

УДК 378

DOI: 10.255559/SITITO.15.201903.712-720

Программный комплекс для исследования устойчивости дискретных динамических систем с запаздыванием

А. В. Грезина*, А. Г. Панасенко

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

* aleksandra-grezina@yandex.ru

Аннотация

Поведение широкого класса систем с сосредоточенными параметрами может быть описано с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих процессах, изучаемых в экологии, экономике, физике, технике, медицине и т.д. ключевую роль играют эффекты запаздывания. Для исследования таких процессов приходится применять современные информационные технологии. В статье представлен программный комплекс, написанный на языке C# (операционная система Microsoft Windows), позволяющий автоматизировать процесс исследования устойчивости системы с тремя степенями свободы с запаздыванием. Такие системы часто встречаются на практике (либо к ним можно привести системы большей размерности подходящим упрощением модели) и поэтому рассмотренная модель с результатами анализа может быть использована для исследования других практически значимых динамических систем. В качестве примера использования программного комплекса для исследования устойчивости системы с тремя степенями свободы, в которой проявляется эффект запаздывания, рассматривается задача о самовозбуждении колебаний системы электрододержателей (ЭД) дуговой сталеплавильной печи. Эквивалентная механическая модель представляет собой три ЭД, моделируемые твердыми телами, совершающими малые крутильные колебания. Самовозбуждение колебаний возникает за счет взаимного влияния электродинамических сил, действующих между электродами, и упругими силами конструкции. Идеализированная математическая модель колебаний трех ЭД представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка с запаздыванием. С помощью программного комплекса построены кривые D-разбиения и получены области устойчивости при различных значениях параметров модели. Результаты исследования представлены в виде рисунков и таблиц. Так как для системы с тремя степенями свободы математический аппарат остается ещё достаточно простым, то материал, представленный в статье, можно использовать в образовательном процессе при подготовке специалистов по прикладной математике.

Ключевые слова: программный комплекс, система дифференциальных уравнений, запаздывание, устойчивость, D-разбиение.

Для цитирования: Грезина А. В., Панасенко А. Г. Программный комплекс для исследования устойчивости дискретных динамических систем с запаздыванием // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 3. С.712-720. DOI: 10.255559/SITITO.15.201903.712-720

© Грезина А. В., Панасенко А. Г., 2019



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Software Complex for Research of Stability of Discrete Dynamic Systems with Delay

A. V. Grezina*, A. G. Panasenکو

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, N. Novgorod, Russia
23 Gagarin Av., Nizhnij Novgorod 603950, Russia

* aleksandra-grezina@yandex.ru

Abstract

The article presents a software package written in C # (the Microsoft Windows) operating system that enables automation of studying stability of three-degree-of-freedom system stability with delay. Such systems are often found in practice (or systems of higher dimensionality can be brought to them by suitable simplification of the model) and therefore the considered model together with the of analysis can be used to study other practically significant dynamical systems. As an example of using a software package to study the stability of a three-degree-of-freedom system, in which the delay effect is manifested, we consider the problem of self-excitation of the oscillations of the system of electrode holders (EH) of an arc steel furnace. The equivalent mechanical model is three EHs modeled by solids that perform small torsional vibrations. Self-excitation of vibrations arises due to the mutual influence of electrodynamic forces acting between the electrodes and the elastic forces of the structure. The idealized mathematical model of the oscillations of three EHs is a system of ordinary differential equations of the 6th order with delay. Using the software package, D – partition curves were constructed and stability regions were obtained for various values of the model parameters. The results of the study are presented in the form of figures and tables. Since the mathematical apparatus is still quite simple for a three-degree-of-freedom system, the material presented in the article can be used in the educational process when preparing specialists in applied mathematics.

Keywords: Program complex, system of differential equations, delay, stability, D – partition.

For citation: Grezina A.V., Panasenکو A.G. Software Complex for Research of Stability of Discrete Dynamic Systems with Delay. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(3):712-720. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.712-720



Введение

Решение любой естественнонаучной, технической или технологической задачи начинается с построения ее упрощенной эквивалентной модели, в которой сохраняются главные специфические для данного объекта и процесса характеристики и отбрасываются второстепенные. Этот этап является важнейшим, а его успех часто определяется интуицией исследователя. В качестве примера, поясняющего важность выявления главной черты явления, можно привести феномен сверхпроводимости в электричестве. Понять и описать явление сверхпроводимости удалось только через 50 лет после его открытия, когда было понято, что слабое взаимодействие электронов проводимости в проводнике, возбуждаемое колебаниями решетки, приводит к радикальному изменению энергетического спектра электронов.

После того как получена упрощенная эквивалентная модель объекта, можно построить ее математическую модель и применить для исследований стандартные математические методы.

Процессы, в которых участвуют объекты с конечным числом степеней свободы, изменяющихся со временем, как правило, можно описывать системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоретические основы и практические методы нахождения и исследования их решений хорошо развиты.

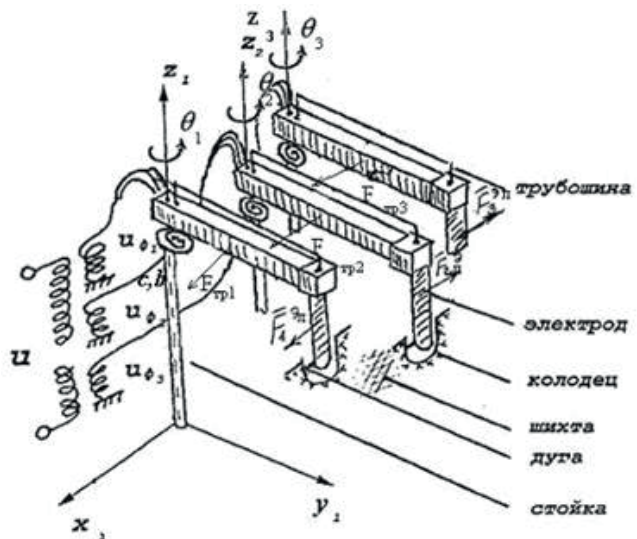
Ситуация усложняется, если во взаимодействии элементов системы наблюдается эффект запаздывания, который определяет характерное поведение системы. Исследование математических моделей с запаздыванием требует применения не только аналитических, но и численных методов. Эффект запаздывания проявляется в задачах, относящихся к различным разделам науки и техники, например, в экологии [1-3], экономике [3-5], технике [3,6-14], физике [3,15-18], биологии и медицине [3,19-21] и т.д.

Включение в рассмотрение эффекта запаздывания существенно повышает сложность задачи, поэтому в работе ограничимся рассмотрением объекта с тремя степенями свободы, что позволяет при практических применениях иметь работающий образец для исследования.

Учитывая, что реализация современных образовательных программ современных образовательных стандартов невозможна без применения информационных технологий [22-24], представленный в статье программный комплекс может быть использован в качестве практического средства при изучении дисциплин, связанных с математическим моделированием процессов, протекающих в динамических системах с запаздыванием.

Математическая модель

В качестве примера использования программного комплекса для исследования устойчивости состояния равновесия системы с запаздыванием рассмотрим задачу о самовозбуждении крутильных колебаний в одной электромеханической системе (системе электрододержателей (ЭД) дуговой сталеплавильной печи) [26].



Р и с. 1. Эквивалентная механическая модель системы ЭД
F i g. 1. Equivalent mechanical model of electrode holder system

Для этого рассмотрим эквивалентную механическую модель трех ЭД, представленную на рисунке 1, на которой в качестве основных колебательных элементов выделены верхние части ЭД (горизонтальный рукав с трубошинами и электродом, представленные в виде твердых тел), крутильная жесткость стоек - в виде дискретной пружины, имеющей приведенную жесткость s .

Известно [26], что природа самовозбуждающихся колебаний ЭД скрыта во взаимосвязи электродинамических сил, действующих на их токоведущие элементы (трубошины и электроды) с колебаниями упругой конструкции ЭД. С одной стороны, система ЭД подвержена воздействию электродинамических сил и моментов, а с другой, колебания ЭД приводят к изменению длин электрических дуг, что в свою очередь, приводит к изменению протекающего в каждой фазе тока.

Приведенные к центру масс электродинамические силы, действующие на трубошины F_{ijmp}^- и приведенные к центру масс электродинамические силы, действующие на электроды F_{ij}^- , запишутся в виде:

$$F_{ijmp}^- = \frac{\mu_a I_i I_j l_j'}{2\pi r_{ij}}, \quad F_{ijM}^- = \frac{\mu_a I_i I_j l_1'}{2\pi r_{ij}}, \quad (2)$$

где $\mu_a = \mu_0 \mu$ - абсолютная магнитная проницаемость ($\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м - магнитная постоянная, μ - относительная магнитная проницаемость), I_i - сила тока в i -м проводнике, I_j - сила тока в j -м проводнике, l - длина проводника (верхней горизонтальной части ЭД), l_1 - длина электрода, r_{ij} - расстояние между i -м и j -м проводниками.

Колебания ЭД вызывают изменения длин дуг на величину Δl_g , и, соответственно, ΔI_i токов:

$$\Delta I_i = - \frac{((\alpha_i + \beta_i l_g^0) + I_i^0 R) \beta_i \Delta l_g^0}{I_i^2 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_i + \beta_i l_g^0)}, \quad (3)$$

где I_i^0 - стационарное значение силы тока в i -м проводнике, α_i - анодно-катодное напряжение на дуге, β_i - градиент столба дуги, χ , R - приведенные реактивное и активное сопротивления соответственно. Так как наибольший интерес представля-



ет горение боковых дуг, то изменение длин горящих дуг от стационарного значения l_g^0 с изменением обобщенных координат $\Theta_i(t)$ запишем в виде $\Delta l_{gi}^0 = l_{gi}(t - \tau)$. Выражения приращений приведенных электродинамических сил имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta F_{1,imp}^- &= \Delta I_i \frac{\mu_a I_1^0 l}{2\pi r_{1i}^0}, \Delta F_{1,iM}^- = \Delta I_i \frac{\mu_a I_1^0 l_i}{2\pi r_{1i}^0}, i = 1, 2 \\ \Delta F_{2,jmp}^- &= \Delta I_j \frac{\mu_a I_2^0 l}{2\pi r_{2j}^0}, \Delta F_{2,jM}^- = \Delta I_j \frac{\mu_a I_2^0 l_j}{2\pi r_{2j}^0}, j = 1, 3 \\ \Delta F_{3,kmp}^- &= \Delta I_k \frac{\mu_a I_3^0 l}{2\pi r_{3k}^0}, \Delta F_{3,kM}^- = \Delta I_k \frac{\mu_a I_3^0 l_k}{2\pi r_{3k}^0}, r = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Известно, что электродинамические силы формируются не мгновенно, а с некоторым запаздыванием $\tau = \chi / (2\pi fR)$, (где f – собственная частота колебаний) являющимся постоянной времени электрического контура цепи.

Таким образом, математическая модель, описывающая крутильные колебания верхних частей ЭД, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка с запаздыванием:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\Theta}_1(t) + b_1 \dot{\Theta}_1(t) + c_1 \Theta_1(t) + l^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) \mu_a \frac{I_1^0 I_2^0}{2\pi r_{12}^0} (\Theta_1(t) - \Theta_2(t)) + \\ + l^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) \mu_a \frac{I_1^0 I_3^0}{2\pi r_{13}^0} (\Theta_1(t) - \Theta_3(t)) = \Delta M_{12mp}^{\ominus} + \Delta M_{12\ominus}^{\ominus} + \Delta M_{13mp}^{\ominus} + \Delta M_{13\ominus}^{\ominus}, \\ J_2 \ddot{\Theta}_2(t) + b_2 \dot{\Theta}_2(t) + c_2 \Theta_2(t) + l^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) \mu_a \frac{I_2^0 I_1^0}{2\pi r_{12}^0} (\Theta_2(t) - \Theta_1(t)) + \\ + l^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) \mu_a \frac{I_2^0 I_3^0}{2\pi r_{23}^0} (\Theta_2(t) - \Theta_3(t)) = \Delta M_{21mp}^{\ominus} + \Delta M_{21\ominus}^{\ominus} + \Delta M_{23mp}^{\ominus} + \Delta M_{23\ominus}^{\ominus}, \\ J_3 \ddot{\Theta}_3(t) + b_3 \dot{\Theta}_3(t) + c_3 \Theta_3(t) + l^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) \mu_a \frac{I_3^0 I_1^0}{2\pi r_{31}^0} (\Theta_3(t) - \Theta_1(t)) + \\ + l^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) \mu_a \frac{I_3^0 I_2^0}{2\pi r_{32}^0} (\Theta_3(t) - \Theta_2(t)) = \Delta M_{31mp}^{\ominus} + \Delta M_{31\ominus}^{\ominus} + \Delta M_{32mp}^{\ominus} + \Delta M_{32\ominus}^{\ominus}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu_a = \frac{\mu_a I_i^0 l^2}{2\pi r_{ij}^0} \cdot \frac{(\alpha_j + \beta_j I_g^0) + I_j^0 R}{I_i^0 (R^2 + \chi^2) + R(\alpha_j + \beta_j I_g^0)} \cdot \beta_j l \Theta_j(t - \tau)$,
 $\Delta M_{ij}^- = \frac{\mu_a I_i^0 l_1 l}{2\pi r_{ij}^0} \cdot \frac{(\alpha_j + \beta_j I_g^0) + I_j^0 R}{I_i^0 (R^2 + \chi^2) + R(\alpha_j + \beta_j I_g^0)} \cdot \beta_j l \Theta_j(t - \tau)$,
 c_i, b_i, J_i – приведенная жесткость, коэффициент рассеивания энергии, момент инерции верхней части i -го ЭД с электродом, $\Delta M_{ijmp}^{\ominus}, \Delta M_{ij\ominus}^{\ominus}$ – приращения моментов электродинамических сил относительно осей Oz_i .

Построение характеристического уравнения

Для исследования устойчивости состояния равновесия воспользуемся методом D-разбиения [25]. Для построения характеристического уравнения запишем систему уравнений [5] в более удобном виде:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\Theta}_1(t) + b_1 \dot{\Theta}_1(t) + c_{11} \Theta_1(t) - c_{12} \Theta_2(t) - c_{13} \Theta_3(t) =, \\ = -\sigma_{12} \Theta_2(t - \tau) - \sigma_{13} \Theta_3(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\Theta}_2(t) + b_2 \dot{\Theta}_2(t) + c_{22} \Theta_2(t) - c_{21} \Theta_1(t) - c_{23} \Theta_3(t) = \\ = -\sigma_{21} \Theta_1(t - \tau) - \sigma_{23} \Theta_3(t - \tau), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} J_3 \ddot{\Theta}_3(t) + b_3 \dot{\Theta}_3(t) + c_{33} \Theta_3(t) - c_{31} \Theta_1(t) - c_{32} \Theta_2(t) =, \\ = -\sigma_{31} \Theta_1(t - \tau) - \sigma_{32} \Theta_2(t - \tau) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{\mu_a I^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) I^0}{2\pi r_{12}} \cdot \frac{I^0 R + (\alpha_2 + \beta_2 I_g^0)}{I^0 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_2 + \beta_2 I_g^0)} \beta_2, \\ \sigma_{21} &= \frac{\mu_a I^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) I^0}{2\pi r_{12}} \cdot \frac{I^0 R + (\alpha_1 + \beta_1 I_g^0)}{I^0 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_1 + \beta_1 I_g^0)} \beta_1, \\ \sigma_{13} &= \frac{\mu_a I^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) I^0}{2\pi r_{13}} \cdot \frac{I^0 R + (\alpha_3 + \beta_3 I_g^0)}{I^0 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_3 + \beta_3 I_g^0)} \beta_3, \\ \sigma_{31} &= \frac{\mu_a I^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) I^0}{2\pi r_{13}} \cdot \frac{I^0 R + (\alpha_1 + \beta_1 I_g^0)}{I^0 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_1 + \beta_1 I_g^0)} \beta_1, \\ \sigma_{23} &= \frac{\mu_a I^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) I^0}{2\pi r_{23}} \cdot \frac{I^0 R + (\alpha_3 + \beta_3 I_g^0)}{I^0 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_3 + \beta_3 I_g^0)} \beta_3, \\ \sigma_{32} &= \frac{\mu_a I^2 \left(\frac{l}{2} + l_1\right) I^0}{2\pi r_{23}} \cdot \frac{I^0 R + (\alpha_2 + \beta_2 I_g^0)}{I^0 (\chi^2 + R^2) + R(\alpha_2 + \beta_2 I_g^0)} \beta_2. \end{aligned}$$

направленные связи по координате.

Считая, что активные и реактивные сопротивления, анодно-катодные напряжения на дуге, градиент столба дуги и стационарные значения силы тока одинаковы во всех трех фазах печи, обозначим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta, r_{12} = r_{23} = r_{13} / 2, c_{13} = c, c_{12} = c_{23} = 4c_{13}, c_{11} = c_{33} = A, c_{22} = A_2, \sigma_{13} = \sigma, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 2\sigma_{13} = \sigma$.

В результате преобразований получим характеристическое уравнение, представляющее собой квазиполином вида:

$$8\sigma^3 e^{-3p\tau} + (-40\sigma^2 c + (-8P_1 - P_2)\sigma^2) e^{-2p\tau} + (64\sigma c^2 + (2P_2 + 32P_1)\sigma c) e^{-p\tau} - 32c^3 + (-32P_1 - P_2)c^2 + P_2 P_1^2 = 0, \quad (7)$$

$$8\sigma^3 e^{-3p\tau} + (-40\sigma^2 c + (-8P_1 - P_2)\sigma^2) e^{-2p\tau} + (64\sigma c^2 + (2P_2 + 32P_1)\sigma c) e^{-p\tau} - 32c^3 + (-32P_1 - P_2)c^2 + P_2 P_1^2 = 0,$$

$$-32c^3 + (-32P_1 - P_2)c^2 + P_2 P_1^2 = 0,$$

$$\text{где } P_1 = Jp^2 + bp + A, P_2 = Jp^2 + bp + A_2, P_3 = P_1.$$

Для построения D-разбиения по одному комплексному параметру введем в уравнение (7) комплексный параметр $w(p)$:

$$\begin{aligned} w(p) = \frac{1}{P_2 P_1^2} (8\sigma^3 e^{-3p\tau} + (-40\sigma^2 c + (-8P_1 - P_2)\sigma^2) e^{-2p\tau} + \\ + (64\sigma c^2 + (2P_2 + 32P_1)\sigma c) e^{-p\tau} - 32c^3 + (-32P_1 - P_2)c^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Исходному значению квазиполинома соответствует $w = -1$.



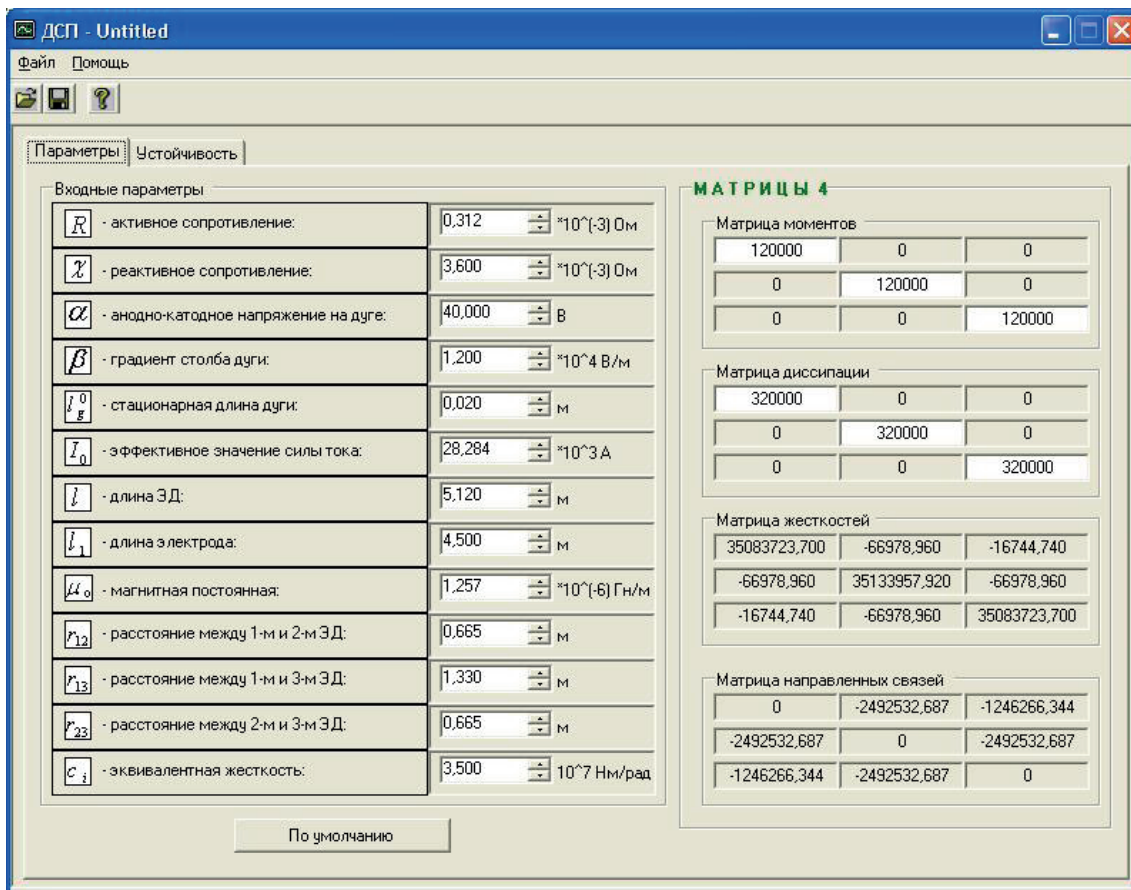
Описание программного комплекса

Для исследования устойчивости состояния равновесия написан программный комплекс на языке C#, включающий в себя исполняемый файл DSP firm.EXE, в котором реализованы интерфейс программы и расчеты устойчивости состояния равновесия, а также файл Graph2d.DLL (графический компонент). Входными параметрами являются параметры математической модели, по которым автоматически формируются матри-

цы моментов инерции, диссипации, жесткости и направленных связей. В процессе работы в главном окне программного комплекса выдаются комментарии и подсказки о требуемых действиях.

Режим «Помощь» включает в себя краткие сведения о программном комплексе и рекомендации по работе.

Главное меню программного комплекса представлено на рисунке 2.



Р и с. 2. Главное меню программного комплекса

Fig. 2. The software package main menu

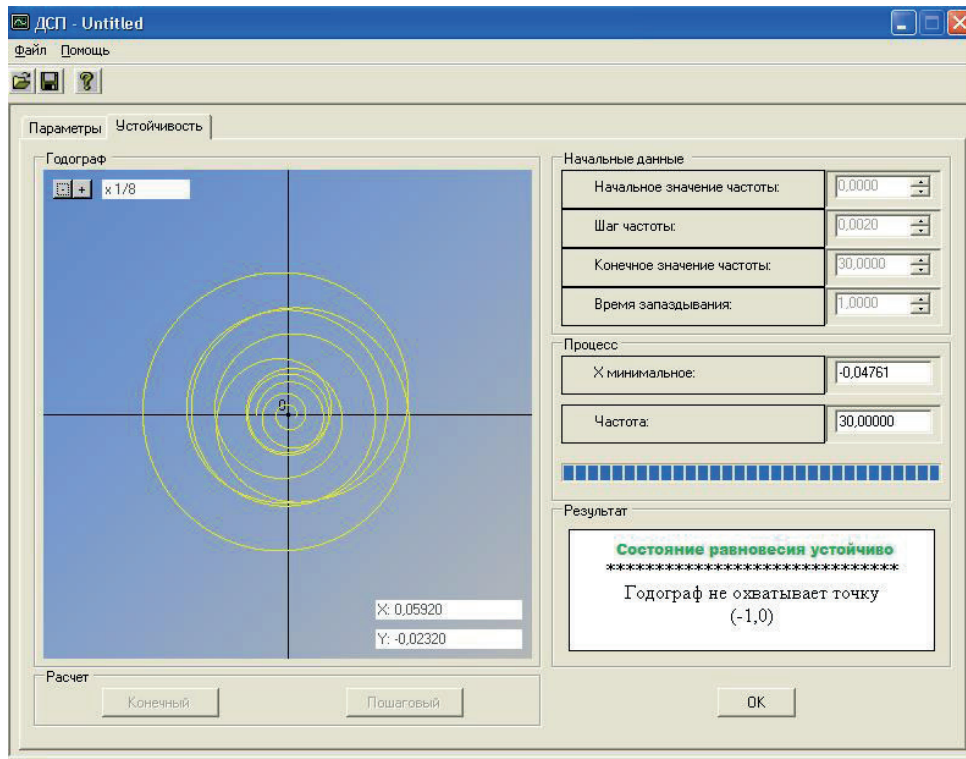
Выбрав закладку «Параметры» можно изменять входные параметры системы ЭД, а также элементы матриц моментов, диссипации, жесткостей и направленных связей.

В закладке «Устойчивость» строится кривая D–разбиения в плоскости комплексного параметра $w(p)$ при $p = i\omega$, $\omega \in [0, +\infty)$. Кривая для $-\infty < \omega < 0$ получается зеркальным отображением построенной кривой относительно реальной оси. Используя правила штриховки, находится область устойчивости $D(0)$. Если точка $w = -1$ находится внутри области $D(0)$, т.е. -1 находится слева от построенной кривой в заштрихованной области, то состояние равновесия устойчиво. В результате численного эксперимента выдается сообщение об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия. Имеется возможность изменения начального и конечного значений частоты, шага частоты и времени запаздывания.

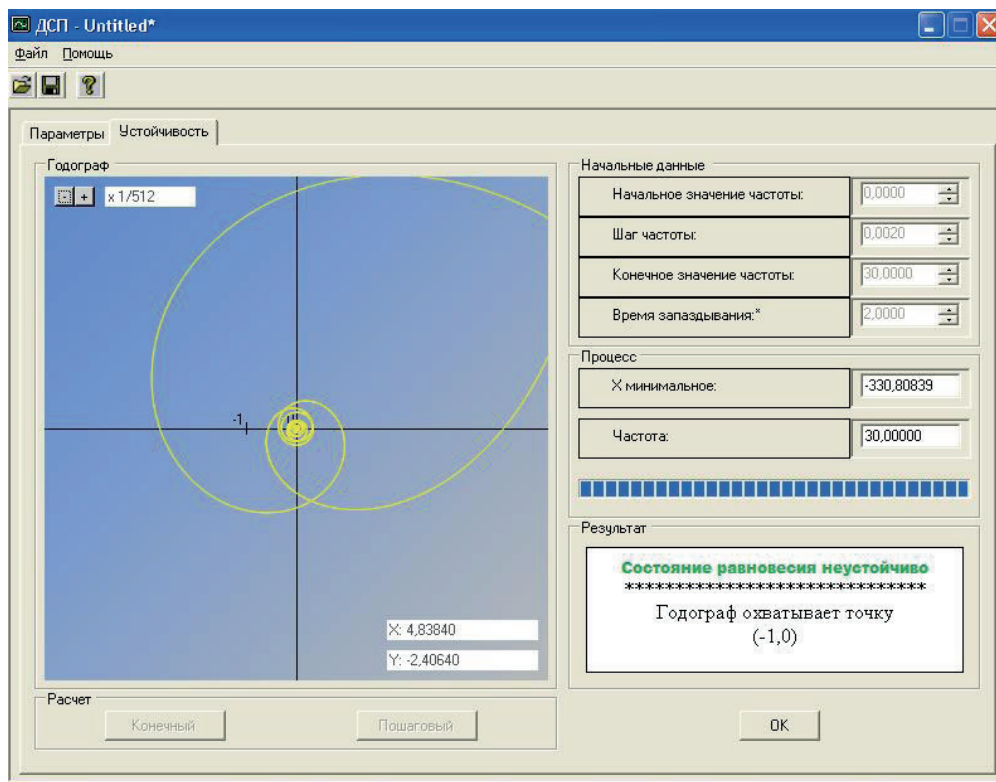
Визуализация и анализ результатов численных экспериментов

На рисунках 2 и 3 представлены результаты численных экспериментов при различных значениях параметров жесткости c [Нм], рассеивания энергии b [Нмс] и абсолютной магнитной проницаемости среды $\alpha\eta$. Кривая D–разбиения в плоскости одного комплексного параметра построена при $\omega \in [0, +\infty)$. По результатам численных экспериментов построены области устойчивости (таблицы 1, 2). В таблицах области устойчивости выделены желтым цветом, области неустойчивости - синим.





Р и с. 3. Результаты численного эксперимента
F i g. 3. Results of a numerical experiment



Р и с. 4. Результаты численного эксперимента
F i g. 4. Results of a numerical experiment



Результаты численного эксперимента № 1
Таблица 1. Область устойчивости при $\mu_0 = 1.25 * 10^{-6}$

Table 1. The stability region at $\mu_0 = 1.25 * 10^{-6}$

$b \setminus c$	$3*10^7$	$3.5*10^7$	$4*10^7$	$4.5*10^7$	$5*10^7$	$5.5*10^7$	$6*10^7$	$7*10^7$	$8*10^7$	$3.5*10^8$
$3.5*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$6*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$7*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$7.8*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$8*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue

Результаты численного эксперимента № 2
Таблица 2. Область устойчивости при $\mu_0 = 0.4 * 10^{-6}$

Table 2. The stability region at $\mu_0 = 0.4 * 10^{-6}$

$b \setminus c$	$3*10^7$	$3.5*10^7$	$4*10^7$	$4.5*10^7$	$5*10^7$	$5.5*10^7$	$6*10^7$	$7*10^7$	$8*10^7$	$3.5*10^8$
$3.5*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$6*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$7*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$7.8*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
$8*10^4$	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue

Анализ таблиц показывает, что с ростом параметров c , b и уменьшением абсолютной магнитной проницаемости среды ϵ_0 область устойчивости увеличивается. Увеличение параметра b соответствует росту рассеиваемой энергии в системе, а уменьшение ϵ_0 приводит к уменьшению направленных связей, что способствует увеличению области устойчивости. Практически ослабить направленные связи можно с помощью специальной магнитной защиты в виде железного экрана. Это приводит к сгущению линий магнитной индукции в толще экрана и к ослаблению поля, действующего на трубошины ЭД. Добиться увеличения коэффициента рассеивания энергии можно за счет увеличения внутреннего трения верхних частей стоек ЭД.

Заключение

Описанный в статье программный комплекс позволяет автоматизировать процесс исследования устойчивости состояния равновесия системы с тремя степенями свободы с запаздыванием. В качестве примера использования программного комплекса рассмотрена задача о самовозбуждении крутильных колебаний системы электрододержателей (ЭД) дуговой сталеплавильной печи. Представлена эквивалентная механическая модель системы, колебания которой описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка с запаздыванием. С помощью программного комплекса построены кривые D-разбиения и получены области устойчивости при различных значениях параметров модели. Представленный в работе программный комплекс может быть использован в образовательном процессе при подготовке специалистов в области прикладной математики, а также в научных исследованиях.

Список использованных источников

- [1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
- [2] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1993. Т. 199. С. 3-124. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm&paperid=1373&option_lang=rus (дата обращения: 17.06.2019).
- [3] Neimark Yu. I. Mathematical Models in Natural Science and Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 575 pp. DOI: 10.1007/978-3-540-47878-2
- [4] Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.
- [5] Прасолов А. В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. СПб.: Изд-во «Лань», 2010.
- [6] Городецкий Ю. И. Создание математических моделей сложных колебательных систем в станкостроении // Автоматизация проектирования / Под. общ. ред. В.А. Трапезникова. Сб. ст. Вып. 1. М.: Машиностроение, 1989. С.203-220.
- [7] Красильников А. Я., Кравченко К. Ю. Аналитические методы исследования устойчивости систем с запаздыванием, описывающие процесс фрезерования // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2013. № 9(198). С. 23-31. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20220829> (дата обращения: 17.06.2019).
- [8] Sridhar R., Hohn R. E., Long G. W. A General Formulation of Milling Process Equation: Contribution to Machine Tool Chatter Research // Journal of Manufacturing Science and Engineering. 1968. Vol.90, Issue 2. Pp.317-324. DOI: 10.1115/1.3604635
- [9] Niculescu S.-I. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. LNCIS, Vol. 269. Springer, Heidelberg, 2001. DOI:



- 10.1007/1-84628-553-4
- [10] *Richard J.-P.* Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // *Automatica*. 2003. Vol. 39, Issue 10. Pp. 1667-1694. DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00167-5
- [11] *Kharitonov V. L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Birkhäuser Basel, 2013. 311 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-8367-2
- [12] *Michiels W., Niculescu S.-I.* Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach. SIAM, Philadelphia, 2007. 400 p.
- [13] *Zaika Yu. V.* Interval estimates of functionals in time-delay systems with uncertainty // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2003. Vol. 2003. Article ID 270496. Pp. 3573-3590. DOI: 10.1155/S0161171203203264
- [14] *Ochoa G., Kharitonov V. L., Mondie S.* Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach // *Systems & Control Letters*. 2013. Vol. 62, Issue 9. Pp. 781-790. DOI: 10.1016/j.sysconle.2013.05.010
- [15] *Дэй У. А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.
- [16] *Зубов В. И.* Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
- [17] *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
- [18] *Li C. P., Sun W. G., Kurths J.* Synchronization of complex dynamical networks with time delays // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2006. Vol. 361, Issue 1. Pp. 24-34. DOI: 10.1016/j.physa.2005.07.007
- [19] *Esir P. M., Gordleeva S. Y., Simonov A. Y., Pisarchik A. N., Kazantsev V. B.* Conduction delays can enhance formation of up and down states in spiking neuronal networks // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, Issue 5. Pp. 052401. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.052401
- [20] *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991.
- [21] *Kuzenkov O., Morozov A.* Towards the Construction of a Mathematically Rigorous Framework for the Modelling of Evolutionary Fitness // *Bulletin of Mathematical Biology*. 2019. Vol. 81, Issue 11. Pp. 4675-4700. DOI: 10.1007/s11538-019-00602-3
- [22] *Zakharova I., Kuzenkov O., Soldatenko I., Yazenin A., Novikova S., Medvedeva S., Chukhnov A.* Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia // *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016)*. 12 - 15 September 2016, Tampere, Finland. 15 p. URL: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/zakharova-using-sefi-framework-for-modernization-of-requirements-system-for-mathematical-education-155.pdf> (дата обращения: 17.06.2019).
- [23] *Soldatenko I., Kuzenkov O., Zakharova I., Balandin D., Biryukov R., Kuzenkova G., Yazenin A., Novikova S.* Modernization of math-related courses in engineering education in Russia based on best practices in European and Russian universities // *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016)*. 12-15 September 2016, Tampere, Finland. 16 p. URL: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/soldatenko-modernization-of-math-related-courses-in-engineering-education-in-russia-based-133.pdf> (дата обращения: 17.06.2019).
- [24] *Bedny A., Erushkina L., Kuzenkov O.* Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology // *Tuning Journal for Higher Education*. 2014. Vol. 1, Issue 2. Pp. 387-404. DOI: 10.18543/tjhe-1(2)-2014pp387-404
- [25] *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
- [26] *Грезина А. В.* Математическое моделирование динамики системы электрододержателей дуговых сталеплавильных печей // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2004. Т. 4, № 1(5). С. 5-10. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18215545> (дата обращения: 17.06.2019).

Поступила 17.06.2019; принята к публикации 15.08.2019;
опубликована онлайн 30.09.2019.

Об авторах:

Грезина Александра Викторовна, доцент кафедры прикладной математики, Институт информационных технологий математики и механики, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8448-4185>, aleksandra-grezina@yandex.ru

Панасенко Адольф Григорьевич, доцент кафедры прикладной математики, Институт информационных технологий математики и механики, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4148-9300>, A.G.Panasenko@yandex.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Volterra V. *Lecons sur la Theorie Mathematique de la lutte pour la Vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931. (In French)
- [2] Kolesov A.Yu., Kolesov Yu.S. Relaxational oscillations in mathematical models of ecology. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova* = *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 1995; 199:1-126. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm&paperid=1373&option_lang=rus (accessed 17.06.2019). (In Eng.)
- [3] Neimark Yu. I. *Mathematical Models in Natural Science and Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-540-47878-2
- [4] Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayushchihsya sistem* [Modeling of Developing Systems]. Nauka, Moscow, 1983. (In Russ.)
- [5] Prasadlov A.V. *Dinamicheskie modeli s zapazdyvaniem i ih*



- prilozheniya v ekonomike i inzhenerii* [Dynamic models with delay and their applications in Economics and engineering]. DOE publishing house, SPb., 2010. (In Russ.)
- [6] Gorodetsky Yu.I. Creation of mathematical models of complex oscillatory systems in the machine tool industry. In: Trapeznikov V.A. (ed.) *Avtomatizatsiya proektirovaniya*. Mashinostroenie, Moscow, 1986: 1:203-220. (In Russ.)
- [7] Krasilnikov A.Ya., Kravchenko K.Yu. Analytical Approaches For Stability Analysis Of Milling Process As A Delay System. *SPRAVOCHNIK. Inzhenernyi zhurnal = HANDBOOK*. An Engineering journal with appendix. 2013; 9(198):23-31. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20220829> (accessed 17.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)
- [8] Sridhar R., Hohn R. E., Long G. W. A General Formulation of Milling Process Equation: Contribution to Machine Tool Chatter Research. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. 1968; 90(2):317-324. (In Eng.) DOI: 10.1115/1.3604635
- [9] Niculescu S.-I. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. *LNCIS*, vol. 269. Springer, Heidelberg, 2001. (In Eng.) DOI: 10.1007/1-84628-553-4
- [10] Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*. 2003; 39(10):1667-1694. (In Eng.) DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00167-5
- [11] Kharitonov V.L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Birkhäuser Basel, 2013. 311 p. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-0-8176-8367-2
- [12] Michiels W., Niculescu S.-I. Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach. SIAM, Philadelphia, 2007. 400 p. (In Eng.)
- [13] Zaika Yu.V. Interval estimates of functionals in time-delay systems with uncertainty. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2003; 2003(270496):3573-3590. (In Eng.) DOI: 10.1155/S0161171203203264
- [14] Ochoa G., Kharitonov V.L., Mondie S. Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach. *Systems & Control Letters*. 2013; 62(9):781-790. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.sysconle.2013.05.010
- [15] Day W.A. The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory. *Springer Tracts in Natural Philosophy*, vol. 22. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-642-65318-6
- [16] Zubov V.I. *Analiticheskaya dinamika sistemy* [Analytical Dynamics of System of Bodies]. Leningrad Univ., Leningrad, 1983. (In Russ.)
- [17] Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solid bodies]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russ.)
- [18] Li C.P., Sun W.G., Kurths J. Synchronization of complex dynamical networks with time delays. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2006; 361(1):24-34. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.physa.2005.07.007
- [19] Esir P.M., Gordleeva S.Y., Simonov A.Y., Pisarchik A.N., Kazantsev V.B. Conduction delays can enhance formation of up and down states in spiking neuronal networks. *Physical Review E*. 2018; 98(5):052401. (In Eng.) DOI: 10.1103/PhysRevE.98.052401
- [20] Marchuk G.I. *Matematicheskie modeli v immunologii. Vychislitel'nye metody i eksperimenty* [Mathematical Models in Immunology. Computational Methods and Experiments]. Nauka, Moscow, 1991. (In Russ.)
- [21] Kuzenkov O., Morozov A. Towards the Construction of a Mathematically Rigorous Framework for the Modelling of Evolutionary Fitness. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2019; 81(11):4675-4700. (In Eng.) DOI: 10.1007/s11538-019-00602-3
- [22] Zakharova I., Kuzenkov O., Soldatenko I., Yazenin A., Novikova S., Medvedeva S., Chukhnov A. Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia. In: *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016)*. 12 - 15 September 2016, Tampere, Finland. 15 p. Available at: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/zakharova-using-sefi-framework-for-modernization-of-requirements-system-for-mathematical-education-155.pdf> (accessed 17.06.2019). (In Eng.)
- [23] Soldatenko I., Kuzenkov O., Zakharova I., Balandin D., Biryukov R., Kuzenkova G., Yazenin A., Novikova S. Modernization of math-related courses in engineering education in Russia based on best practices in European and Russian universities. In: *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 - Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016)*. 12-15 September 2016, Tampere, Finland. 16 p. Available at: <http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/soldatenko-modernization-of-math-related-courses-in-engineering-education-in-russia-based-133.pdf> (accessed 17.06.2019). (In Eng.)
- [24] Bedny A., Erushkina L., Kuzenkov O. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology. *Tuning Journal for Higher Education*. 2014; 1(2):387-404. (In Eng.) DOI: 10.18543/tjhe-1(2)-2014pp387-404
- [25] Neimark Y.I. *Dinamicheskie sistemy i upravlyaemye processy* [Dynamic systems and controllable processes]. Nauka, Moscow, 1978. (In Russ.)
- [26] Grezina A.V. Mathematical Modelling of the Steel Melting Arc Furnaces Electrode Holders System Dynamics. *Vestnik Saratov state technical university*. 2004; 4(1):5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18215545> (accessed 17.06.2019). (In Russ., abstract in Eng.)

Submitted 17.06.2019; revised 15.08.2019;
published online 30.09.2019.

About the authors:

Alexandra V. Grezina, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technology, Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhnij Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8448-4185>, aleksandra-grezina@yandex.ru

Adolf G. Panasenko, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technology, Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhnij Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4148-9300>, A.G.Panasenko@yandex.ru

