УДК 519.237.5
DOI: 10.25559/SITITO.16.202002.285-294

Математическая модель анализа надежности неоднородной дублированной системы передачи данных

Г. Ж. К. Уанкпо[1*], **Д. В. Козырев**[1,2], **Э. Нибасумба**[1], **М. Н. Б. Муаль**[1]
[1] ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», г. Москва, Россия
117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
[*] gibsonhouankpo@yahoo.fr
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук», г. Москва, Россия
117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

Аннотация

В данной работе мы рассматриваем математическую модель восстанавливаемой резервированной системы передачи данных как модель замкнутой неоднородной системы холодного дублирования с одним ремонтным устройством, с произвольным числом источников данных с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её элементов. Мы изучаем надежность системы, определяемую как стационарную вероятность безотказной работы системы. Предлагаемая аналитическая методология позволила оценить надежность всей системы при отказе её отдельных элементов. Получены явные аналитические и асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний системы и стационарной вероятности безотказной работы системы, которые позволяют анализировать другие операционные характеристики системы относительно производительности резервных элементов. Были выбраны следующие распределения времени ремонта элементов: Экспоненциальное (M), Вейбулла-Гнеденко (GW), Парето (PAR), Гамма (G) и Логнормальное (LN) для анализа и сравнения результатов. Также изучалась проблема анализа чувствительности характеристик надежности рассматриваемой системы к видам распределений времени ремонта. Полученные формулы показали наличие явной зависимости этих характеристик от типов функций распределения времени восстановления элементов системы. Однако численные исследования и анализ построенных графиков показали, что эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении элементов системы.

Ключевые слова: надежность резервированных систем, стационарные вероятности состояний системы, стохастическое моделирование, асимптотический анализ, чувствительность.

Финансирование: публикация подготовлена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности «5-100» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-37-90137 «Исследование чувствительности характеристик надежности гибридных систем связи к виду функций распределения наработки на отказ и времени восстановления их элементов».

Для цитирования: Уанкпо, Г. Ж. К. Математическая модель анализа надежности неоднородной дублированной системы передачи данных / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев, Э. Нибасумба, М. Н. Б. Муаль. – DOI 10.25559/SITITO.16.202002.285-294 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 2. – С. 285-294.

Mathematical Model of the Reliability Analysis of a Heterogeneous Duplicate Data Transmission System

H. G. K. Houankpo[a*], **D. V. Kozyrev**[a,b], **E. Nibasumba**[a], **M. N. B. Mouale**[a]
[a] Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia
[*] gibsonhouankpo@yahoo.fr
[b] V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia

Abstract

In this work, we consider the mathematical model of the repaired data transmission system as a model of a closed heterogeneous cold standby system with one repair device with an arbitrary number of data sources with an exponential distribution function of uptime and an arbitrary distribution function of the repair time of its elements. We study the reliability of the system, defined as the steady-state probability of failure-free system operation. The proposed analytical methodology made it possible to evaluate the reliability of the entire system in case of failure of its elements. Explicit analytic and asymptotic expressions are obtained for the steady-state probabilities of system and the steady-state probability of failure-free system operation. The problem of analyzing the sensitivity of the reliability characteristics of the system under consideration to the types of repair time distributions was also studied. The obtained formulas showed the presence of a clear dependence of these characteristics on the types of distribution functions of the recovery time of system elements. However, numerical studies and analysis of the constructed graphs showed that this dependence becomes vanishingly small with a "quick" restoration of system elements.

Keywords: Reliability of redundant systems, steady-state probabilities, stochastic modeling, asymptotic analysis, sensitivity.

Funding: The publication was prepared with the support of Global Competitiveness Enhancement Project 5-100 and with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research as an integral part of research project No. 20-37-90137 "Study of the sensitivity of the reliability characteristics of hybrid communication systems to the type of time-to-failure distribution functions and the recovery time of their elements".

For citation: Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V., Nibasumba E., Mouale M.N.B. Mathematical Model of the Reliability Analysis of a Heterogeneous Duplicate Data Transmission System. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(2):285-294. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.285-294

Введение и мотивация

Ранее в [1] была изучена модель надежности однородной системы передачи данных облегчённого (теплого) резервирования с произвольным распределением времени восстановления используя подход имитационного моделирования; где были получены значения относительной скорости восстановления, при котором достигается заданный уровень надежности с относительно небольшим превышением средних значений времени безотказной работы на время ремонта, кроме случаев, когда время ремонта системы распределено по закону Вейбулла-Гнеденко; представлены графики зависимости вероятности безотказной работы системы и графики равномерной разности результатов имитационной модели для разных распределений в зависимости от относительной скорости восстановления. В [2-3] было показано, что не всегда можно получить явные аналитические выражения для стационарного распределения рассматриваемой системы передачи данных с холодным резервом. Имитационная модель позволила исследовать надежность системы, определяемую как стационарную вероятность безотказной работы системы, а также получить оценки характеристик надежности системы; также численное исследование и анализ графиков показали, что эта зависимость становится исчезающе малой при «быстрым» восстановления, то есть относительно скорости роста восстановления.

В [4] был сфокусирован анализ надежности общих систем с би-неопределенными переменными. Где предполагается, что время жизни компонентов системы имеет независимые и неидентичные распределения неопределенности с неопределенными параметрами. Функции надежности и среднее время до отказа общих систем исследуются в соответствии с теорией неопределенности. Установлены и проанализированы базовые модели общих систем с би-неопределенными переменными, включая последовательные, параллельные и последовательно-параллельные системы. Представлены явные выражения функции надежности и среднего времени до отказа каждой модели. Приведены некоторые числовые примеры, иллюстрирующие применение разработанных моделей и сравнение моделей с неопределенными и би-неопределенными переменными. В [5] исследована параллельная восстанавливаемая система. Система, состоящая из двух одинаковых компонентов и ремонтника с одним отпуском, в котором предполагается, что срок службы компонента удовлетворяет экспоненциальному распределению, а время ремонта компонента и время отпуска ремонтника следуют за произвольным распределением, в то время как ремонтник занимает отпуск в начале. Приводится математическая модель с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. В [6] исследована двух ремонтная система с холодным резервированием, обслуживаемая ремонтником. Система выходит из строя из-за внутренних факторов или внешних шоков. Предположим, что шоки приходят по ступенчатому пуассоновскому процессу, интенсивность которой (которая) изменяется относительно (в зависимости от) количества отказов рабочего компонента. Ремонт после сбоя несовершенен. Используя метод дополнительных переменных и векторную теорию марковских процессов, мы получаем важный показатель надежности системы. По теореме о продлении вознаграждения, оптимальная-ная политика замещения N ∗ определяется путем минимизации средней стоимости системы. Численные примеры представлены для проверки теоретических результатов. В [7] Ying Liu, Zhigang Qu and Xiaozhong Li изучали моделирование надежности для ремонтируемых систем со стохастическим временем жизни и произвольным (неопределенным) временем ремонта. Устанавливаются математические модели надежности восстанавливаемых последовательных систем, восстанавливаемых параллельных систем, восстанавливаемых последовательно-параллельных систем и восстанавливаемых параллельных последовательных систем, соответственно. Кроме того, получены формулы показателей надежности каждой ремонтируемой системы. Наконец, некоторые числовые примеры представлены для иллюстрации расчета показателей надежности. Также в [8] авторы исследовали математические модели надежности ремонтируемых систем с произвольным временем жизни и временем ремонта. Здесь время жизни и время ремонта типичных ремонтируемых систем предполагаются произвольным переменными. На основе вышеизложенных предположений устанавливаются математические модели произвольным надежности простых восстанавливаемых систем рядов, простых восстанавливаемых параллельных систем, простых восстанавливаемых последовательно-параллельных систем и простых ре-монтируемых систем параллельных рядов, соответственно. Предлагаются такие показатели надежности, как стационарная доступность состоянии, стационарная частота отказов состоянии, среднее время наработки и среднее время отказа. Наконец, некоторые числовые примеры приведены для иллюстрации.

В серии предыдущих исследований [9-12] были соответственно изучены моделирование надежности: статистический подход; моделирование надежности системы; Модели надежности и моделирование надежности и приложений. Далее сообщалось в [13], что для анализа надежности систем холодного резерва применяется альтернативный подход на основе функции восстановления матрицы. В связи с этим, один сервер с двумя идентичными единицами системы холодного резерва с несовершенным коммутатором рассматривается как полумарковский процесс с тремя состояниями. Кроме того, в [14-16] другие авторы сосредоточились на «анализе надежности системы холодного резерва».

В этой статье мы собираемся изучить модель замкнутой неоднородной холодного резерва с одним устройством восстановления, произвольным числом источников данных, с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени восстановления его элементов используя математического подхода.

Математическое моделирование: Описание модель и постановка задачи

Мы рассматриваем замкнутую неоднородную дублированную систему холодного резервирования с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её элементов, который, согласно измененным обозначениям Кендалла [17], будет обозначаться как $< M_2 / GI / 1 >$. Система состоит из двух разнотипных каналов передачи данных с одним ремонтным устройством. В данной работе будет рассмотрена зависимость вероятности безотказной работы системы от относительной скорости восстановления. Кроме того, система

удовлетворяет следующим предположениям:
Предположение 1: первоначально, работает в системе только один элемент (основный элемент) с приоритетом обслуживания и восстановления.
Предположение 2: при работе основного элемента, второй элемент находятся в холодном резерве.
Предположение 3: резервный элемент участвует в функционировании системы только после отказа основного.
Мы можем разделить систему на следующие состояния:
Состояние $(0^*,0)$: основный (0^*) элемент работает с приоритетом обслуживания, второй в холодном резерве;
Состояние $(1^*,0)$: основный элемент отказал и находится в ремонте, второй – работает;
Состояние $(1^*,1)$: оба элемента отказали, основный элемент находится в ремонте с приоритетом восстановления, второй ждёт своей очереди на ремонт;
Состояние $(0^*,1)$: основный элемент работает, второй находится в ремонте;
Ставится задача нахождения явных аналитических выражений для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности безотказной работы системы как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений. Для этого рассмотрим случайный процесс $v(t)$ число отказавших элементов системы в момент времени t,
и множество состояний системы $\varepsilon=\{(0^*,0)=0,\ (1^*,0)=1,\ (0^*,1)=1,\ (1^*,1)=2\}$. Для марковизации этого процесса, то есть для описания поведения системы с помощью Марковского процесса (МП) [18], введём дополнительную переменную $x(t)\in R_+^2$ – время, затраченное в момент t на ремонт отказавшего элемента, и воспользуемся расширенным пространством состояний $E=\varepsilon\times R_+^2$. В результате получим двумерный [19] процесс $(v(t),x(t))$ с расширенным пространством состояний $E=\{(0^*,0),(1^*,0,x),(0^*,1,x),(1^*,1,x)\}$.
Предположим, что элементы системы функционируют независимо друг от друга и введем следующие обозначения [2]:
A_i – случайная величина (с.в.), время до отказа основного элемента, $i=\overline{1,2}$;
B – с.в., время восстановления отказавшего элемента;

$A_i(x)$ – функция распределения (ФР) с.в. A_i, $i=\overline{1,2}$;

$B(x)$ – функция распределения (ФР) с.в. B;

$b(x)$ – плотность распределения (ПР) с.в. B;

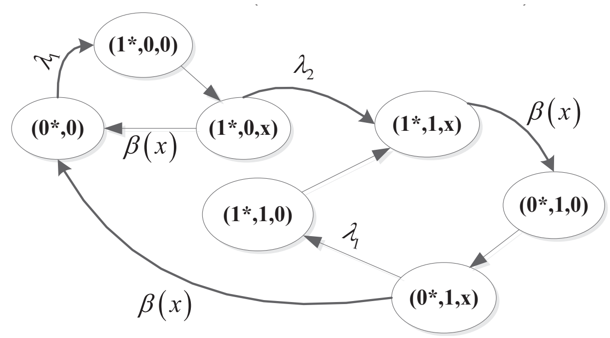
$\tilde{b}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}b(x)dx$ – преобразование Лапласа (ПЛ) плотности $b(x)$;
EA_i – среднее время безотказной работы элемента;
EB – среднее время ремонта отказавшего элемента;

$\rho={EA_2}/{EB}$ – относительная скорость восстановления;

$\beta(x)=\dfrac{b(x)}{1-B(x)}$ – условная ПР остаточной длительности ремонта элемента, находящегося в ремонте время t (интенсивность восстановления [21]);
λ_i – параметр экспоненциального распределения времени безотказной работы элемента, $i=\overline{1,2}$.

Обозначим через $p_{0^*,0}(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $i=(0^*,0)$, и через $p_{i^*,j}(t,x)$ – ПР (по непрерывной компоненте) вероятностей того, что в момент времени t система находится в состоянии $(i=\overline{0,1};\ j=\overline{0,1})$, и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале $(x,x+dx)$,
$p_{0^*,0}(t)=p\{v(t)=0\}$,

$p_{i^*,j}(t,x)dx=p\{v(t)=1,x<x(t)<x+dx\}, i=\overline{0,1}, j=\overline{0,1}, i\neq j.$
$p_{1^*,1}(t,x)dx=p\{v(t)=2,x<x(t)<x+dx\}.$



Р и с. 1. Граф интенсивностей переходов
F i g. 1. Transition rate graph

Теорема 1. Стационарные вероятности состояния восстанавливаемой системы имеет вид:

$$\pi_{0,0}=C_{1,0}\frac{1}{\lambda_1};\quad \pi_{1,0}=C_{1,0}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2};\quad \pi_{0,1}=C_{1,0}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_2)}{\tilde{b}(\lambda_1)}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1};$$

$$\pi_{1,1}=C_{1,0}\left(\frac{1+\left(\tilde{b}(\lambda_1)-1\right)\tilde{b}(\lambda_2)}{\tilde{b}(\lambda_1)}E[B]-\frac{1-\tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2}\right).$$

Доказательство. С помощью формулы полной вероятности, а с предельным переходом при $\Delta\to 0$ перейдем к выводу системы дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющей найти стационарные вероятности [20-24] состояний рассматриваемой системы. И в предположении что процесс имеет стационарное распределение при $t\to\infty$ получаем систему уравнения баланса. Перейдем к решению полученной системы уравнения баланса, используя метод вариации постоянной [25]. Отсюда находим стационарные вероятности для макро-состояний.
В итоге получаем следующие аналитические выражения для стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы в следующем виде:
$\widehat{\pi_0}=\pi_{0^*,0};\ \widehat{\pi_1}=\pi_{1^*,0}+\pi_{0^*,1};\ \widehat{\pi_2}=\pi_{1^*,1}.$

Где

$$\pi_{0^*,0}=C_{1,0}\frac{1}{\lambda_1};\quad \pi_{1^*,0}=C_{1,0}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2};\quad \pi_{0^*,1}=C_{1,0}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_2)}{\tilde{b}(\lambda_1)}\frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1};$$

$$\pi_{1^*,1}=C_{1,0}\left(\frac{1+\left(\tilde{b}(\lambda_1)-1\right)\tilde{b}(\lambda_2)}{\tilde{b}(\lambda_1)}E[B]-\frac{1-\tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2}\right)$$

$E[B]$ – математическое ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента, и используя условие нормировки $\widehat{\pi_0}+\widehat{\pi_1}+\widehat{\pi_2}=1$, найдем константу $C_{1,0}$.

Асимптотическое выражение для вероятностей состояния системы при редких отказах

Пусть $\tilde{b}(\lambda_i) = \int_0^\infty e^{-\lambda_i x} \cdot b(x)\,dx -$ преобразование Лапласа (ПЛ) плотность распределения (ПР) случайная величина (с.в.), время восстановления отказавшего элемента.
Рассмотрим случай, когда $Max(\lambda_i) \to 0$

Используя метод разложения в ряд Тейлора и, получим следующие выражение

$$\tilde{b}(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{np} \frac{\tilde{b}^{(k)}(0)}{k!} \lambda_i^{\,k} + \overset{=}{o}(\lambda_i^{\,np}) = \sum_{k=0}^{np} \frac{\left[\int_0^\infty e^{-\lambda_i x} \cdot b(x)\,dx\right]^{(k)}_{|\lambda_i=0}}{k!} \lambda_i^{\,k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E\left[B^k\right] \cdot \frac{\lambda_i^{\,k}}{k!}$$

Где $E\left[B^k\right] = \int_0^\infty x^k \cdot b(x)\,dx -$ Моменты k-ого порядка время восстановления отказавшего элемента, $np -$ номер порядка.
В итоге получаем следующие асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы в следующем виде:

$$\pi_{0*,0} = C_{1,0} \frac{1}{\lambda_1}; \quad \pi_{1*,0} = C_{1,0} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_2^k}{k!}\right)}{\lambda_2};$$

$$\pi_{0*,1} = C_{1,0} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_2^k}{k!}\right)}{\sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_1^k}{k!}} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_1^k}{k!}\right)}{\lambda_1};$$

$$\pi_{1*,1} = C_{1,0} \left(\frac{1 + \left(\sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_1^k}{k!} - 1\right) \sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_2^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_1^k}{k!}} E[B] - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k E\left[B^k\right] \frac{\lambda_2^k}{k!}\right)}{\lambda_2} \right)$$

Как видно из приведенных выражений, имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида распределений времени ремонта. Однако эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов, т.е. с ростом относительной скорости восстановления ρ. Численные и графические результаты приведены в следующем разделе.

Численные и графические результаты

Рассмотрим частные случаи численных результатов модели при $EB = E[B] = 1$ системы передачи данных с разными известными распределениями времени ремонта.
В Таблице 1, приведены точные и приближенные значения вероятности безотказной работы восстанавливаемой системы, а в таблице 2, стационарных вероятностей состоянии.

Таблица 1. **Точные значения (Т.з.) и Приближенные значения (П.з.) вероятности безотказной работы восстанавливаемой системы** $1 - p_2$ **при** $np = 2$
Table 1. **Exact values and Approximate values of the probability of failure-free operation of the restored system** $1 - p_2$ **at** $np = 2$

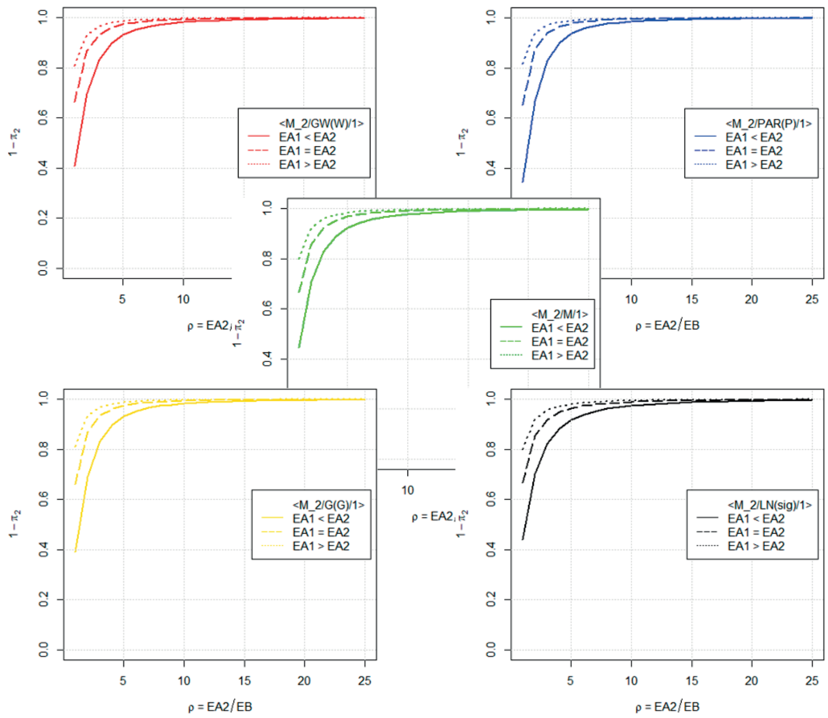
		M	$GW(W)$	$PAR(P)$	$G(G)$	$LN(sig)$
$EA_1 = 10$	Т.з.	0.996	0.997	0.998	0.997	0.995
$EA_2 = 25$	П.з.	0.996	0.997	0.998	0.997	0.995
$EA_1 = 25$	Т.з.	0.998	0.999	0.999	0.999	0.998
$EA_2 = 25$	П.з.	0.998	0.999	0.999	0.999	0.998
$EA_1 = 25$	Т.з.	0.996	0.997	0.998	0.997	0.996
$EA_2 = 10$	П.з.	0.996	0.997	0.998	0.997	0.995

Таблица 2. **Точные значения (Т.з.) и Приближенные значения (П.з.) стационарных вероятностей состоянии восстанавливаемой системы** p_i **при** $np = 2$
Table 2. Exact values and Approximate values of stationary probabilities of the state of the restored system p_i **at** $np = 2$

		$EA_1 = 10$, $EA_2 = 25$			$EA_1 = 25$, $EA_2 = 25$			$EA_1 = 25$, $EA_2 = 10$		
		π_0	π_1	π_2	π_0	π_1	π_2	π_0	π_1	π_2
M	Т.з.	0.906	0.091	0.004	0.960	0.038	0.002	0.958	0.038	0.004
	П.з.	0.906	0.090	0.004	0.960	0.038	0.002	0.958	0.038	0.004
GW	Т.з.	0.905	0.092	0.003	0.960	0.039	0.001	0.958	0.039	0.003
	П.з.	0.905	0.092	0.003	0.960	0.039	0.001	0.958	0.039	0.003
PAR	Т.з.	0.905	0.092	0.002	0.960	0.039	0.001	0.958	0.040	0.002
	П.з.	0.905	0.092	0.002	0.960	0.039	0.001	0.958	0.040	0.002
G	Т.з.	0.905	0.092	0.003	0.960	0.039	0.001	0.958	0.039	0.003
	П.з.	0.905	0.092	0.003	0.960	0.039	0.001	0.958	0.039	0.003
LN	Т.з.	0.906	0.089	0.005	0.960	0.038	0.002	0.958	0.037	0.004
	П.з.	0.906	0.089	0.005	0.960	0.038	0.002	0.958	0.036	0.005

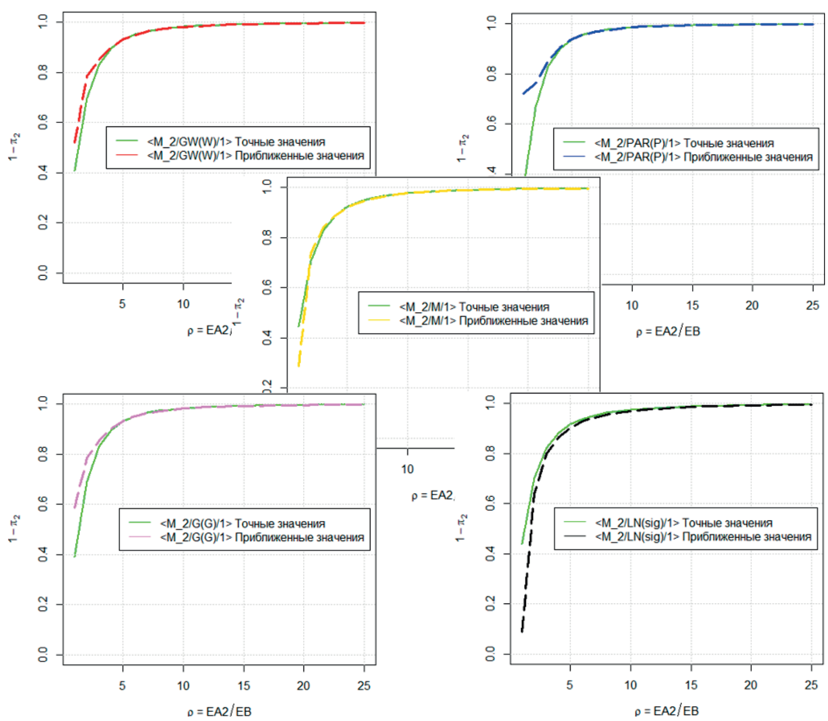
Видно, что для всех рассматриваемых распределений, результаты асимптотического выражения с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора отлично совпадают с результатами, полученными по точному выражению.

В рисунке 2 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы системы, а в рисунке 3 графики зависимости вероятности безотказной работы системы построенные по точным и по асимптотическим формулам.
Для графических результатов, рассмотрим модели при $\rho = {}^{EA_2}\!/_{EB}$; где и $EB = 1$, используя Экспоненциальное (M), Вейбулла-Гнеденко (GW), Гамма (G) и Логнормальное (LN) распределение.
Графические результаты демонстрируют, что чем большое среднее время безотказной работы основного элемента, тем большое надежность системы, и подтверждают вывод о высокой асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы. А также подтверждают вышеприведенный вывод о совпадении точных значений с приближенных значений при «быстром» восстановлении. Это значит, что можно использовать асимптотическое выражение в тех случаях, когда не удается получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы по точным формулам.



Р и с. 2. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1-p_2$ от ρ

F i g. 2. Graphs of the dependence of the probability of failure-free operation of system $1-p_2$ on ρ



Р и с. 3. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1-p_2$ от ρ построенные по точным и по асимптотическим формулам

F i g. 3. Graphs of the probability of failure-free operation of the system $1-p_2$ on ρ constructed using exact and asymptotic formulas

Заключение

Для восстанавливаемой замкнутой неоднородной дублированной системы $< M_2 / GI / 1 >$ холодного резервирования с одним ремонтным устройством, с экспоненциальной ФР в.б.р. её элементов и произвольным законом распределения времени их ремонта. Были получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений (таких как Экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла-Гнеденко, распределение Парето, Гамма распределения и логнормальное распределение). Полученные формулы показывают, что имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида распределений времени ремонта. Однако эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов, т.е. с ростом относительной скорости восстановления.

Графические результаты демонстрируют, что чем большое среднее время безотказной работы основного элемента, тем большое надежность системы, и подтверждают вывод о высокой асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы при «быстром» восстановлении.

А также можно использовать асимптотическое выражение в тех случаях, когда не удается получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы по точным формулам.

Список сокращений

ФР – функция распределения
в.б.р. – время безотказной работы

Список использованных источников

[1] Houankpo, H. G. K. Reliability Model of a Homogeneous Warm-Standby Data Transmission System with General Repair Time Distribution / H. G. K. Houankpo, D. Kozyrev. — DOI 10.1007/978-3-030-36614-8_34 // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Lecture Notes in Computer Science; V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozyrev (ed.) Springer, Cham. — 2019. — Vol. 11965. — Pp. 443-454. — URL: https://link. springer. com/chapter /10.1007%2F978-3-030-36614-8_34 (дата обращения: 16.08.2020).

[2] Уанкпо, Г. Ж. К. Аналитическое и имитационное моделирование надежности замкнутой однородной системы с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев. — DOI 10.25559/SITITO.14.201803.552-559 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2018. — Том 14, № 3. — С. 552-559. — URL: https://www. elibrary. ru/item. asp? id=37031832 (дата обращения: 16.08.2020). — Рез. англ.

[3] Houankpo, H. G. K. Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev // CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the VII Conference «Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems» / K. E. Samouilov, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov (ed.) — Moscow, Russia, 24-Apr-2017. — Vol. 1995. — Pp. 107-113. — URL: http://ceur-ws. org/Vol-1995/paper-15-970.pdf (дата обращения: 16.08.2020).

[4] Liu, Z. Reliability analysis of general systems with bi-uncertain variables / Z. Liu, L. Hu, S. Liu, Yu. Wang. — DOI 10.1007/s00500-019-04331-6 // Soft Computing. — 2020. — Vol. 24, Issue 9. — Pp. 6975-6986. — URL: https://link. springer. com/article/10.1007/s00500-019-04331-6 (дата обращения: 16.08.2020).

[5] Li, Y. L. Analysis of two components parallel repairable system with vacation / Y. L. Li, G. Q. Xu. — DOI 10.1080/03610926.2019.1670847 // Communications in Statistics — Theory and Methods. — 2019. — URL: https://www. tandfonline. com/doi/full/10.1080/03610926.2019.1670847 (дата обращения: 16.08.2020).

[6] Ge, X. Reliability analysis for a cold standby system under stepwise Poisson shocks / X. Ge, J. Sun, Q. Wu. — DOI 10.1080/23307706.2019.1633961 // Journal of Control and Decision. — 2019. — URL: https://www. tandfonline. com/doi/abs/10.1080/23307706.2019.1633961 (дата обращения: 16.08.2020).

[7] Liu, Y. Reliability Modeling for Repairable Systems With Stochastic Lifetimes and Uncertain Repair Times / Y. Liu, Z. Qu, X. Li, Y. An, W. Yin. — DOI 10.1109/TFUZZ.2019.2898617 // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2019. — Vol. 27, No. 12. — Pp. 2396-2405. — URL: https://ieeexplore. ieee. org/document/8638554 (дата обращения: 16.08.2020).

[8] Liu, Y. Reliability Mathematical Models of Repairable Systems With Uncertain Lifetimes and Repair Times / Y. Liu, Y. Ma, Z. Qu, X. Li. — DOI 10.1109/ACCESS.2018.2881210 // IEEE Access. — 2018. — Vol. 6. — Pp. 71285-71295. — URL: https://ieeexplore. ieee. org/document/8533327 (дата обращения: 16.08.2020).

[9] Wolstenholme, L. C. Reliability Modelling: A Statistical Approach / L. C. Wolstenholme. — DOI 10.1201/9780203740958. — New York, Routledge, Taylor & Francis, 2018. — URL: https://www. taylorfrancis. com/books/9780203740958 (дата обращения: 16.08.2020).

[10] Varde, P. V. System Reliability Modeling / P. V. Varde, M. G. Pecht. — DOI 10.1007/978-981-13-0090-5_4 // Risk-Based Engineering. — Springer Series in Reliability Engineering. — Springer, Singapore, 2018. — Pp. 71-113. — URL: https://link. springer. com/chapter/10.1007%2F978-981-13-0090-5_4 (дата обращения: 16.08.2020).

[11] Gullo, L. J. Reliability Models / L. J. Gullo. — DOI 10.1002/9781118310052.ch4 // Design for Reliability; D. Raheja, L. J. Gullo (ed.) John Wiley & Sons, Inc. — 2012. — Pp. 53-65. — URL: https://onlinelibrary. wiley. com/doi/10.1002/9781118310052.ch4 (дата обращения: 16.08.2020).

[12] Leemis, L. Reliability Modelling and Applications / L. Leemis. — DOI 10.1080/00401706.1989.10488534 // Technimetrics. — 1989. — Vol. 31, Issue 2. — Pp. 268. — URL: https://www. tandfonline. com/doi/abs/10.1080/00401706.1989.10488534 (дата обращения: 16.08.2020).

[13] Fathizadeh, M. An Alternative Approach to Reliability Analysis of Cold Standby Systems / M. Fathizadeh, K. Khorshid-

ian. — DOI 10.1080/03610926.2014.944660 // Communication in Statistics — Theory and Methods. — 2016. — Vol. 45, Issue 21. — Pp. 6471-6480. — URL: https://www. tandfonline. com/doi/full/10.1080/03610926.2014.944660 (дата обращения: 16.08.2020).

[14] Xu, J. J. Reliability Analysis of Cold Standby Compound System / J. J. Xu, Z-j. Xiao. — DOI 10.4028/www. scientific. net/AMR.945-949.1116 // Advanced Materials Research. — 2014. — Vol. 945-949. — Pp. 1116-1119. — URL: https://www. scientific. net/AMR.945-949.1116 (дата обращения: 16.08.2020).

[15] Wu, Q. Reliability analysis of a cold standby system attacked by shocks / Q. Wu. — DOI 10.1016/j. amc.2012.05.051 // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 218, Issue 23. — Pp. 11654-11673. — URL: https://www. sciencedirect. com/science/article/pii/S0096300312005668 (дата обращения: 16.08.2020).

[16] Vanderperre, E. J. Reliability analysis of a renewable multiple cold standby system / E. J. Vanderperre. — DOI 10.1016/j. orl.2003.10.002 // Operations Research Letters. — 2004. — Vol. 32, Issue 3. — Pp. 288-292. — URL: https://www. sciencedirect. com/science/article/pii/S0167637703001287 (дата обращения: 16.08.2020).

[17] Kendall, D. G. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain / D. G. Kendall. — DOI 10.1214/aoms/1177728975 // Annals of Mathematical Statistics. — 1953. — Vol. 24, No. 3. — Pp. 338-354. — URL: https://projecteuclid. org/euclid. aoms/1177728975 (дата обращения: 16.08.2020).

[18] Parshutina, S. A. Models to support design of highly reliable distributed computer systems with redundant processes of data transmission and handling / S. A. Parshutina, V. A. Bogatyrev. — DOI 10.1109/ITMQIS.2017.8085772 // 2017 International Conference «Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies» (IT&QM&IS). — St. Petersburg, 2017. — Pp. 96-99. — URL: https://ieeexplore. ieee. org/document/8085772 (дата обращения: 16.08.2020).

[19] Teh, J. Impact of the Real-Time Thermal Loading on the Bulk Electric System Reliability / J. Teh, C. Lai, Y. Cheng. — DOI 10.1109/TR.2017.2740158 // IEEE Transactions on Reliability. — 2017. — Vol. 66, No. 4. — Pp. 1110-1119.

[20] Севастьянов, Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами / Б. А. Севастьянов // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — Т. 2, № 1. — С. 106-116. — URL: http://www. mathnet. ru/php/archive. phtml? wshow=paper&jrnid=tvp&paperid=4960&option_lang=rus (дата обращения: 16.08.2020). — Рез. англ.

[21] Lisnianski, A. Multi-state Markov Model for Reliability Analysis of a Combined Cycle Gas Turbine Power Plant / A. Lisnianski, D. Laredo, H. BenHaim. — DOI 10.1109/SMRLO.2016.31 // 2016 Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO). — Beer-Sheva, 2016. — Pp. 131-135. — URL: https://ieeexplore. ieee. org/document/7433106 (дата обращения: 16.08.2020).

[22] Billinton, R. A comparison of four-state generating unit reliability models for peaking units / R. Billinton, J. Ge. — DOI 10.1109/TPWRS.2003.821613 // IEEE Transactions on Power Systems. — 2004. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 763-768. — URL: https://ieeexplore. ieee. org/document/1294979 (дата обращения: 16.08.2020).

[23] Doob, J. L. Asymptotic properties of Markoff transition prabability / J. L. Doob. — DOI 10.1090/S0002-9947-1948-0025097-6 // Transactions of the American Mathematical Society. — 1948. — Vol. 63, Issue 3. — Pp. 393-421. — URL: https://www. ams. org/journals/tran/1948-063-03/S0002-9947-1948-0025097-6 (дата обращения: 16.08.2020).

[24] Trivedi, K. Probability and Statistics with Reliability Queuing and Computer Science Applications / K. Trivedi. — New York: Wiley, 2002.

[25] Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М.: ГИТТЛ, 1952. — 232 с.

Поступила 16.08.2020; принята к публикации 10.09.2020; опубликована онлайн 30.09.2020.

Об авторах:

Уанкпо Гектор Жибсон Кинманон, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: https://orcid. org/0000-0003-1399-3817, gibsonhouankpo@yahoo. fr

Козырев Дмитрий Владимирович, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6); старший научный сотрудник, ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук» (117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid. org/0000-0003-0538-8430, kozyrev-dv@rudn. ru

Нибасумба Эммануэль, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: https://orcid. org/0000-0001-5334-6388, ema. patiri2015@yandex. ru

Муаль Мутуама Нда Бьенвеню, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультет физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: https://orcid. org/0000-0002-7230-5714, bmouale@mail. ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Houankpo H. G. K., Kozyrev D. Reliability Model of a Homogeneous Warm-Standby Data Transmission System with General Repair Time Distribution. In: Vishnevskiy V.,

Samouylov K., Kozyrev D. (ed.) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Lecture Notes in Computer Science. 2019; 11965:443-454. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: https://doi. org/10.1007/978-3-030-36614-8_34

[2] Houankpo H.G.K., Kozyrev D. Analytical Modeling and Simulation of Reliability of a Closed Homogeneous System with an Arbitrary Number of Data Sources and Limited Resources for their Processing. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2018; 14(3):552-559. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.552-559

[3] Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V. Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements. In: Samouilov K. E., Sevastianov L. A., Kulyabov D. S. (ed.) *CEUR Workshop Proceedings*. Selected Papers of the VII Conference "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems". 2017; 1995:107-113. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1995/paper-15-970.pdf (accessed 16.08.2020). (In Eng.)

[4] Liu Z., Hu L., Liu S., Wang Yu. Reliability analysis of general systems with bi-uncertain variables. *Soft Computing*. 2020; 24(9):6975-6986. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00500-019-04331-6

[5] Li Y.L., Xu G.Q. Analysis of two components parallel repairable system with vacation. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. 2019. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1670847

[6] Ge X., Sun J., Wu Q. Reliability analysis for a cold standby system under stepwise Poisson shocks. *Journal of Control and Decision*. 2019. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/23307706.2019.1633961

[7] Liu Y., Qu Z., Li X., An Y., Yin W. Reliability Modeling for Repairable Systems With Stochastic Lifetimes and Uncertain Repair Times. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2019; 27(12):2396-2405. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2898617

[8] Liu Y., Ma Y., Qu Z., Li X. Reliability Mathematical Models of Repairable Systems With Uncertain Lifetimes and Repair Times. *IEEE Access*. 2018; 6:71285-71295. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2881210.

[9] Wolstenholme L.C. Reliability Modelling: A Statistical Approach. New York, Routledge, Taylor & Francis, 2018. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1201/9780203740958.

[10] Varde P.V., Pecht M.G. System Reliability Modeling. In: Risk-Based Engineering. Springer Series in Reliability Engineering. Springer, Singapore; 2018. p. 71-113. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-0090-5_4

[11] Gullo L.J. Reliability Models. In: Raheja D., Gullo L. J. (ed.) Design for Reliability; John Wiley & Sons, Inc.; 2012. p. 53-65. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1002/9781118310052.ch4

[12] Leemis L. Reliability Modelling and Applications. *Technimetrics*. 1989; 31(2):268. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/00401706.1989.10488534

[13] Fathizadeh M., Khorshidian K. An Alternative Approach to Reliability Analysis of Cold Standby Systems. *Communication in Statistics — Theory and Methods*. 2016; 45(21):6471-6480. (In Eng.) DOI: https://doi. org/10.1080/03610926.2014.944660

[14] Xu J.J., Xiao Z-j. Reliability Analysis of Cold Standby Compound System. *Advanced Materials Research*. 2014; 945-949:1116-1119. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1116

[15] Wu Q. Reliability analysis of a cold standby system attacked by shocks. *Applied Mathematics and Computation*. 2012; 218(23):11654-11673. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.05.051

[16] Vanderperre E.J. Reliability analysis of a renewable multiple cold standby system. *Operations Research Letters*. 2004; 32(3):288-292. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.orl.2003.10.002

[17] Kendall D.G. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. *Annals of Mathematical Statistics*. 1953; 24(3):338-354. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177728975

[18] Parshutina S.A., Bogatyrev V.A. Models to support design of highly reliable distributed computer systems with redundant processes of data transmission and handling. In: *2017 International Conference "Quality Management,Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS).* St. Petersburg; 2017. p. 96-99. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/ITMQIS.2017.8085772

[19] Teh J., Lai C., Cheng Y. Impact of the Real-Time Thermal Loading on the Bulk Electric System Reliability. *IEEE Transactions on Reliability*. 2017; 66(4):1110-1119. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/TR.2017.2740158

[20] Sevast'yanov B.A. An Ergodic Theorem for Markov Processes and Its Application to Telephone Systems with Refusals. *Theory of Probability & Its Applications*. 1957; 2(1):104-112. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1137/1102005

[21] Lisnianski A., Laredo D., BenHaim H. Multi-state Markov Model for Reliability Analysis of a Combined Cycle Gas Turbine Power Plant. In: 2016 Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO). Beer-Sheva; 2016. p. 131-135. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/SMRLO.2016.31

[22] Billinton R., Ge J. A comparison of four-state generating unit reliability models for peaking units. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2004; 19(2):763-768. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/TPWRS.2003.821613

[23] Doob J.L. Asymptotic properties of Markoff transition prababilities. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1948; 63(3):393-421. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1948-0025097-6

[24] Trivedi K. Probability and Statistics with Reliability Queuing and Computer Science Applications. New York: Wiley; 2002. (In Eng.)

[25] Petrovsky I.G. *Lekcii po teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, GITTL; 1952. (In Russ.)

Submitted 16.08.2020; revised 10.09.2020; published online 30.09.2020.

About the authors:

Hector Gibson K. Houankpo, Postgraduate Student of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1399-3817, gibsonhouankpo@yahoo.fr

Dmitry V. Kozyrev, Associate Professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia); Senior Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS (65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0538-8430, kozyrev-dv@rudn.ru

Emmanuel Nibasumba, Postgraduate Student of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5334-6388, ema.patiri2015@yandex.ru

Moutouama N'dah B. Mouale, Postgraduate Student of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7230-5714, bmouale@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.