идентификацию полного набора материальных констант для задачи (3)–(5) можно вести двумя способами. Первый заключается в решении задачи (15) при ограничениях $n > 0, B_\varepsilon > 0$ с учетом найденных из задачи (13)–(14) параметров α и m . Второй вариант состоит в совместной минимизации функционалов задач (13) и (15) с ограничениями $\alpha > 0, m > 0, n > 0, k > 0, B_\omega > 0, B_\varepsilon > 0$. Отметим, что второй вариант является более общим.

В дальнейших исследованиях будут реализованы намеченные обобщения решенной задачи идентификации. Также существенным является продолжение исследования методов решения задач, параметры которых определены неточно: являются интервальными величинами.



Список использованных источников

- [1] Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. В 2-х ч. Часть первая. Деформация и разрушение. М.: Машиностроение, 1974. 472 с.
- [2] Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. В 2-х ч. Часть вторая. Механические испытания. Конструкционная прочность. М.: Машиностроение, 1974. 368 с.
- [3] Симолян А. М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 255 с.
- [4] Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. 96 с.
- [5] Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Нейросетевой метод идентификации и анализа модели деформирования металлических конструкций в условиях ползучести // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, № 11. С. 360-370. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26167516> (дата обращения: 16.08.2019).
- [6] Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Multilayer method for solving a problem of metals rupture under creep conditions // Thermal Science. 2019. Vol. 23, Suppl. 2. Pp. S575-S582. DOI: 10.2298/TSCI19S2575K
- [7] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 158. Pp. 012061. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012061
- [8] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer, Cham, 2017. Pp. 17-22. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_3
- [9] Vasilyev A. N., Tarkhov D. A., Tereshin V. A., Berminova M. S., Galyautdinova A. R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence. Vol. 736. Springer, Cham, 2018. Pp.138-146. DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_21
- [10] Zulkarnay I. U., Kaverzneva T. T., Tarkhov D. A., Tereshin V. A., Vinokhodov T. V., Kapitsin D. R. A two-layer semi-empirical model of nonlinear bending of the cantilevered beam // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 1044, conference 1. Pp. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/1044/1/012005
- [11] Бортковская М. Р., Васильев П. И., Зулькарнай И. У., Семенова Д. А., Тархов Д. А., Удалов П. П., Шишкина И. А. Моделирование прогиба мембраны с помощью многослойных полумпирических моделей на основе экспериментальных данных // CEUR Workshop Proceedings: Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивноинформационные технологии» (Convergent'2017), Москва, 24-26 ноября, 2017. Т. 2064. 2017. С. 150-156. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf> (дата обращения: 16.08.2019).
- [12] Rabotnov Yu. N. Creep Problems in Structural Members. North-Holland Publishing Company, Amsterdam/London. 1969. 822 p. DOI: 10.1002/zamm.19710510726
- [13] Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с монотонным изменением деформационно-прочностных свойств // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5, № 2. С. 17-22. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12912517> (дата обращения: 16.08.2019).
- [14] Gorev B. V., Lyubashevskaya I. V., Panamarev V. A., Iyavouyenen S. V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. Vol. 55, Issue 6. Pp. 1020-1030. DOI: 10.1134/S0021894414060145
- [15] Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Technique for selecting the functions of the constitutive equations of creep and long-term strength with one scalar damage parameter // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57, Issue 2. Pp. 369-377. DOI: 10.1134/S0021894416020218
- [16] Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Examples of parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58, Issue 6. Pp. 914-933. DOI: 10.1134/S0965542518060076
- [17] Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005. 544 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21462687> (дата обращения: 16.08.2019).
- [18] Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Об аналитическом решении одной задачи ползучести // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 282-294. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36328837> (дата обращения: 16.08.2019).
- [19] Пантелеев А. В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. 160 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24226401> (дата обращения: 16.08.2019).

Поступила 16.08.2019; принята к публикации 07.10.2019;
опубликована онлайн 23.12.2019.

Об авторах:

Васильев Александр Николаевич, профессор кафедры высшей математики, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0227-0162>, a.n.vasilyev@gmail.com

Кузнецов Евгений Борисович, профессор кафедры моделирования динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

Леонов Сергей Сергеевич, доцент кафедры моделирования динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, ГСП-3, А-80, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

Тархов Дмитрий Альбертович, профессор кафедры высшей математики, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра



Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, dtarkhov@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Fridman Ya.B. *Mekhanicheskiye svoystva metallov. V dvukh chastyakh. Chast' pervaya. Deformatsiyai razrusheniye* [Mechanical Properties of Metals. Part 1. Deformation and Failure]. Mashinostroenie, Moscow, 1974. (In Russ.)
- [2] Fridman Ya.B. *Mekhanicheskiye svoystva metallov. V dvukh chastyakh. Chast' vtoraya. Mekhanicheskiye ispytaniya. Konstruktsionnaya prochnost'* [Mechanical Properties of Metals. Part 2. Mechanical Tests. Structural Strength]. Mashinostroenie, Moscow, 1974. (In Russ.)
- [3] Simonyan A.M. *Nekotoryye voprosy polzuchesti* [Some questions of creep]. Gitutiun, Yerevan, 1999. (In Russ.)
- [4] Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. *Energeticheskiy variant teorii polzuchesti* [Energy Variant of Creep Theory]. Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., Novosibirsk, 1986. (In Russ.)
- [5] Vasilyev A.N., Kuznetsov E.B., Leonov S S. Nejrosetevoj metod identifikatsii i analiza modeli deformirovaniya metallicheskih konstruktsij v usloviyakh polzuchesti [Neural network method of identification and analysis of the model of deformation of metal structures under creep conditions]. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2015; 2(11):360-370. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26167516> (accessed 16.08.2019). (In Russ.)
- [6] Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Multilayer method for solving a problem of metals rupture under creep conditions. *Thermal Science*. 2019; 23(Suppl. 2):S575-S582. (In Eng.) DOI: 10.2298/TSC19S2575K
- [7] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2016; 158:012061. (In Eng.) DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012061
- [8] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence*, vol. 736. Springer, Cham, 2018. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_3
- [9] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence*, vol. 736. Springer, Cham, 2018. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-66604-4_21
- [10] Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A two-layer semi-empirical model of nonlinear bending of the cantilevered beam. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017; 1044(conference 1):012005. (In Eng.) DOI: 10.1088/1742-6596/1044/1/012005
- [11] Bortkovskaya M.R., Vasilyev P.I., Zulkarnay I.U., Semenova D.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P., Shishkina I.A. Modeling of the membrane bending with multilayer semi-empirical models based on experimental data. In: *CEUR Workshop Proceedings: Proceedings of the II International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017)*, Moscow, Russia, November 24-26, 2017, vol. 2064, 2017, pp. 150-156. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2064/paper18.pdf> (accessed 16.08.2019). (In Eng.)
- [12] Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members. North-Holland Publishing Company, Amsterdam/London. 1969. (In Eng.) DOI: 10.1002/zamm.19710510726
- [13] Gorev B.V., Zakharova T.E., Klopotov I.D. On description of creep and fracture of the materials with non-monotonic variation of deformation-strength properties. *Physical Mesomechanics*. 2002; 5(2):17-22. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12912517> (accessed 16.08.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [14] Gorev B.V., Lyubashevskaya I.V., Panamarev V.A., Iyavoynen S.V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014; 55(6):1020-1030. (In Eng.) DOI: 10.1134/S0021894414060145
- [15] Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Technique for selecting the functions of the constitutive equations of creep and long-term strength with one scalar damage parameter. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016; 57(2):369-377. (In Eng.) DOI: 10.1134/S0021894416020218
- [16] Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Examples of parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018; 58(6):914-933. (In Eng.) DOI: 10.1134/S0965542518060076
- [17] Panteleyev A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerkakh i zadachakh* [Optimization methods in the examples and problems]. Vysshaya shkola, Moscow. 2005. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21462687> (accessed 16.08.2019). (In Russ.)
- [18] Kuznetsov E.B., Leonov S.S. On the analytical solution of one creep problem. *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva = Middle Volga Mathematical Society Journal*. 2018; 20(3):282-294. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36328837> (accessed 16.08.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [19] Panteleyev A.V. *Metaevristicheskiye algoritmy poiska global'nogo ekstremuma* [Metaheuristic algorithms for finding the global extremum]. MAI-PRINT, Moscow. 2009. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24226401> (accessed 16.08.2019). (In Russ.)

Submitted 16.08.2019; revised 07.10.2019; published online 23.12.2019.

About the authors:

Alexander N. Vasilyev, Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg 195251, Russia), Dr.Sci. (Engineer-



ing), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0227-0162>, a.n.vasilyev@gmail.com

Evgenii B. Kuznetsov, Professor of the Department Modelling of Dynamic System, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

Sergey S. Leonov, Associate Professor of the Department Modelling of Dynamic System, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

Dmitry A. Tarkhov, Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg 195251, Russia), Dr.Sci. (Engineering), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, dtarkhov@gmail.com

All authors have read and approved the final manuscript.

