УДК 519.217
DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.579-587

Моделирование процесса последовательной обработки данных, реализующей хранение резервной копии

А. А. Галилейская[1], Е. Ю. Лисовская[1,2*], С. П. Моисеева[1], Ю. В. Гайдамака[2,3]
[1] Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
[*] ekaterina_lisovs@mail.ru
[2] Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия
117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
[3] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия
119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-2

Аннотация

Ресурсные системы массового обслуживания, в которых клиентам требуется устройство и случайное количество ресурсов на время их обслуживания, доказали свою эффективность при анализе производительности современных беспроводных сетей, систем облачных вычислений и технических устройств. Однако исследование таких систем требует сложных аналитических вычислений. В этой статье мы предлагаем комбинацию методов: модификация метода многомерного динамического просеивания и метод асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока для исследования ресурсных систем массового обслуживания. Полученные приближенные результаты сравниваются с результатами имитационного моделирования исходной модели, демонстрируется высокая точность аппроксимации, находится рекомендуемое значение ограничения на предоставляемый ресурс в системе и вероятность отказа в обслуживании.

Ключевые слова: беспроводные сети связи, ресурсные системы массового обслуживания, аппроксимация распределения вероятностей, ограниченный буфер, вероятность отказа.

Финансирование: публикация подготовлена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» (получатель Е. Ю. Лисовская, разработка математической модели). Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-07-00576 а «Построение прикладных вероятностных моделей для анализа показателей эффективности гетерогенных беспроводных сетей с учетом механизмов разделения ресурсов» (Ю.В. Гайдамака, визуализация и руководство проектом).

Для цитирования: *Галилейская А. А., Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П., Гайдамака Ю. В.* Моделирование процесса последовательной обработки данных, реализующей хранение резервной копии // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15, № 3. С. 579-587. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.579-587

On Sequential Data Processing Model, that Implements the Backup Storage

A. A. Galileyskaya[1], **E. Yu. Lisovskaya**[1,2*], **S. P. Moiseeva**[1], **Yu. V. Gaidamaka**[2,3]
[1] National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia
36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia
[*] ekaterina_lisovs@mail.ru
[2] Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia
[3] Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russia

Abstract

Resource queue is a system where customers require a device and a random resources amount during their service. This queue have proven their effectiveness in analyzing the performance of modern wireless networks, cloud computing systems and technical devices. However, the study of such systems requires complex analytical calculations. In this article, we propose a combination of methods: the modification of the multidimensional dynamic screened method and the asymptotic analysis method under growing arriving intensity condition for the resource queue study. The obtained approximate results are compared with the simulation results, high approximation accuracy is demonstrated, and the recommended value of the restriction on the resource in the system and the rejection probability are found.

Keywords: wireless communication networks, resource queue, probability distribution approximation, limited buffer size, rejection probability.

Funding: The publication was prepared with the support of the RUDN University Competitiveness Enhancement Program "5-100" (recipient E. Yu. Lisovskaya, development of a mathematical model). The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research as a part of scientific project No. 18-07-00576 a "Building Applied Probabilistic Models for the Analysis of Heterogeneous Wireless Networks Performance Indicators with Resource Sharing Mechanisms" (Yu.V. Gaydamak, visualization and project management).

For citation: Galileyskaya A.A., Lisovskaya E.Yu., Moiseeva S.P., Gaidamaka Yu.V. On Sequential Data Processing Model, that Implements the Backup Storage. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(3):579-587. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.579-587

Введение

Интерес к исследованию ресурсных систем массового обслуживания (РСМО) обуславливается возможностью их применения при моделировании современных технических устройств, сетей передачи данных нового поколения и вычислительных систем, в том числе систем облачных вычислений. Очевидно, что ресурсы физических объектов, в том числе радиоресурсы в сетях передачи данных являются ограниченными, то есть поступившее требование теряется, если в системе недостаточно ресурса для ее обслуживания. Однако, далеко не во всех случаях можно получить адекватные аналитические результаты. В связи с этим, группа авторов этой статьи предлагает способы исследования математических моделей РСМО без отказов, то есть с неограниченным объемом ресурса и неограниченным числом приборов. С помощью полученного результата нетрудно оценить объем достаточного количества ресурса в системах, оценить вероятность потери и минимизировать ее. Вернемся к этому вопросу в конце статьи.

Рост популярности услуг беспроводных сетей обуславливает необходимость создания новых подходов к оцениванию качества услуг телекоммуникационных операторов [1, 2]. В этих сетях каждое активное соединение требует определенное количество каждого из радиоресурсов, которые заведомо ограничены, предоставляются требованию в момент его поступления (вызов, сообщение, видеозапись) и освобождаются в момент окончания соединения [3]. Объем требуемых ресурсов определяется заранее заданным распределением вероятностей, которое может учитывать особенности различных схем распределения радиоресурсов при анализе производительности беспроводных сетей [4-5]. Моделирование беспроводных сетей связи с помощью РСМО, начиная с [6–8], представлено большим количеством публикаций. Однако, большая часть результатов получена в упрощающих предположениях: детерминированные запросы к ресурсам, экспоненциально распределенное время обслуживания, простейший входящий поток, простейшая конфигурация СМО, что связано со сложностью построения соответствующих случайных процессов (см. работы [9-12] и обзор в них).

Кроме того, РСМО, в которых клиентам требуется сервер и определенное количество ресурсов на время их обслуживания, позволяют моделировать любые особенности распределения ресурсов в современных беспроводных сетях. Включение сигналов, запускающих процедуры перераспределения ресурсов, дает возможность учитывать мобильность абонентов [13-15]. Технология многоадресной передачи предлагает возможное решение проблемы передачи одних и тех же данных на ряд устройств, что приводит к значительному улучшению спектральной эффективности и пропускной способности беспроводной сети. Поскольку в многоадресном режиме одна и та же полоса частот используется для нескольких устройств, скорость передачи данных может достигнуть более высоких значений по сравнению с одноадресным режимом, где для каждого устройства выделяется только небольшая отдельная полоса частот [16]. Одновременное обслуживание на разных станциях моделируется с помощью РСМО с параллельным обслуживанием, последовательное обслуживание на разных станциях – с помощью многофазных РСМО [17-18]. А также возможность учитывать неоднородность запросов [10,19] и их требования к множеству ресурсов [20-21].

Что касается облачных вычислений, эта технология становится все более и более популярной, обеспечивая эффективное распределение ресурсов при предоставлении IT-услуг [22]. Каждый пользователь системы запрашивает некоторое количество ресурса для выполнения вычислительных операций. Если система перегружена, то пользователю необходимо ждать, пока какие-либо другие запросы не будут обработаны, либо он и вовсе покинет систему, не дождавшись обслуживания. По мере развития облачных вычислений появляются поставщики, предлагающие свои услуги с разным качеством и по разным ценам. Это требует новых инструментов и механизмов для анализа производительности системы на предмет соответствия предложений требованиям [23-24].

Данная статья организована следующим образом: в разделе 1 описывается математическая модель системы передачи данных в виде двухфазной РСМО с копированием заявки на второй фазе, предлагается модификация метода многомерного динамического просеивания для построения системы интегро-дифференциальных уравнений. В разделе 2 с помощью предложенной модификации записывается искомое уравнение. В разделе 3 предлагается решать полученное уравнение методом асимптотического анализа, его результаты приведены в виде формулировки теоремы о виде допредельной характеристической функции многомерного распределения вероятностей. Имитационному моделированию, анализу точности аппроксимации и оценки вероятности потери запросов в системе посвящен раздел 4.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с копированием заявки на второй фазе, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, заданный функцией распределения вероятностей длин интервалов между моментами наступления событий $A(z)$.

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом. Заявка, поступившая в систему, занимает любой свободный прибор на первой фазе и требует для обслуживания случайное количество некоторого ресурса $G_0(v)$ и обслуживается в течение случайного времени, имеющего функцию распределения $B_0(x)$. После обслуживания на первой фазе, заявка переходит на вторую и обслуживается на первом блоке в течение случайного времени с функцией распределения $B_1(x)$, а также копируется на второй блок, где обслуживается с функцией распределения $B_2(x)$. Также, заявка требует случайное количество некоторого ресурса на первом блоке с функцией распределения $G_1(v)$ и на втором с $G_2(v)$. По окончании обслуживания заявка покидает систему, освобождая все занятые приборы и ресурсы. Количество занимаемых ресурсов и время обслуживания не зависят друг от друга.

Пусть $V_i(t)$ – суммарный объем занятого ресурса в системе в момент времени t, где i = 0, 1, 2. Поставим задачу нахождения характеристик многомерного случайного процесса $\{V_0(t), V_1(t), V_2(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [25].

Изобразим четыре параллельных оси времени. Ось «GI» будет отображать события входящего потока, ось под номером 0 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 1 второму, ось под номером 2, соответственно, третьему просеянному потоку. Зафиксируем произвольный момент времени T.

Пусть имеется набор функций $S_0(t), S_1(t), S_2(t), S_{12}(t)$, значения которых лежат в диапазоне [0,1] и обладают свойством $S_0(t)+S_1(t)+S_2(t)+S_{12}(t)\le 1$, для любых t.

Событие входящего потока может просеяться только на одну из трех осей 0, 1, 2, либо на оси 1 и 2 одновременно, либо ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t>t_0$:

– сформирует событие потока на оси 0, т.е. к моменту времени T не закончит обслуживание на первой фазе, равна

$$S_0(t)=1-B_0(T-t);$$

– сформирует событие потока на оси 1, т.е. к моменту времени T закончит обслуживание на первой фазе, на втором блоке второй фазы и не закончит на первом блоке второй фазы, равна

$$S_1(t)=(B_2*B_0)(T-t)-\int\limits_0^{T-t}B_1(T-t-x)B_2(T-t-x)dB_0(x);$$

– сформирует событие потока на оси 2, т.е. к моменту времени T закончит обслуживание на первой фазе, на первом блоке второй фазы и не закончит на втором блоке второй фазы, равна

$$S_2(t)=(B_1*B_0)(T-t)-\int\limits_0^{T-t}B_1(T-t-x)B_2(T-t-x)dB_0(x);$$

– сформирует события потока на осях 1 и 2, т.е. к моменту времени T закончит обслуживание на первой фазе, и будет находиться на двух блоках второй фазы одновременно, равна

$$S_{12}(t)=B_0(T-t)-(B_1*B_0)(T-t)-(B_2*B_0)(T-t)+\int\limits_0^{T-t}B_1(T-t-x)B_2(T-t-x)dB_0(x);$$

Обозначим $W_i(t)$ – суммарный объем занятого ресурса просеянными заявками на i-й оси (i = 0, 1, 2). Нетрудно показать, что

$$P\{V_0(T)<z_0,V_1(T)<z_1,V_2(T)<z_2\}=P\{W_0(T)<z_0,W_1(T)<z_1,W_2(T)<z_2\}, \quad (1)$$

для любых $z_0>0,\ z_1>0,\ z_2>0$. Будем использовать равенство (1) для исследования процесса $\{V_0(t), V_1(t), V_2(t)\}$ с помощью процесса $\{W_0(t), W_1(t), W_2(t)\}$.

2. Система интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова

Добавим компоненту $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента наступления следующего события во входящем рекуррентном потоке, к процессу $\{W_0(t), W_1(t), W_2(t)\}$, тогда полученный четырехмерный процесс будет являться марковским. Введем обозначение для его распределения вероятностей

$$P(z,z_0,z_1,z_2,t)=P\{z(t)<z,W_0(t)<z_0,W_1(t)<z_1,W_2(t)<z_2\}.$$

Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(z,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(z,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial z}+\frac{\partial P(0,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial z}(A(z)-1)+\\
+A(z)\Bigg[S_0(t)\left(\int\limits_0^{z_0}\frac{\partial P(0,z_0-y,z_1,z_2,t)}{\partial z}dG_0(y)-\frac{\partial P(0,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial z}\right)+\\
+S_1(t)\left(\int\limits_0^{z_1}\frac{\partial P(0,z_0,z_1-y,z_2,t)}{\partial z}dG_1(y)-\frac{\partial P(0,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial z}\right)+\\
+S_2(t)\left(\int\limits_0^{z_2}\frac{\partial P(0,z_0,z_1,z_2-y,t)}{\partial z}dG_2(y)-\frac{\partial P(0,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial z}\right)+\\
+S_{12}(t)\left(\int\limits_0^{z_1}\int\limits_0^{z_2}\frac{\partial P(0,z_0,z_1-y_1,z_2-y_2,t)}{\partial z}dG_1(y_1)dG_2(y_2)-\frac{\partial P(0,z_0,z_1,z_2,t)}{\partial z}\right)\Bigg]\end{gathered} \quad (2)$$

для $z>0,\ z_0>0,\ z_1>0,\ z_2>0$.

Начальное условие для решения $P(z,z_0,z_1,z_2,t)$ в момент времени t_0 определим в виде

$$P(z,z_0,z_1,z_2,t_0)=\begin{cases}r(z),\ z_0=z_1=z_2=0,\\ 0,\ \textit{иначе}.\end{cases}$$

где $r(z)$ – стационарное распределение вероятностей случайного процесса $z(t)$.

Введем частичные характеристические функции вида:

$$h(z,v_0,v_1,v_2,t)=\int\limits_0^{\infty}e^{jv_0z_0}\int\limits_0^{\infty}e^{jv_1z_1}\int\limits_0^{\infty}e^{jv_2z_2}P(z,dz_0,dz_1,dz_2,t),$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда можем переписать (2) в виде следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial h(z,v_0,v_1,v_2,t)}{\partial t}=h(z,v_0,v_1,v_2,t)\Big[A(z)-1+A(z)\Big(S_0(t)\left(G_0^*(v_0)-1\right)+\\
+S_1(t)\left(G_1^*(v_1)-1\right)+S_2(t)\left(G_2^*(v_2)-1\right)+S_{12}(t)\left(G_1^*(v_1)G_2^*(v_2)-1\right)\Big)\Big]\end{gathered} \quad (3)$$

для z > 0, где $G_i^*(v_i)=\int\limits_0^{\infty}e^{jv_iy}dG_i(y)$, с начальным условием

$$h(z,v_0,v_1,v_2,t_0)=r(z), \quad (4)$$

3. Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (3) не представляется возможным, то для решения задачи (3)–(4) воспользуемся методом асимптотического анализа [26] в условии растущей интенсивности входящего потока. Запишем функцию распределения вероятностей длин интервалов между событиями входящего потока как $A(Nz)$, где $N\to\infty$ некоторый теоретический параметр, используемый в теоретических выкладках асимптотического анализа. Тогда можно записать:

$$\begin{gathered}\frac{1}{N}\frac{\partial h(z,v_0,v_1,v_2,t)}{\partial t}=h(z,v_0,v_1,v_2,t)\Big[A(z)-1+A(z)\Big(S_0(t)\left(G_0^*(v_0)-1\right)+\\
+S_1(t)\left(G_1^*(v_1)-1\right)+S_2(t)\left(G_2^*(v_2)-1\right)+S_{12}(t)\left(G_1^*(v_1)G_2^*(v_2)-1\right)\Big)\Big]\end{gathered} \quad (5)$$

с начальным условием (4).

Теорема. Допредельная характеристическая функция распределения вероятностей случайного процесса $\{z(t),W_0(t),W_1(t),W_2(t)\}$ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
h(z,v_0,v_1,v_2,t) = r(z)\exp\Bigg\{ N\lambda\Bigg[& jv_0 a_1^{(0)}\int_{t_0}^{t} S_0(\tau)\,d\tau + jv_1 a_1^{(1)}\int_{t_0}^{t}\big(S_1(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau + \\
& + jv_2 a_1^{(2)}\int_{t_0}^{t}\big(S_2(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau \Bigg] + \frac{(jv_0)^2}{2}\left[N\lambda a_2^{(0)}\int_{t_0}^{t} S_0(\tau)\,d\tau + N\text{k}\left(a_1^{(0)}\right)^2\int_{t_0}^{t} S_0^2(\tau)\,d\tau \right] + \\
& + \frac{(jv_1)^2}{2}\left[N\lambda a_2^{(1)}\int_{t_0}^{t}\big(S_1(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau + N\text{k}\left(a_1^{(1)}\right)^2\int_{t_0}^{t}\big(S_1(\tau)+S_{12}(\tau)\big)^2 d\tau \right] + \\
& + \frac{(jv_2)^2}{2}\left[N\lambda a_2^{(2)}\int_{t_0}^{t}\big(S_2(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau + N\text{k}\left(a_1^{(2)}\right)^2\int_{t_0}^{t}\big(S_2(\tau)+S_{12}(\tau)\big)^2 d\tau \right] + \\
& + jv_0 jv_1 a_1^{(0)} a_1^{(1)} N\text{k}\left[\int_{t_0}^{t} S_0(\tau)\big(S_1(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau\right] + jv_0 jv_2 a_1^{(0)} a_1^{(2)} N\text{k}\left[\int_{t_0}^{t} S_0(\tau)\big(S_2(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau\right] + \\
& + jv_1 jv_2 a_1^{(1)} a_1^{(2)}\left[N\lambda\int_{t_0}^{t} S_{12}(\tau)\,d\tau + N\text{k}\int_{t_0}^{t}\big(S_1(\tau)+S_{12}(\tau)\big)\big(S_2(\tau)+S_{12}(\tau)\big)d\tau \right]\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

где $\kappa = \lambda^3\left(\sigma^2 - a^2\right)$, a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(z)$, $a_2^{(i)}$ – вторые начальные моменты случайных величин с функцией распределения вероятностей $G_i(y)$.

Следствие. Полагая $t = T$, $t_0 \to -\infty$, учитывая (1), получим допредельную характеристическую функцию стационарного трехмерного распределения вероятностей суммарного объема занятых ресурсов на каждом блоке системы, которая совпадает с характеристической функцией трехмерного гауссовского распределения с вектором математического ожидания:

$$\mathbf{a} = N\lambda\left[\, a_1^{(0)} b_0 \quad a_1^{(1)} b_1 \quad a_1^{(2)} b_2 \,\right] \tag{6}$$

и ковариационной матрицей:

$$\mathbf{K} = N\begin{bmatrix} \lambda a_2^{(0)} b_0 + \text{k}\left(a_1^{(0)}\right)^2 \beta_0 & \text{k} a_1^{(0)} a_1^{(1)} \beta_{01} & \text{k} a_1^{(0)} a_1^{(2)} \beta_{02} \\ \text{k} a_1^{(0)} a_1^{(1)} \beta_{01} & \lambda a_2^{(1)} b_1 + \text{k}\left(a_1^{(1)}\right)^2 \beta_1 & \lambda a_1^{(1)} a_1^{(2)} b_{12} + \text{k} a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} \\ \text{k} a_1^{(0)} a_1^{(2)} \beta_{02} & \lambda a_1^{(1)} a_1^{(2)} b_{12} + \text{k} a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} & \lambda a_2^{(2)} b_2 + \text{k}\left(a_1^{(2)}\right)^2 \beta_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где

,

$$b_0 = \int_0^\infty \big(1 - B_0(\tau)\big)d\tau, \qquad \beta_0 = \int_0^\infty \big(1 - B_0(\tau)\big)^2 d\tau,$$

$$b_1 = \int_0^\infty \big(B_0(\tau) - (B_1 * B_0)(\tau)\big)d\tau, \qquad \beta_1 = \int_0^\infty \big(B_0(\tau) - (B_1 * B_0)(\tau)\big)^2 d\tau,$$

$$b_2 = \int_0^\infty \big(B_0(\tau) - (B_2 * B_0)(\tau)\big)d\tau, \qquad \beta_2 = \int_0^\infty \big(B_0(\tau) - (B_2 * B_0)(\tau)\big)^2 d\tau,$$

$$\beta_{01} = \int_0^\infty \big(1 - B_0(\tau)\big)\big(B_0(\tau) - (B_1 * B_0)(\tau)\big)d\tau, \qquad \beta_{02} = \int_0^\infty \big(1 - B_0(\tau)\big)\big(B_0(\tau) - (B_2 * B_0)(\tau)\big)d\tau,$$

$$b_{12} = \int_0^\infty \left(B_0(\tau) - (B_1 * B_0)(\tau) - (B_2 * B_0)(\tau) + \int_0^\tau B_1(\tau - x) B_2(\tau - x)\, dB_0(x) \right) d\tau,$$

$$\beta_{12} = \int_0^\infty \big(B_0(\tau) - (B_1 * B_0)(\tau)\big)\big(B_0(\tau) - (B_2 * B_0)(\tau)\big)d\tau$$

4. Численный анализ точности асимптотических результатов

Пусть входящий рекуррентный поток задан функцией распределения длин интервалов, которая соответствует равномерному на [0,5N;1,5N] распределению, (при $N \to \infty$, получаем асимптотическое условие растущей интенсивности входящего потока). Время обслуживания имеет гамма распределение с параметрами $\alpha_0 = \beta_0 = 0{,}5$; $\alpha_1 = \beta_1 = 1{,}5$; $\alpha_2 = \beta_2 = 2{,}5$.

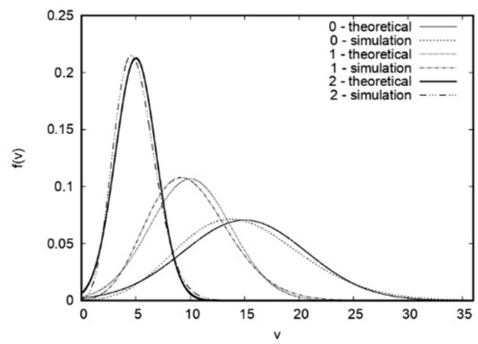
Ресурсы имеют равномерное распределение в диапазоне: [0;3] для первой фазы, [0;2] для первого блока второй фазы, [0;1] для второго блока второй фазы. Проведем серию экспериментов, увеличивая значения N, и сравним асимптотические распределения с эмпирическими, используя расстояние Колмогорова: $\Delta = \max_x \left|F(x) - G(x)\right|$, где $F(x)$ – допредельная гауссовская функция распределения, а $G(x)$ – эмпирическая.

В таблице 1 приведены значения расстояний Колмогорова между асимптотическими и эмпирическими функциями распределения суммарных объемов занятых ресурсов на трех блоках системы (Δ_0, Δ_1, Δ_2). Заметим, что точность аппроксимации увеличивается с ростом интенсивности входящего потока N, а рисунок 1 демонстрирует это. Аналогичный вывод можно сделать и для совместного распределения, как показано в таблице 1 (Δ_{12}) и на рисунке 2. Такие же результаты были получены и для других пар двумерных распределений вероятностей.

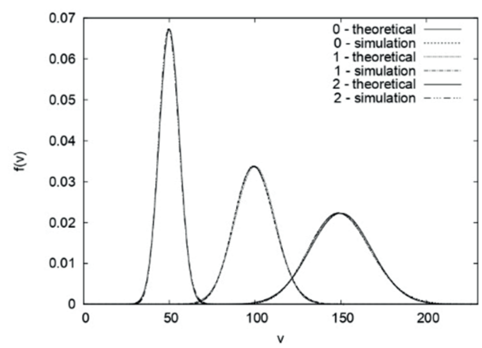
Таблица 1. Расстояния Колмогорова

Table 1. Kolmogorov Distances

N	1	3	5	7	10	20	50	100
Δ_0	0,372	0,118	0,065	0,044	0,031	0,019	0,012	0,008
Δ_1	0,374	0,102	0,056	0,040	0,030	0,020	0,013	0,009
Δ_2	0,367	0,115	0,062	0,042	0,028	0,018	0,011	0,008
Δ_{12}	0,374	0,118	0,068	0,046	0,031	0,019	0,012	0,008



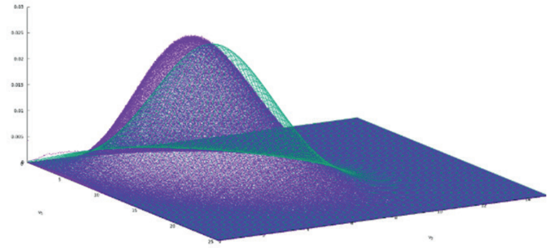
А) N = 10



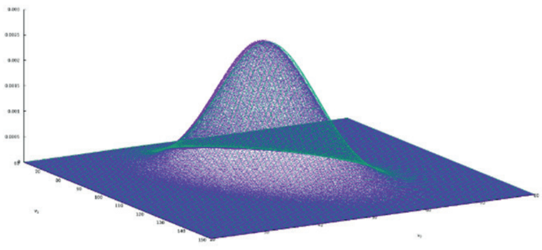
Б) N = 100

Р и с. 1. Распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса на каждом блоке системы (‘theoretical’ – гауссовское, ‘simulation’ – эмпирическое)

F i g. 1. The probability distribution of the total volume of the occupied resource on each block of the system (‘Theoretical’ - Gaussian, ‘simulation’ - empirical)



А) N = 10



Б) N = 100

Р и с. 2. Совместное распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса для первого и второго блоков второй фазы системы (фиолетовые точки – эмпирическое, зеленые линии – гауссовское)

F i g. 2. The joint probability distribution of the total volume of the occupied resource for the first and second blocks of the second phase of the system (purple dots - empirical, green lines - Gaussian)

Выполним оценку вероятности потери. Несмотря на то, что в этой работе РСМО аналитически исследовалась без отказов в обслуживании, как уже упоминалось во введении, в технических устройствах запасы ресурса ограничены. Необходимо определить размер предоставляемого ресурса таким образом, чтобы вероятность потери была минимальной. Поскольку аппроксимирующее распределение является гауссовским, воспользуемся известным правилом «трех сигм» (3-sigma rule): вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания более, чем на три среднеквадратических отклонения, практически равна нулю. Проверим данное предположение следующим образом: в имитационной модели установим ограничение на объем предоставляемого ресурса в количестве «математическое ожидание + 3 * среднеквадратическое отклонение» из (6) и (7). Тогда, когда запрос на ресурс больше, чем количество свободного ресурса в системе, требование получит отказ. Посчитаем количество требований, получивших отказ, разделим на количество моделируемых событий в системе, получим статистическую вероятность потери. В наших экспериментах для различных значений параметра интенсивности N (в том числе для 1, т.е. когда интенсивность поступления совпадает с интенсивностью обслуживания), мы получили вероятность отказа 0,004. По запросу поставщика услуг эту вероятность нетрудно уменьшить, увеличивая ограничение на объем буфера.

Заключение

Была исследована бесконечнолинейная ресурсная СМО с неограниченным числом приборов, с копированием заявки на второй фазе системы и с входящим рекуррентным потоком. С помощью метода асимптотического анализа показано, что совместное асимптотическое распределение вероятности суммарного объема занятого ресурса на каждой фазе системы сходится к трехмерному гауссовскому распределению в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока.

Список использованных источников

[1] *Buturlin I. A., Gaidamaka Y. V., Samuylov A. K.* Utility function maximization problems for two cross-layer optimization algorithms in OFDM wireless networks // 2012 IV International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems, St. Petersburg, 2012. Pp. 63-65. DOI: 10.1109/ICUMT.2012.6459745

[2] *Galinina O., Andreev S. D., Gerasimenko M., Koucheryavy Y., Himayat N., Yeh S. P., Talwar S.* Capturing Spatial Randomness of Heterogeneous Cellular/WLAN Deployments With Dynamic Traffic // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2014. Vol. 32, Issue 6. Pp. 1083-1099. DOI: 10.1109/JSAC.2014.2328172

[3] *Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Самуйлов А. К.* О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2016. № 8. С. 125-135. DOI: 10.1134/S0005117916080087

[4] *Galinina O., Andreev S., Turlikov A., Koucheryavy Y.* Optimizing Energy Efficiency of a Multi-Radio Mobile Device in Heterogeneous Beyond-4G Networks // Performance Evaluation. 2014. Vol. 78. Pp. 18-41. DOI: 10.1016/j.peva.2014.06.002

[5] *Gudkova I., Samouylov K., Buturlin I., Borodakiy V., Gerasimenko M., Galinina O., Andreev S.* Analyzing Impacts of Coexistence between M2M and H2H Communication on 3GPP LTE System / A. Mellouk, S. Fowler, S. Hoceini, B. Daachi (eds) // Wired/Wireless Internet Communications. WWIC 2014. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8458. Springer, Cham, 2014. Pp. 162-174. DOI: 10.1007/978-3-319-13174-0_13

[6] *Ромм Э. Л., Скитович В. В.* Об одном обобщении задачи Эрланга // Автоматика и телемеханика. 1971. № 6. С. 164-168. URL: http://mi.mathnet.ru/at9240 (дата обращения: 16.07.2019).

[7] *Кац Б. А.* Об обслуживании сообщений случайной длины // Теория массового обслуживания: Тр. 3-й Всесоюзн. школы-совещания по теории массового обслуживания. 1976. С. 157-168.

[8] *Gimpelson L. A.* Analysis of Mixtures of Wide- and Narrow-Band Traffic // IEEE Transactions on Communication Technology. 1965. Vol. 13, Issue 3. Pp. 258-266. DOI: 10.1109/TCOM.1965.1089121

[9] *Башарин Г. П., Самуйлов К. Е., Яркина Н. В., Гудкова И. А.* Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 16-28. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15276411 (дата обращения: 16.07.2019).

[10] *Горбунова А. В., Наумов В. А., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е.* Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и её применение. 2018. Т. 12, №3. С. 48-55. DOI: 10.14357/19922264180307

[11] *Naumov V., Samouylov K.* Analysis of multi-resource loss system with state-dependent arrival and service rates // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2017. Vol. 31, No. 4. Pp. 413-419. DOI: 10.1017/S0269964817000079

[12] *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M.* Multiclass GI/GI/∞ Queueing Systems with Random Resource Requirements / A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev (eds) // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science, Vol. 912. Springer, Cham, 2018. Pp. 129-142. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_11

[13] *Ageev K., Sopin E., Konstantin S.* Simulation of the Limited Resources Queuing System with Signals // 2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Moscow, Russia, 2018. Pp. 1-5. DOI: 10.1109/ICUMT.2018.8631246

[14] *Sopin E., Vikhrova O., Samouylov K.* LTE network model with signals and random resource requirements // 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Munich, 2017. Pp. 101-106. DOI: 10.1109/ICUMT.2017.8255155

[15] *Samuvlov A., Moltchanov D., Krupko A., Kovalchukov R., Moskaleva F., Gaidamaka Y.* Performance Analysis of Mixture of Unicast and Multicast Sessions in 5G NR Systems // 2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Moscow, Russia, 2018. Pp. 1-7. DOI: 10.1109/ICUMT.2018.8631230

[16] *Beschastnyi V., Savich V., Ostrikova D., Gudkova I. Araniti G., Shorgin V.* Analysis of machine-type communication data transmission by multicasting technology in 5G wireless networks // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2116, Issue 1. Pp. 090005. DOI: 10.1063/1.5114070

[17] *Галилейская А. А., Лисовская Е. Ю.* Асимптотический анализ многофазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с входящим MMPP потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 13-21. DOI: 10.17223/19988605/45/2

[18] *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M.* Infinite-Server Tandem Queue with Renewal Arrivals and Random Capacity of Customers / V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozyrev (eds) // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science. Vol. 700. Springer, Cham, 2017. Pp. 201-216. DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_17

[19] *Лисовская Е. Ю., Галилейская А. А.* Суммарный объем занятого ресурса в ресурсной системе массового обслуживания GI(v)/GI(n)/∞ с n типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018): материалы XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. 2018. С. 88-93. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36383943 (дата обращения: 16.07.2019).

[20] *Лисовская Е. Ю., Моисеев А. Н., Моисеева С. П., Пагано М.* Моделирование процессов обработки данных физических экспериментов в виде немарковской многоресурсной системы массового обслуживания // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61, № 12(732). С. 39-46. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36651301 (дата обращения: 16.07.2019).

[21] *Галилейская А. А., Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П.* Гауссовская аппросимация распределения вероятностей суммарного объема занятого ресурса в многоресурсной бесконечнолинейной системе массового обслуживания входящим с MMPP-потоком требований // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018) материалы XXI Международной научной конференции. Российский университет дружбы народов; Под общей редакцией В. М. Вишневского и К.Е. Самуйлова. РУДН, 2018. С. 7-12. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36626335 (дата обращения: 16.07.2019).

[22] *Shorgin S., Pechinkin A., Samouylov K., Gaidamaka Y., Sopin E., Mokrov E.* Queuing systems with multiple queues and batch arrivals for cloud computing system performance analysis // 2014 International Science and Technology Conference (Modern Networking Technologies) (MoNeTeC), Moscow, 2014. Pp. 1-4. DOI: 10.1109/MoNeTeC.2014.6995600

[23] *Cao J., Li K., Stojmenovic I.* Optimal Power Allocation and Load Distribution for Multiple Heterogeneous Multicore Server Processors across Clouds and Data Centers // IEEE Transactions on Computers. 2014. Vol. 63, Issue 1. Pp. 45-58. DOI: 10.1109/TC.2013.122

[24] *Firdhous M., Ghazali O., Hassan S.* Modeling of cloud system using Erlang formulas // The 17th Asia Pacific Conference on Communications, Sabah, 2011. Pp. 411-416. DOI: 10.1109/APCC.2011.6152844

[25] *Moiseev A., Nazarov A.* Asymptotic analysis of a multistage queuing system with a high-rate renewal arrival process // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2014. Vol. 50, Issue 2. Pp. 163-171. DOI: 10.3103/S8756699014020083

[26] *Панкратова Е. В., Моисеева С. П., Фархадов М. П., Моисеев А. Н.* Ресурсные неоднородные СМО MMPP/GI(2)/∞ // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». 2019. Т. 12, вып. 2. С. 231-239. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-2-231-239

Поступила 16.07.2019; принята в печать 10.08.2018; опубликована онлайн 30.09.2019.

Об авторах:

Галилейская Анастасия Александровна, студент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет (634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, д. 36), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1798-0634, n.galileyskaya@bk.ru

Лисовская Екатерина Юрьевна, младший научный сотрудник научного центра прикладного вероятностного анализа, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6); доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет (634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, д. 36), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7345-5565, lisovskaya-eyu@rudn.ru

Моисеева Светлана Петровна, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Томский государственный университет (634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, д. 36), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9285-1555, smoiseeva@mail.ru

Гайдамака Юлия Васильевна, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, Российский университет дружбы народов (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), доктор физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2655-4805, gaydamaka-yuv@rudn.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Buturlin I. A., Gaidamaka Y. V., Samuylov A. K. Utility function maximization problems for two cross-layer optimization algorithms in OFDM wireless networks. In*: 2012 IV International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems*, St. Petersburg, 2012, pp. 63-65. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICUMT.2012.6459745

[2] Galinina O., Andreev S.D., Gerasimenko M., Koucheryavy Y., Himayat N., Yeh S.P., Talwar S. Capturing Spatial Randomness of Heterogeneous Cellular/WLAN Deployments With Dynamic Traffic. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications.* 2014; 32(6):1083-1099. (In Eng.) DOI: 10.1109/JSAC.2014.2328172

[3] Naumov V.A., Samuylov K.E., Samuylov A.K. About the total amount of resources occupied by serviced applications. *Automation and Telemechanics*. 2016; 8:125-135. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: 10.1134/S0005117916080087

[4] Galinina O., Andreev S., Turlikov A., Koucheryavy Y. Optimizing Energy Efficiency of a Multi-Radio Mobile Device in Heterogeneous Beyond-4G Networks. *Performance Evaluation.* 2014; 78:18-41. (In Eng.) DOI: 10.1016/j.peva.2014.06.002

[5] Gudkova I., Samouylov K., Buturlin I., Borodakiy V., Gerasimenko M., Galinina O., Andreev S. Analyzing Impacts of Coexistence between M2M and H2H Communication on 3GPP LTE System. In: Mellouk A., Fowler S., Hoceini S., Daachi B. (eds) *Wired/Wireless Internet Communications. WWIC 2014. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8458. Springer, Cham, 2014, pp. 162-174. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-13174-0_13

[6] Romm E.L., Skitovich V.V. On certain generalization of problem of Erlang. *Automation and Telemechanics*. 1971; 32(6):1000-1003. (In Eng.)

[7] Katz B.A. On servicing messages of random length. In: *Queuing theory: Proceedings of the 3rd All-Union. meeting schools on queuing theory.* 1976, pp. 157-168. (In Russ.)

[8] Gimpelson L.A. Analysis of Mixtures of Wide- and Narrow-Band Traffic. *IEEE Transactions on Communication Technology.* 1965; 13(3):258-266. (In Eng.) DOI: 10.1109/TCOM.1965.1089121

[9] Basharin G.P., Samouylov K.E., Yarkina N.V., Gudkova I.A. A new stage in mathematical teletraffic theory. *Automation and Remote Control.* 2009; 70(12):1954-1964. DOI: 10.1134/S0005117909120030

[10] Gorbunova A.V., Naumov V.A., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Resource Queuing Systems as Models of Wireless Communication Systems. *Informatics and Applications.* 2018; 12(3):48-55. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: 10.14357/19922264180307

[11] Naumov V., Samouylov K. Analysis of multi-resource loss system with state-dependent arrival and service rates. *Probability in the Engineering and Informational Sciences.* 2017; 31(4):413-419. (In Eng.) DOI: 10.1017/S0269964817000079

[12] Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. Multiclass GI/GI/∞ Queueing Systems with Random Resource Requirements. In: Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds) *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science,* vol. 912. Springer, Cham, 2018, pp. 129-142. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_11

[13] Ageev K., Sopin E., Konstantin S. Simulation of the Limited Resources Queuing System with Signals. In: *2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT),* Moscow, Russia, 2018, pp. 1-5. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICUMT.2018.8631246

[14] Sopin E., Vikhrova O., Samouylov K. LTE network model with signals and random resource requirements. In: *9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT),* Munich, 2017, pp. 101-106. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICUMT.2017.8255155

[15] Samuvlov A., Moltchanov D., Krupko A., Kovalchukov R., Moskaleva F., Gaidamaka Y. Performance Analysis of Mixture of Unicast and Multicast Sessions in 5G NR Systems. In: *2018 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT),* Moscow, Russia, 2018, pp. 1-7. (In Eng.) DOI: 10.1109/ICUMT.2018.8631230

[16] Beschastnyi V., Savich V., Ostrikova D., Gudkova I. Araniti G., Shorgin V. Analysis of machine-type communication data transmission by multicasting technology in 5G wireless networks. *AIP Conference Proceedings.* 2019; 2116(1):090005. (In Eng.) DOI: 10.1063/1.5114070

[17] Galileiskaya A.A., Lisovskaya E.Yu. Asymptotic analysis of a multiphase infinite-linear resource queuing system with an incoming MMPP stream. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2018; 45:13-21. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: 10.17223/19988605/45/2

[18] Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. Infinite–Server Tandem Queue with Renewal Arrivals and Random Capacity of Customers. In: Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds) *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science*, vol. 700. Springer, Cham, 2017, pp. 201-216. (In Eng.) DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_17

[19] Lisovskaya E.Yu., Galileiskaya A.A. The total amount of the occupied resource in the queuing resource system GI(ν)/GI(n)/∞ with n types of applications. In: *Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2018): materials of the XVII A.F. Terpugov*, 2018, pp. 88-93. Available at:

https://elibrary.ru/item.asp?id=36383943 (accessed 16.07.2019). (In Russ.)

[20] Lisovskaya E.Yu., Moiseev A.N., Moiseeva S.P., Pagano M. Modeling of data processing processes of physical experiments in the form of a non-Markov multi-resource queuing system. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika.* 2018; 61(12):39-46. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36651301 (accessed 16.07.2019). (In Russ., abstract in Eng.)

[21] Galileiskaya A.A., Lisovskaya E.Yu., Moiseeva S.P. Gaussian approximation of the probability distribution of the total volume of the occupied resource in a multi-resource infinite-linear queuing system with an incoming MMPP-demand stream. In: Vishnevsky V.M., Samuylov K.E. (eds) *Distributed computer and telecommunication networks: control, computation, communication (DCCN-2018) materials of the XXI International Scientific Conference.* RUDN, 2018, pp. 7-12. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36626335 (accessed 16.07.2019). (In Russ., abstract in Eng.)

[22] Shorgin S., Pechinkin A., Samouylov K., Gaidamaka Y., Sopin E., Mokrov E. Queuing systems with multiple queues and batch arrivals for cloud computing system performance analysis. In: *2014 International Science and Technology Conference (Modern Networking Technologies) (MoNeTeC),* Moscow, 2014, pp. 1-4. (In Eng.) DOI: 10.1109/MoNeTeC.2014.6995600

[23] Cao J., Li K., Stojmenovic I. Optimal Power Allocation and Load Distribution for Multiple Heterogeneous Multicore Server Processors across Clouds and Data Centers. *IEEE Transactions on Computers.* 2014; 63(1):45-58. (In Eng.) DOI: 10.1109/TC.2013.122

[24] Firdhous M., Ghazali O., Hassan S. Modeling of cloud system using Erlang formulas. In: *The 17th Asia Pacific Conference on Communications,* Sabah, 2011, pp. 411-416. (In Eng.) DOI: 10.1109/APCC.2011.6152844

[25] Moiseev A., Nazarov A. Asymptotic analysis of a multistage queuing system with a high-rate renewal arrival process. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2014; 50(2):163-171. (In Eng.) DOI: 10.3103/S8756699014020083

[26] Pankratova E., Moiseeva S., Farhadov M., Moiseev A. Heterogeneous System MMPP/GI(2)/∞ with Random Customers Capacities. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2019; 12(2):231-239. (In Eng., abstract in Russ.) DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-2-231-239

Submitted 16.07.2019; revised 10.08.2019; published online 30.09.2019.

About the authors:

Anastasia A. Galileyskaya, Student of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University (36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1798-0634, n.galileyskaya@bk.ru

Ekaterina Yu. Lisovskaya, Junior Researcher of the Scientific Center for Applied Probabilistic Analysis, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia); Associate Professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University (36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7345-5565, lisovskaya-eyu@rudn.ru,

Svetlana P. Moiseeva, Professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University (36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9285-1555, smoiseeva@mail.ru

Yuliya V. Gaydamaka, Professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2655-4805, gaydamaka-yuv@rudn.ru

All authors have read and approved the final manuscript.