### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ИНФОРМАТИКИ, ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И КОГНИТИВНО-ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 519.872.1 DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.563-571

# Анализ модели схемы доступа к радиоресурсам беспроводной сети с прерыванием обслуживания пользователей

#### К. И. Аду<sup>1</sup>, Е. В. Маркова<sup>1</sup>, И. А. Гудкова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия
 117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
 \*markova\_ev@rudn.ru
 <sup>2</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-2

#### Аннотация

В связи с развитием телекоммуникационных беспроводных сетей последующих поколений, в частности сетей на базе технологии LTE, повышается спрос на высокоскоростные услуги, а также увеличивается число их пользователей. Это приводит к экспоненциальному росту объема передаваемого в мобильных сетях трафика. Согласно последним данным ведущих участников телекоммуникационного рынка, таких как, например, компания Cisco Systems, объем трафика, генерируемого в современных мобильных сетях, увеличится на 46 процентов в период с 2016 по 2021 года. В то же время повышаются требования к уровню качества обслуживания пользователей. Стремительный рост трафика в условиях предоставления пользователям мобильных сетей широкого спектра высококачественных мультимедийных услуг приводит к нехватке доступного частотного диапазона. Данная проблема становится главной в развитии современных технологий беспроводной связи. В связи с этим операторы сотовых сетей предлагают различные методы ее решения, например, применение системы LAA (англ. Licensed Assisted-Access) или LSA (англ. Licensed Shared Access). Эти системы позволяют более эффективно использовать имеющиеся частотные ресурсы. Помимо этого, в рамках реализации различных технологий для обеспечения требуемого уровня качества обслуживания пользователей могут быть применены такие механизмы управления радиоресурсами, как снижение мощности передачи данных и прерывание обслуживания пользователей. Модели реализующие такие механизмы могут быть описаны в виде систем массового обслуживания (СМО) с ненадежными приборами. В работе построена модель соты беспроводной сети, представленная в виде СМО, приборы которой находятся в случайной среде. Состояние случайной среды может изменяться, что с технической точки зрения эквивалентно уменьшению или увеличению мощности передачи сигнала. Снижение мощности может привести к прерыванию обслуживания пользователей. Предложены точный и приближенный методы для расчета стационарного распределения вероятностей состояний модели.

**Ключевые слова:** СМО; случайная среда; прерывание обслуживания; рекуррентный алгоритм; приближенный метод.

Финансирование: публикация подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-37-00231 мол\_а «Разработка моделей и алгоритмов для анализа схем совместного использования радиочастот в беспроводных мультисервисных сетях с произвольным расположением устройств в пространстве».



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License. The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ИНФОРМАТИКИ, ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И КОГНИТИВНО-ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Для цитирования:** *Аду К. И., Маркова Е. В., Гудкова И. А.* Анализ модели схемы доступа к радиоресурсам беспроводной сети с прерыванием обслуживания пользователей // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 3. С. 563-571. DOI: 10.25559/ SITITO.15.201903.563-571

© Аду К. И., Маркова Е. В., Гудкова И. А., 2019



# THEORETICAL QUESTIONS OF COMPUTER SCIENCE, COMPUTATIONAL MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE AND COGNITIVE INFORMATION TECHNOLOGIES

# To Performance Analysis of a Wireless Network with Dynamic Power Control Policy

K. Y. Adou<sup>1</sup>, E. V. Markova<sup>1</sup>, I. A. Gudkova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia

\*markova\_ev@rudn.ru

<sup>2</sup> Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russia

#### Abstract

In connection with the development of next-generation wireless networks based on LTE technology, demands for high-speed services are increasing leading to an exponential increase in the volume of traffic generated in mobile networks. According to the latest data from Cisco Systems, this volume will increase by 46 percent by 2021. At the same time, requirements for the level of quality of service (QoS) are increasing. The rapid growth of traffic in the conditions of providing users with a wide range of high-quality multimedia services leads to a lack of available frequency resources. This problem becomes the main one in the development of modern wireless technologies. In this regard, cellular network operators offer various methods for its solution, for example, using the LAA (Licensed Assisted-Access) or LSA (Licensed Shared Access) systems allowing more efficient use of available frequency resources. In addition, in the framework of the implementation of various technologies to ensure the required QoS, radio resource management mechanisms (RRM) such as reducing data transmission power and interrupting users' service can be applied. Models implementing such mechanisms can be described as queuing systems (QS) with unreliable servers. In the paper, a model of a wireless network cell is constructed, presented in the form of a QS, servers of which are in a random environment (RE). RE state can change, which is technically equivalent to a decrease or increase in the transmission power. Reducing power may interrupt users' service. Exact and approximate methods are proposed for calculating the stationary probability distribution of the model.

**Keywords:** Queuing system, random environment, service interruption, recursive algorithm, approximate method.

**Funding:** The publication was prepared with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research as a part of scientific project No. 18-37-00231 мол\_а «Development of Models and Algorithms for the Analysis of Radio Frequency Sharing Schemes in Wireless Multiservice Networks with an Arbitrary Location of Devices».

**For citation:** Adou K.Y., Markova E.V., Gudkova I.A. To Performance Analysis of a Wireless Network with Dynamic Power Control Policy. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(3):563-571. DOI: 10.25559/SITI-TO.15.201903.563-571





#### Введение

В современных мобильных сетях возникает проблема нехватки радиоресурсов [1,2], необходимых для предоставления пользователям услуг с требуемым уровнем качества обслуживания (англ. Quality of Service, QoS) [3, 4]. На данный момент существуют несколько способов решения этой технической проблемы, например, мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов (англ. Orthogonal frequencydivision multiplexing, OFDM) [5, 6, 7], многоантенная передача данных (англ. Multiple Input Multiple Output, MIMO) [8, 9, 10], мультимедийная, широковещательная и многоадресная передача (англ. Multimedia Broadcast Multicast Service, MBMS) [11, 12, 13, 14], совместное использование лицензированного спектра радиочастот при помощи системы LSA (англ. Licensed Shared Access) [15, 16, 17] или нелицензированного спектра частот при помощи системы LAA (англ. Licensed Assisted-Access) [18, 19]. При этом для более эффективного управления сетевыми ресурсами в рамках кажлого из этих решений могут быть использованы различные механизмы доступа, например, снижение мощности передачи сигнала [20, 21] и прерывание обслуживания пользователей [22, 23]. Модели с такими механизмами могут быть описаны в виде систем массового обслуживания (СМО) с ненадежными приборами.

Одним из типов таких СМО являются системы, работающие в случайной среде [24, 25, 26]. Случайная среда может значительно повлиять на работу телекоммуникационных систем. В частности, она оказывает существенное влияние на такие показатели эффективности системы, как средняя скорость передачи данных, среднее число обслуживаемых запросов и т.д.

В работе рассматривается модель схемы доступа к радиоресурсам беспроводной мультисервисной сети, описанная с помощью СМО с ненадежными приборами в случайной среде. В первом разделе проведено построение математической модели, построены инфинитезимальные матрицы для численного решения системы уравнений равновесия (СУР) и получены формулы для расчета основных вероятностных характеристик. Во втором разделе для более наглядного описания функционирования модели рассмотрен случай, в котором случайная среда характеризуется тремя состояниями, и предложен рекуррентный алгоритм расчета распределения вероятностей. В третьем разделе для анализа модели с тремя состояниями случайной среды предложен приближенный метод расчета распределения вероятностей. В заключительном четвертом разделе проведено сравнение результатов, полученных с помощью точного и приближенного методов.

#### Построение математической модели

Рассмотрим некоторую случайную среду, оказывающую влияние на показатели качества обслуживания пользователей в соте беспроводной сети радиуса R. Введем упрощающее предположение: все пользователи находятся на одинаковом расстоянии d от базовой станции (БС). Пусть в систему поступают запросы пользователей на предоставление услуг, генерирующих потоковый трафик с гарантированной скоростью передачи  $r_0$ .

Определим состояния случайной среды множеством  $\{0,...,S\}$ . Управление доступом к радиоресурсам системы реализовано таким образом, что под действием внешней среды

происходит снижение мощности передачи сигнала со значения  $p_s$  до значения  $p_{s-1}$ , при этом среда с интенсивностью  $\alpha_s$  переходит из состояния s в состояние s-1, а с интенсивностью  $\beta_s$  происходит обратный переход из состояния s-1 в состояние s и восстановление мощности до уровня  $p_s$ .

Таким образом под влиянием случайной среды мощность передачи сигнала может меняться, а это, в свою очередь, отражается на максимально-достижимой скорости передачи данных  $r_s$  и на максимальном числе  $N_s$  одновременно обслуживаемых запросов. Это число может быть рассчитано как отношение достижимой скорости  $r_s$ , определяемой по формуле Шеннона, к гарантированной скорости  $r_0$  следующим образом:

$$N_s = \left[ \omega \ln \left( \frac{Gp_s}{d^{\kappa} K_0} + 1 \right) \middle/ r_0 \right], s = 0, \dots, S,$$
<sup>(1)</sup>

где  $\omega$  – ширина полосы частот канала, G – коэффициент затухания сигнала,  $\kappa$  – степень затухания сигнала,  $K_0$  – мощность шума. Из формулы (1) следует, что  $N_s > N_{s-1} > ... > N_0$ . При переходе среды из состояния s в состояние s-1 происходит снижение числа обслуживаемых запросов пользователей с  $N_s$  до  $N_{s-1}$  за счет прерывания обслуживания  $N_s - N_{s-1}$  запросов. В таблице 1 представлены основные обозначения, используемые в работе.

Таблица 1. Основные обозначения Table 1. Principal Symbols

Обозна-	Описание
чение	
R	радиус соты, м
ω	ширина полосы частот канала, Гц
$lpha_{s}^{-1}$	интенсивность перехода в состояние $s-1, s \neq 0$ , с
$eta_s^{-1}$	интенсивность перехода в состояние $s+1, s \neq S$ , с
$N_s$	число обслуживаемых запросов в зависимости от состо-
	_яния среды <i>s</i> = 0,, <i>S</i>
$p_s$	максимальная мощность сигнала, Гц
$p_0$	минимальная мощность сигнала, Гц
$p_s$	текущая мощность сигнала $s=0,,S$ , Гц
d	расстояние до БС, м
$r_0$	гарантированная скорость передачи данных, Мбит/с
r	достижимая скорость передачи данных $s = 0,, S$ ,
	Мбит/с
λ	интенсивность входящего потока запросов, с
$\mu^{-1}$	интенсивность обслуживания одного запроса, с
$\rho = \lambda/\mu$	интенсивность предложенной нагрузки
$K_0$	мощность шума, Гц
G	коэффициент затухания сигнала, константа
К	степень затухания сигнала

Поведение системы описывает марковский процесс (МП)  $X(t) = (N(t), S(t), t \ge 0)$  над пространством состояний:

$$\mathbf{X} = \{ (n, s) : 0 \le n \le N_s, s = 0, ..., S \},$$
(2)

где *n* – число обслуживаемых запросов пользователей, *s* – состояние случайной среды.

Предположим, что входящий поток запросов является пуассоновским с параметром  $\lambda$ , а время обслуживания запросов экспоненциальным со средним значением  $\mu^{-1}$ . Тогда диаграмма интенсивностей переходов, имеет вид, представленный на рис. 1.



0.5 1.0 0.





P и с. 1. Диаграмма переходов для СМО в случайной среде F i g. 1. Transition diagram for QS in a random environment

Как видно из диаграммы, СУР для стационарного распределения p(n,s) имеет вид:

$$p(n,s) \cdot \begin{bmatrix} \lambda I \{s \le S, n < N_s\} + n\mu I \{s \le S, n > 0\} + \\ +\alpha_s I \{s \ne 0, n \le N_s\} + \beta_s I \{s \ne S - 1, n \le N_s\} \end{bmatrix} =$$

$$= p(n-1,s) \cdot \lambda I \{n > 0\} + p(n+1,s) \cdot (n+1)\mu I \{n < N_s\} + \\ + p(n,s+1) \cdot \alpha_{s+1} I \{s < S\} + p(n,s-1) \cdot \beta_{s-1} I \{s > 0\}, (n,s) \in \mathbf{X},$$
rge  $I$  – функция индикатор.
$$(3)$$

Вследствие реализации механизма прерывания обслуживаемых запросов, МП X(t) не является обратимым, поэтому не следует ожидать решения СУР (3) в замкнутом аналитическом виде. В связи с этим стационарное распределение  $\mathbf{p} = (p(n,s))_{(n,s)\in X}$  может быть получено путем численного решения СУР (3), для чего необходимо вычислить инфинитезимальный оператор А МП X(t). Нетрудно убедиться, что элементы a((n,s)(n',s')) матрицы А вычисляются по формуле:

$$\begin{cases} \alpha_{s}, \ ecnu \ n' = n, s' = s - 1, n \le N_{s-1}, s \ne 0, \\ unu \ n' = N_{s-1}, s' = s - 1, n \ge N_{s-1}, s \ne 0, \\ \beta_{s}, \ ecnu \ n' = n, s' = s + 1, n \le N_{s}, s \ne S, \\ \lambda, \ ecnu \ n' = n + 1, s' = s, n < N_{s}, s \le S, \\ n\mu, \ ecnu \ n' = n - 1, s' = s, n > 0, s \le S, \\ \varphi, \ ecnu \ n' = n, s' = s, \\ 0, \ в противном случае \end{cases}$$
(4)

где

$$\varphi = - \left( \alpha_s I\left\{ s \neq 0 \right\} + \beta_s I\left\{ s \neq S, n \leq N_s \right\} + \lambda I\left\{ s \leq S, n < N_s \right\} + n \mu I\left\{ n > 0 \right\} \right).$$

Из постановки задачи следует, что анализу подлежат следующие вероятностные характеристики модели – вероятность блокировки запросов пользователей B, среднее число обслуживаемых в системе запросов N, средняя скорость передачи данных r, вероятность прерывания обслуживания запросов  $\Pi$ , определяемые соответственно по формулам (5) – (8).

$$B = \sum_{s=0}^{\infty} p(N_s, s); \tag{5}$$

$$N = \sum_{s=0}^{S} \sum_{n=1}^{N_s} np(n,s);$$
(6)

$$r = \sum_{s=0}^{N} r_{s} \cdot \sum_{n=1}^{N_{s}} p(n,s) / \left( 1 - \sum_{s=0}^{N} p(0,s) \right);$$
(7)

$$\Pi = \sum_{s=1}^{S-1} \left[ \frac{\sum_{n=N_{s-1}+1} \frac{\alpha_s}{\alpha_s + \beta_s + n\mu + \lambda} \cdot \frac{n - N_{s-1}}{n} \cdot p(n,s) + + \frac{\alpha_s}{\alpha_s + \beta_s + N_s \mu} \cdot \frac{N_s - N_{s-1}}{N_s} \cdot p(N_s,s) + + \frac{\sum_{n=N_{s-1}+1}^{N_s-1} \frac{\alpha_s}{\alpha_s + n\mu + \lambda} \cdot \frac{n - N_{s-1}}{n} \cdot p(n,S) + + \frac{\alpha_s}{\alpha_s + N_s \mu} \cdot \frac{N_s - N_{s-1}}{N_s} \cdot p(N_s,S). \right]$$

$$(8)$$

В следующем разделе показано, как можно получить решение СУР (3) в алгоритмическом виде для случайной среды с тремя состояниями.

# Модель с тремя состояниями случайной среды

На практике представляет интерес случай модели с тремя состояниями случайной среды, т.е. *S* = 2. Такая модель, как показано в [16], применима, например, к анализу системы LSA. Рассматриваемая система описывается МП

Рассматриваемая система описывается МІ $Y(t) = (N(t), S(t), t \ge 0)$  над пространством состояний:

$$\mathbf{Y} = \{(n,s): 0 \le n \le N_s, s = 0, 1, 2\},$$
(9)

В данном случае для расчета стационарного распределения p(n,s) можно получить рекуррентный алгоритм. Для этого воспользуемся СУР (3), и введем вспомогательные функции, которые вычисляются по формулам:

$$q(0,0) = 1, q(0,1) = x, q(0,2) = y,$$
(10)  

$$q(n,s) = y + \delta + x + \theta + y$$
(11)

Заметим, что стационарное распределение вероятностей *p*(*n*,*s*) определятся по формуле:

$$p(n,s) = q(n,s) / \sum_{(i,j) \in \mathbf{Y}} q(i,j), (n,s) \in \mathbf{Y}.$$
 (12)

Из формул (10) и (11), несложно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов  $\gamma_{ns}$ ,  $\delta_{ns}$  и  $\theta_{ns}$ , необходимых для расчета вспомогательных функций q(n,s):  $\gamma_{00} = 1, \delta_{00} = 0, \theta_{00} = 0;$ 

$$\begin{split} \gamma_{01} &= 0, \delta_{01} = 1, \theta_{01} = 0; \\ \gamma_{02} &= 0, \delta_{02} = 0, \theta_{02} = 1; \\ \gamma_{10} &= (\lambda + \beta_0)/\mu, \delta_{10} = -\alpha_1/\mu, \theta_{10} = 0; \\ \gamma_{11} &= -\beta_0/\mu, \delta_{11} = (\lambda + \alpha_1 + \beta_1)/\mu, \theta_{11} = -\alpha_2/\mu; \\ \gamma_{12} &= 0, \delta_{12} = -\beta_1/\mu, \theta_{12} = (\lambda + \alpha_2)/\mu; \\ \gamma_{n0} &= \left[ \left( \gamma_{10} + (n-1) \right) \cdot \gamma_{n-1,0} + \delta_{10} \cdot \gamma_{n-1,1} - \rho \cdot \gamma_{n-2,0} \right]/n, n = 2, ..., N_0 - 1, \\ \delta_{n0} &= \left[ \left( \gamma_{10} + (n-1) \right) \cdot \delta_{n-1,0} + \delta_{10} \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,0} \right]/n, n = 2, ..., N_0 - 1, \\ \theta_{n0} &= \left[ \left( \gamma_{10} + (n-1) \right) \cdot \theta_{n-1,0} + \delta_{10} \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,0} \right]/n, n = 2, ..., N_0 - 1; \\ \gamma_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \delta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \gamma_{n-1,1} - \rho \cdot \gamma_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \gamma_{n-1,2} + \gamma_{11} \cdot \gamma_{n-1,0} \right]/n, n = 2, ..., N_0, \\ \delta_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \delta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \theta_{n-1,2} + \gamma_{11} \cdot \theta_{n-1,0} \right]/n, n = 2, ..., N_0; \\ \eta_{n2} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \theta_{n-1,2} + \gamma_{11} \cdot \theta_{n-1,0} \right]/n, n = 2, ..., N_0; \\ \gamma_{n2} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{11} \right) \cdot \gamma_{n-1,2} - \rho \cdot \gamma_{n-2,2} + \delta_{12} \cdot \gamma_{n-1,1} \right]/n, n = 2, ..., N_1; \\ \theta_{n2} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{11} \right) \cdot \theta_{n-1,2} - \rho \cdot \theta_{n-2,2} + \delta_{12} \cdot \theta_{n-1,1} \right]/n, n = 2, ..., N_1; \\ \gamma_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \gamma_{n-1,1} - \rho \cdot \gamma_{n-2,2} + \delta_{12} \cdot \theta_{n-1,1} \right]/n, n = 2, ..., N_1; \\ \gamma_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \gamma_{n-1,1} - \rho \cdot \gamma_{n-2,2} + \delta_{12} \cdot \theta_{n-1,1} \right]/n, n = 2, ..., N_1; \\ \gamma_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \gamma_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \theta_{n-1,2} \right]/n, n = N_0 + 1, ..., N_1 - 1; \\ \theta_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \delta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \theta_{n-1,2} \right]/n, n = N_0 + 1, ..., N_1 - 1; \\ \theta_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \delta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \theta_{n-1,2} \right]/n, n = N_0 + 1, ..., N_1 - 1; \\ \theta_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \delta_{10} - \delta_{12} \right) \cdot \theta_{n-1,1} - \rho \cdot \theta_{n-2,1} + \theta_{11} \cdot \theta_{n-1,2} \right]/n, n = N_0 + 1, ..., N_1 - 1; \\ \theta_{n1} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \delta_{10} - \delta_$$





(13)

$$\begin{split} \gamma_{n2} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{11} \right) \cdot \gamma_{n-1,2} - \rho \cdot \gamma_{n-2,2} \right] / n, n = N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, \\ \delta_{n2} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{11} \right) \cdot \delta_{n-1,2} - \rho \cdot \delta_{n-2,2} \right] / n, n = N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, \\ \theta_{n2} &= \left[ \left( \rho + (n-1) - \theta_{11} \right) \cdot \theta_{n-1,2} - \rho \cdot \theta_{n-2,2} \right] / n, n = N_1 + 1, \dots, N_2 - 1. \end{split}$$

Используя СУР (3), определим значения функций x и y, необходимых для расчета q(n,s):

$$x = (P \cdot Q - R \cdot L) / (P \cdot T - U \cdot L),$$

$$y = (R \cdot T - U \cdot Q) / (P \cdot T - U \cdot L),$$
(14)

rдe:  

$$P = (\alpha_{1} + N_{1}\mu + \beta_{1}) \cdot \theta_{N_{1},1} - \alpha_{2} \cdot \sum_{n=N_{1}}^{N_{2}} \theta_{n2} + \lambda \cdot \theta_{N_{1}-1,1};$$

$$Q = \lambda \cdot \gamma_{N_{2}-1,2} - (\alpha_{2} + N_{2}\mu) \cdot \gamma_{N_{2},2};$$

$$R = \alpha_{2} \cdot \sum_{n=N_{1}}^{N_{2}} \gamma_{n2} + \lambda \cdot \gamma_{N_{1}-1,1} - (\alpha_{1} + N_{1}\mu + \beta_{1}) \cdot \gamma_{N_{1},1};$$

$$L = (\alpha_{2} + N_{2}\mu) \cdot \theta_{N_{2},2} - \lambda \cdot \theta_{N_{2}-1,2};$$

$$T = (\alpha_{2} + N_{2}\mu) \cdot \delta_{N_{2},2} - \lambda \cdot \delta_{N_{2}-1,2};$$

$$U = (\alpha_{1} + N_{1}\mu + \beta_{1}) \cdot \delta_{N_{1},1} - \alpha_{2} \cdot \sum_{n=N_{1}}^{N_{2}} \delta_{n2} + \lambda \cdot \delta_{N_{1}-1,1}.$$

Рассчитав стационарное распределение вероятностей с помощью рекуррентного алгоритма, вычислим основные показатели эффективности системы по формулам (5) – (8). Для сокращения сложности проводимых расчетов в следующем разделе рассмотрим приближенный метод анализа модели с тремя состояниями случайной среды.

# Приближенный метод анализа вероятностных характеристик

Для получения решения в мультипликативном виде упростим модель. Предположим, что снижение мощности под влиянием внешней среды происходит только в том случае, когда число обслуживаемых запросов n, соответствующее состоянию среды s становится равным максимальному числу запросов, обслуживаемых в состоянии s-1, т.е. когда  $n = N_{s-1}$ . Таким образом, в данном случае не происходит прерывания обслуживания. Рассмотрим такое упрощение на примере частного случая модели, представленного в предыдущем разделе.

Диаграмма интенсивностей переходов для модели без прерывания будет иметь вид, представленный на рис. 2.



Рис. 2. Диаграмма интенсивностей переходов для модели без прерывания Fig. 2. Transition intensities diagram for the model without interruption С учетом введенного упрощения СУР представима следующим образом:

$$\begin{split} & (\lambda + \beta_0) \cdot p(0,0) = \mu \cdot p(1,0) + \alpha_1 \cdot p(0,1); \\ & (\lambda + \alpha_1 + \beta_1) \cdot p(0,1) = \mu \cdot p(1,1) + \alpha_2 \cdot p(0,2) + \beta_0 \cdot p(0,0); \\ & (\lambda + \alpha_2) \cdot p(0,2) = \mu \cdot p(1,2) + \beta_1 \cdot p(0,1); \\ & (\lambda + n\mu + \beta_0) \cdot p(n,0) = \lambda \cdot p(n-1,0) + (n+1)\mu \cdot p(n+1,0) + \\ & + \alpha_1 \cdot p(n,1), n = 1, \dots, N_0 - 1; \\ & (\lambda + n\mu + \alpha_1 + \beta_1) \cdot p(n,1) = \lambda \cdot p(n-1,1) + (n+1)\mu \cdot p(n+1,1) + \\ & + \alpha_2 \cdot p(n,2) + \beta_0 \cdot p(n,0), n = 1, \dots, N_0; \\ & (\lambda + n\mu + \alpha_2) \cdot p(n,2) = \lambda \cdot p(n-1,2) + (n+1)\mu \cdot p(n+1,2) + \\ & + \beta_1 \cdot p(n,1), n = 1, \dots, N_1; \\ & (\lambda + n\mu + \beta_1) \cdot p(n,1) = \lambda \cdot p(n-1,1) + (n+1)\mu \cdot p(n+1,1) + \\ & + \alpha_2 \cdot p(n,2), n = N_0 + 1, \dots, N_1 - 1; \\ & (\lambda + n\mu) \cdot p(n,2) = \lambda \cdot p(n-1,2) + (n+1)\mu \cdot p(n+1,2), \\ & n = N_1 + 1, \dots, N_2 - 1; \\ & (N_0\mu + \beta_0) \cdot p(N_0,0) = \lambda \cdot p(N_0 - 1,0) + \alpha_1 \cdot p(N_0,1); \\ & (N_1\mu + \beta_1) \cdot p(N_1,1) = \lambda \cdot p(N_1 - 1,1) + \alpha_2 \cdot p(N_1,2); \\ & N_2\mu \cdot p(N_2,2) = \lambda \cdot p(N_2 - 1,2), (n,s) \in \mathbf{Y}. \end{split}$$

В данном случае МП  $Y(t) = (N(t), S(t), t \ge 0)$ , описывающий поведение системы, является обратимым. Стационарное распределение вероятностей может быть представлено в мультипликативном виде:

$$p(n,s) = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbf{Y}\setminus\{(0,0)\}} \frac{\rho^{i}}{i!} \cdot f(j) + 1\right) \cdot \frac{\rho^{n}}{n!} \cdot f(s), (n,s) \in \mathbf{Y} \setminus \{(0,0)\}, \quad (16)$$
  
rge:  
$$f(z) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{z} \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k}}, & 5A, 8 \ z > 0; \\ 1, & 5A, 8 \ z = 0. \end{cases}$$

Также стационарное распределение вероятностей *p*(*n*,*s*) может быть найдено и при помощи рекуррентного алгоритма, предложенного в предыдущем разделе.

Численный анализ, сравнение точного и приближенного методов

Проведем оценку эффективности точного и приближенного методов на примере анализа модели, работающей в случайной среде с тремя состояниями.

Проиллюстрируем поведение показателей эффективности системы (5) – (8) в зависимости от расстояния d от пользователя до БС (рис. 3, 4) и максимальной мощности  $p_2$  передачи сигнала (рис. 5, 6). Также проанализируем зависимость исследуемых характеристик от интенсивности  $\alpha_{s,s} = 1,2$  снижения мощности сигнала. Сведем исходные данные в две таблицы. Таблица 2 содержит постоянные значения входных параметров, т.е. значения, которые одинаковы для всех проводимых численных экспериментов, таблица 3 – динамически меняющиеся, т.е. зависящие от рассматриваемого сценария.

Таблица 2. Постоянные значения входных параметров

Table 2. Constant values of input parameters								
$\beta_0^{-1}$	$eta_1^{-1}$	$K_0$	ω	λ	$\mu^{-1}$	$r_0$	G	к
30 c	60 c	-60 дБм	10 Мц	5	0.1 c	1 Мбит/с	197.43	5

Таблица 3. Динамически меняющиеся значения входных параметров Table 3. Dynamically changing input parameters

			<u> </u>	0 0 1 1		
	$\alpha^{-1}$	$\alpha_{2}^{-1}$	d	$p_{2}$	$p_1$	$p_{0}$
Рис. 3	1000	1200 -	200 – 300 м	42 <sup>°</sup> д́Бм	2/2	10
Рис. 4	1800,	1200 C	200 м	33 – 42 дБм	$p_2 \cdot 2/3$	$p_2 \cdot 1/3$



На рисунках 3 и 4 видно, что чем больше расстояние между пользователем и БС, тем хуже рассматриваемые показатели эффективности модели. Это связано с тем, что в соответствии с формулой (1) при фиксированной мощности передачи сигнала увеличение расстояния до БС приводит к уменьшению максимального количества запросов пользователей, которые могут быть обслужены с гарантированной скоростью передачи данных  $r_0$ , и, следовательно, к увеличению вероятности блокировки (рис. 3) и вероятности прерывания (рис. 4).



Рис. 3. Вероятность блокировки B при изменении расстояния d до БС F i g. 3. The probability of blocking B when changing the distance d to the БС



Рис. 4. Вероятность прерывания  $\Pi$  при изменении расстояния d до БС F i g. 4. The probability of interruption  $\Pi$  when changing the distance d to the БС

И наоборот, при фиксированном расстоянии пользователей от БС и увеличении максимальной мощности передачи сигнала показатели эффективности модели улучшаются (рис. 5, 6), что также объясняется формулой (1). По обоим рисункам также видно, что чем реже происходит снижение мощности сигнала, тем лучше показатели эффективности системы.



Рис. 5. Вероятность блокировки В при изменении максимальной мощности р, передачи сигнала

F i g. 5. The probability of interruption B when changing the maximum transmit power  $p_2$ 



мощности  $p_2$  передачи сигнала

F i g. 6. The probability of interruption  $\,\Pi\,$  when changing the maximum transmit power  $\,p_2$ 

В заключение проведем численный эксперимент, иллюстрирующий точность предложенного приближенного метода за счет оценки относительной погрешности  $\delta(B)$  расчета вероятности блокировки *В* 

$$\delta(B) = \left( \left| B^* - B \right| / B \right) \times 100\%, \tag{17}$$

где *B*<sup>\*</sup> – значение вероятности блокировки, полученное при использовании приближенного метода.

Из таблицы 4 видно, что чем реже происходит снижение мощности передачи сигнала, т.е. чем выше значения параметра  $\alpha_2^{-1}$ , тем точнее работает приближенный метод. Это подтверждается и данными таблицы 5, показывающей, что чем чаще мощность передачи сигнала увеличивается, т.е. чем меньше значение показателя  $\beta_0^{-1}$ , тем точнее приближение.

Таблица 4. Относительная погрешность  $\delta(B)$  расчета вероятности блокировки при изменении интенсивностей  $\alpha_s, s = 1, 2$  снижения мощности сигнала, d = 400 м,  $p_2 = 42$  дБм,  $\beta_0^{-1} = 30$  с и  $\beta_1^{-1} = 60$  с Table 4. Relative error  $\delta(B)$  in calculating the probability of blocking when changing intensities in signal power decrease,

A = 400 rs a = 42 rF rs  $\beta^{-1} = 20$  arc  $\beta^{-1} = 60$ 

$a = 400 \text{ M}, p_2 = 42 \mu\text{B}\text{ M}, p_0 = 50 \text{C}\mu_1 = 50 \text{C}$						
$(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1})$	1200	1800	2400			
1200	1.451358E-02	1.045163E-02	8.161150E-03			
	1.45%	1.05%	0.82%			
1800	1.304435E-02	9.388005E-03	7.327966E-03			
	1.30%	0.94%	0.73%			
2400	1.230458E-02	8.853554E-03	6.909772E-03			
	1.23%	0.89%	0.69%			

Таблица 5. Относительная погрешность  $\delta(B)$  расчета вероятности блокировки при изменении интенсивностей  $\beta_s$ , s = 0,1 увеличения мощности сигнала, d = 400 M,  $p_2 = 42 \text{ дБми } \alpha_1^{-1} = \alpha_2^{-1} = 2400 \text{ c}$ Table 5. Relative error  $\delta(B)$  in calculating the probability of blocking when changing the intensities of the increase in signal power.

 $d = 400 \text{ M} p_a = 42 \, \pi \text{Emm} \, \alpha_a^{-1} = \alpha_a^{-1} = 2400 \, \text{c}$ 

$\left(eta_{0}^{-1},eta_{1}^{-1} ight)$	30	60	90
30	3.673345E-03 0.37%	6.909772E-03 0.69%	9.770259E-03 0.98%
60	4.344384E-03 0.43%	8.163822E-03 0.82%	1.153455E-02 1.15%
90	5.012724E-03	9.408299E-03	1.327962E-02

На основе результатов, полученных из таблиц 4 и 5, были взяты исходные данные для построения таблиц 6 и 7. Результаты, представленные в таблицах 6 и 7 показывают, что при выбранных исходных данных относительная погрешность  $\delta(B)$  расчета вероятности блокировки *B* составляет менее 10%. Следует отметить, что относительная погрешность достигает минимального значения при рассмотрении максимального расстояния *d* от пользователя до БС, а также максимального значения мощности передачи сигнала *p*<sub>2</sub>.





Таблица 6. Относительная погрешность  $\delta(B)$  расчета вероятности блокировки при изменении расстояния d от пользователя до БС,  $p_2 = 42 \, \mathrm{gEm}, \alpha_1^{-1} = 1200 \, \mathrm{c}, \alpha_2^{-1} = 1800 \, \mathrm{c}, \beta_0^{-1} = 30 \, \mathrm{c}$  и  $\beta_1^{-1} = 60 \, \mathrm{c}.$ 

Table 6. Relative error  $\delta(B)$  in calculating the probability of blocking when the distance from the user to the GC changes,

$p_2 = 42$ дБм, $\alpha_1^{-1} = 1200$ с, $\alpha_2^{-1} = 1800$ с, $\beta_0^{-1} = 30$ с и $\beta_1^{-1} = 60$ с.						
d	300	350	400	450		
$\delta(R)$	1.34417E-02	5.84308E-06	1.04516E-02	5.34262E-04		
- U (D)	1.344%	0.001%	1.045%	0.053%		

Таблица 7. Относительная погрешность  $\delta(B)$  расчета вероятности блокировки при изменении максимальной мощности  $p_2$  передачи сигнала, d = 300 м,  $\alpha_1^{-1} = \alpha_2^{-1} = 2400$  с,  $\beta_0^{-1} = 30$  с и  $\beta_1^{-1} = 60$  с. Table 7. Relative error  $\delta(B)$  in calculating the probability of blocking when the maximum signal transmission power changes,

	0		<u> </u>
$= 300 \text{ M} \text{ m}^{-1} =$	$\alpha_{\rm c}^{-1} = 2400$ (	$s_{\rm c} \beta_{\rm c}^{-1} = 30 \ c_{\rm F}$	1 ß <sup>-1</sup> = 60 с

n.	33	36	39	42
$r_2$	7.16301E-02	5.34262E-04	3.44599E-02	3.20718E-03
O(B)	7.16%	0.05%	3.45%	0.32%

# Заключение

d

В работе построена и исследована математическая модель схемы доступа к радиоресурсам беспроводной сети, реализующая механизмы снижения мощности и прерывания обслуживания пользователей. Модель описана с помощью СМО, работающей в случайной среде с произвольным количеством состояний. Рассмотрен один из возможных случаев реализации модели при помощи ограничения количества состояний случайной среды тремя возможными. Предложен точный метод расчета (рекуррентный алгоритм) стационарного распределения вероятностей модели с тремя состояниями случайной среды, а также приближенный метод, основанный на введении упрощающего предположения. Проведена оценка показателей эффективности модели - вероятности блокировки и вероятности прерывания – точным и приближенным методами. Сравнительный анализ расчета вероятности блокировки при помощи точного и приближенного методов показал, приближение максимально при высокой мощности передачи данных и большом расстоянии от БС до пользователя.

## References

- Ericsson mobility report, Q2 Update. August 2019. Ericsson, 2019. Available at: https://www.ericsson.com/4a517b/assets/local/mobility-report/documents/2019/emr-q2-2019-update.pdf (accessed 19.08.2019). (In Eng.)
- [2] Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2017-2022. White Paper. Cisco 2019. Available at: https://www.cisco.com/c/en/us/solutions/ collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/ white-paper-c11-738429.pdf (accessed 19.08.2019). (In Eng.)
- [3] 3GPP TS 22.105: Services and service capabilities: Release
   15. 3GPP. 2018-07. ETSI, 2018. Available at: https://www.
   etsi.org/deliver/etsi\_ts/122100\_122199/122105/15.00.0
   0\_60/ts\_122105v150000p.pdf (accessed 19.08.2019). (In
   Eng.)
- [4] Basaure A., Sridhar V., Hämmäinen H. Adoption of dynamic

spectrum access technologies: a system dynamics approach. *Telecommunication Systems*. 2016; 63(2):169-190. (In Eng.) DOI: 10.1007/s11235-015-0113-7

- [5] 3GPP TS 36.300: Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) and Evolved Universal Terrestrial Radio Access Network (E-UTRAN); Overall description; Stage 2: Release 14. 3GPP. 2019-10. ETSI, 2019. Available at: https://www. etsi.org/deliver/etsi\_ts/136300\_136399/136300/14.11.0 0\_60/ts\_136300v141100p.pdf (accessed 19.08.2019). (In Eng.)
- [6] Acar Yu., Aldirmaz Çolak S., Başar E. Channel estimation for OFDM-IM systems. *Turkish Journal of Electrical Engineering* & Computer Sciences. 2019; 27(3):1908-1921. (In Eng.) DOI: 10.3906/elk-1803-101
- [7] Li J., Dang S., Wen M., Jiang X., Peng Y., Hai H. Layered Orthogonal Frequency Division Multiplexing With Index Modulation. *IEEE Systems Journal*. 2019; 13(4):3793-3802. (In Eng.) DOI: 10.1109/JSYST.2019.2918068
- [8] Ghallab R., Shokair M., Abou El-Azm A., Sakr A., Saad W., Naguib A. Performance enhancement using multiple-input multiple-output (MIMO) electronic relay in massive MIMO cellular networks. *IET Networks*. 2019; 8(5):299-306. (In Eng.) DOI: 10.1049/iet-net.2018.5023
- [9] Garcia-Rodriguez A., Geraci G., Giordano L. G., Bonfante A., Ding M., Lopez-Perez D. Massive MIMO Unlicensed: A New Approach to Dynamic Spectrum Access. *IEEE Communications Magazine.* 2018; 56(6):186-192. (In Eng.) DOI: 10.1109/MCOM.2017.1700533
- [10] Ouyang F. Massive MIMO for dynamic spectrum access. In: 2017 IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE). Las Vegas, NV, 2017, pp. 9-12. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICCE.2017.7889210
- [11] 3GPP TS 23.246: Multimedia Broadcast/Multicast Service (MBMS); Architecture and functional description: Release 15. 3GPP. 2019-10. ETSI, 2019. Available at: https://www. etsi.org/deliver/etsi\_ts/123200\_123299/123246/15.01.0 0\_60/ts\_123246v150100p.pdf (accessed 19.08.2019). (In Eng.)
- [12] Kiji N., Sato T., Shinkuma R., Oki E. Virtual Network Function Placement and Routing Model for Multicast Service Chaining Based on Merging Multiple Service Paths. In: 2019 IEEE 20th International Conference on High Performance Switching and Routing (HPSR), Xi'An, China, 2019, pp. 1-6. (In Eng.) DOI: 10.1109/HPSR.2019.8807998
- [13] Ren Y., Chen J., Chin J., Tseng Y. Design and Analysis of the Key Management Mechanism in Evolved Multimedia Broadcast/Multicast Service. *IEEE Transactions on Wireless Communications.* 2016; 15(12):8463-8476. (In Eng.) DOI: 10.1109/TWC.2016.2615605
- [14] Huang J., Zhong Z., Ding, J. An Adaptive Power Control Scheme for Multicast Service in Green Cellular Railway Communication Network. *Mobile Networks and Applications.* 2016; 21(6):920-929. (In Eng.) DOI: 10.1007/ s11036-016-0712-x
- [15] Onidare S.O., Navaie K., Ni Q. On the Spectrum and Energy Efficiency in Dynamic Licensed Shared Access Systems: A Multiobjective Optimization Approach. *IEEE Access.* 2019; 7:164517-164532. (In Eng.) DOI: 10.1109/AC-CESS.2019.2952686
- [16] Markova E., Gudkova I., Ometov A., Dzantiev I., Andreev S.,



Koucheryavy Ye., Samouylov K. Flexible Spectrum Management in a Smart City within Licensed Shared Access Framework. *IEEE Access.* 2017; 5:22252-22261. (In Eng.) DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2758840

- [17] Borodakiy V.Y., Samouylov K.E., Gudkova I.A., Ostrikova D.Y., Ponomarenko A.A., Turlikov A.M., and Andreev S.D. Modeling unreliable LSA operation in 3GPP LTE cellular networks. In: 2014 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), St. Petersburg, 2014, pp. 390-396. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002133
- [18] Maule M., Moltchanov D., Kustarev P., Komarov M., Andreev S., Koucheryavy Y. Delivering Fairness and QoS Guarantees for LTE/Wi-Fi Coexistence Under LAA Operation. *IEEE Access.* 2018; 6:7359-7373. (In Eng.) DOI: 10.1109/AC-CESS.2018.2793941
- [19] Markova E., Moltchanov D., Gudkova I., Samouylov K., Koucharyavy Y. Performance Assessment of QoS-Aware LTE Sessions Offloading Onto LAA/WiFi Systems. *IEEE Access*. 2019; 7:36300-36311. (In Eng.) DOI: 10.1109/AC-CESS.2019.2905035
- Borodakiy V., Gudkova I., Markova E., Samouylov K. Modelling and performance analysis of pre-emption based radio admission control scheme for video conferencing over LTE. In: *Proceedings of the 2014 ITU kaleidoscope academic conference: Living in a converged world Impossible without standards?*, St. Petersburg, 2014, pp. 53-59. (In Eng.) DOI: 10.1109/Kaleidoscope.2014.6858480
- [21] Basharin G.P., Samouylov K.E., Yarkina N.V., Gudkova I.A. A new stage in mathematical teletraffic theory. *Automation* and Remote Control. 2009; 70(12):1954-1964. (In Eng.) DOI: 10.1134/S0005117909120030
- [22] Rykov V. Multidimensional Alternative Processes Reliability Models. In: Dudin A., Klimenok V. I., Tsarenkov G., Dudin S. Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. BWWQT 2013. Communications in Computer and Information Science, vol. 356. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, pp. 147-156. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-642-35980-4\_17
- [23] Ahmadian A., Galinina. O., Gudkova I., Andreev S., Shorgin S., and Samouylov K. On Capturing Spatial Diversity of Joint M<sub>2</sub>M/H<sub>2</sub>H Dynamic Uplink Transmissions in 3GPP LTE Cellular System. In: Balandin S., Andreev S., Koucheryavy Y. (eds) Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. ruSMART 2015, NEW2AN 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9247. Springer, Cham, 2015, pp. 407-421. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-23126-6\_36
- [24] Ali A., Shah G.A., Arshad J. Energy Efficient Resource Allocation for M2M Devices in 5G. Sensors. 2019; 19(8):1830. (In Eng.) DOI: 10.3390/s19081830
- [25] Su J., Xu H., Xin N., Cao G., Zhou X. Resource Allocation in Wireless Powered IoT System: A Mean Field Stackelberg Game-Based Approach. Sensors. 2018; 18(10):3173. (In Eng.) DOI: 10.3390/s18103173
- [26] Chen S., Ma R., Chen H., Zhang H., Meng W., Liu J. Machine-to-Machine Communications in Ultra-Dense Networks – A Survey. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2017; 19(3):1478-1503, thirdquarter 2017. (In Eng.) DOI: 10.1109/COMST.2017.2678518

Поступила 19.08.2019; принята в печать 10.09.2018; опубликована онлайн 30.09.2019.

Submitted 19.08.2019; revised 10.09.2019; published online 30.09.2019.

#### Об авторах:

Аду Кпангни Ивь, магистр кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4669-0898, 1032135491@ rudn.ru

Маркова Екатерина Викторовна, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7876-2801, markova\_ ev@rudn.ru

Гудкова Ирина Андреевна, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6); старший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-2), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid. org/ 0000-0002-1594-427X, gudkova\_ia@rudn.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

#### About the authors:

**Yves Adou**, Master Student of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4669-0898, 1032135491@ rudn.ru

**Ekaterina V. Markova**, Associate Professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7876-2801, markova\_ev@rudn.ru

Irina A. Gudkova, Associate Professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia); Senior Scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1594-427X, gudkova\_ia@rudn.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

