УДК 004.032.26+519.63
DOI: 10.25559/SITITO.16.202002.273-284

Аппроксимация функций Бесселя методом построения многослойных решений дифференциальных уравнений

А. Н. Васильев*, Т. В. Лазовская, Д. А. Тархов
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», г. Санкт-Петербург, Россия
195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29
* a.n.vasilyev@gmail.com

Аннотация

Построение многослойных приближённых решений дифференциальных уравнений, основанное на классических численных методах, применяется для аппроксимации специальных функций как решений соответствующих дифференциальных уравнений. В работе исследуется уравнение Бесселя. Многослойные методы были введены авторами ранее как способ построения приближенных решений в аналитической форме, аналогичной нейронным сетям глубокого обучения без необходимости, но с возможностью такого обучения. Задача аппроксимации функций Бесселя считается классической, но сохраняет свою актуальность в связи с требованиями современной физики и связанными с ней вычислениями. В работе строятся единые параметрические приближенные решения для функций Бесселя разных порядков, приводятся примеры конкретных приближений для отрицательных и положительных порядков функций Бесселя первого рода, в том числе для полуцелых значений. В качестве базисных методов построения многослойных решений рассмотрены как явные, так и неявные методы. Применение явных методов изучено в двух разных постановках. Показаны преимущества полученных результатов в сравнении с усеченным степенным рядом. Иллюстрируется возможность построения приближений с любой заданной точностью. Предложен способ увеличения точности аппроксимации с помощью использования оптимальной стартовой точки для явных схем.

Ключевые слова: приближенные решения, дифференциальные уравнения, функция Бесселя, явные и неявные методы.

Финансирование: настоящая работа основана на исследованиях, выполненных при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00474) «Разработка математических моделей и методов расчета необратимого деформирования конструкций со сложной реологией материала».

Для цитирования: Васильев, А. Н. Аппроксимация функций Бесселя методом построения многослойных решений дифференциальных уравнений / А. Н. Васильев, Т. В. Лазовская, Д. А. Тархов. – DOI 10.25559/SITITO.16.202002.273-284 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 2. – С. 273-284.

Approximation of Bessel Functions by the Method of Constructing Multilayer Solutions of Differential Equations

A. N. Vasilyev*, T. V. Lazovskaya, D. A. Tarkhov
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia
29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia
* a.n.vasilyev@gmail.com

Abstract

The construction of multilayer approximate solutions of differential equations based on classical numerical methods is used to approximate special functions as solutions of the corresponding differential equations. In this paper, we investigate the Bessel equation. Multilayer methods were introduced by the authors earlier as a way to construct approximate solutions in an analytical form similar to deep learning neural networks without the need, but with the possibility of such training. The problem of approximating Bessel functions is considered classical, but it remains relevant due to the requirements of modern physics and related calculations. In this paper, we construct unified parametric approximate solutions for Bessel functions of different orders and give examples of specific approximations for negative and positive orders of Bessel functions of the first kind, including for half-integer values. Both explicit and implicit methods are considered as basic methods for constructing multi-layer solutions. The use of explicit methods has been studied in two different settings. The advantages of the obtained results in comparison with the truncated power series are shown. The possibility of constructing approximations with any given accuracy is illustrated. A method for increasing the approximation accuracy by using the optimal starting point for explicit schemes is proposed.

Keywords: approximate solutions, differential equations, Bessel function, explicit and implicit methods.

Funding: This paper is based on research carried out with the financial support of the grant of the Russian Scientific Foundation (project No. 18-19-00474).

For citation: Vasilyev A.N., Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A. Approximation of Bessel Functions by the Method of Constructing Multilayer Solutions of Differential Equations. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(2):273-284. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.273-284

Введение

Цилиндрические функции, в частности функции Бесселя, широко применяются при решении задач математической физики [1]. Они определяются как решения обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводит применение метода разделения переменных при решении задач, содержащих оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

Начальный отрезок степенного ряда для функций Бесселя даёт хорошее приближение только в достаточно малой окрестности точки, в которой он построен. Таким образом, возникает проблема аппроксимации указанной функции более простыми функциями, которые можно использовать в различных физических приложениях. Вопрос о решении упомянутой задачи аппроксимации поднимается регулярно. Так, в [2] рассмотрен высокоточный метод аппроксимации на основе разложений Ганкеля для функций Бесселя целого порядка первого и второго родов. Но получающиеся аппроксимации оказываются достаточно сложными. В [3] автор представляет приближение функции Бесселя нулевого порядка первого рода для малых аргументов вблизи начала координат, подчеркивая полезную относительную простоту получающегося приближения. В работах [4-6] последовательно развивается подход, основанный на методе многоточечной квази-рациональной аппроксимации, где итоговая высокоточная аппроксимация объединяет в себе асимптотическое и степенное разложения для функции Бесселя. Приведенные подходы не являются универсальными методами аппроксимации, существенно опираясь на особенности функции Бесселя.

Современные задачи приближенных вычислений в математической физике часто требуют быстрого получения простых решений с применением единых подходов. Рассматривая функцию Бесселя как решение соответствующего дифференциального уравнения, естественно применить для ее вычисления методы приближенного интегрирования. Классические численные методы не дают автоматически функциональной аппроксимации; о недостатках разложения в ряд уже было упомянуто выше. Нами в работах [7-26] был предложен метод построения многослойных приближенных решений дифференциальных уравнений на основе классических итерационных формул. Возможность данного метода учитывать параметры задачи позволяет построить единую параметрическую аппроксимацию для функций Бесселя различных порядков, как отрицательных, так и дробных. В данной статье представлены результаты применения многослойных методов к задаче аналитического приближения функций Бесселя. Данные методы позволяют получить приближения в виде рациональных функций. Особенности применяемого метода позволяют строить приближение любой заданной точности.

Цель работы

Работа продолжает цикл статей, посвященных исследованию возможностей многослойных методов построения приближённых решений дифференциальных уравнений, впервые рассмотренных в [7]. В качестве задачи выбрана классическая проблема аппроксимации функций Бесселя, которая остается актуальной и по сей день. Рассмотрены результаты применения метода для различных базовых рекуррентных соотношений, основанных на классических численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Результат сравнивается с усеченным степенным разложением. Кроме того, исследуется влияние на результат выбора оптимальной стартовой точки при построении многослойной аппроксимации.

Методы

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

где x принадлежит отрезку $[x_0; x_0 + a]$. В качестве базовых методов для построения многослойного решения рассматриваются различные классические итерационные численные методы, такие как различные вариации метода Эйлера, как явные, так и неявные, методы Адамса, Рунге-Кутты, средней точки для уравнений первого порядка, а также метод Штёрмера при постановке задачи в виде краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка [26].

Применяя данные методы к интервалу с переменным верхним пределом $[x_0; x] \subset [x_0; x_0 + a]$, получим итерационную систему уравнений

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1})$$

$$\mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0, \ \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(x),$$

где $h_k = h_k(x)$ - некоторое разбиение рассматриваемого интервала, оператор F определяет конкретный численный метод.

Разбиение h_k, $k = 1, \ldots, n$, таким образом, определяет число слоев n многослойного приближённого функционального решения $\mathbf{y}_n(x)$ задачи (1). Очевидно, что известные оценки точности используемого базового численного метода позволяют получить равномерные оценки точности решения $\mathbf{y}_n(x)$.

Результаты вычислительных экспериментов

Далее изложенный выше подход применяется для построения приближённых функциональных решений на примере дифференциального уравнения Бесселя вида

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{2}$$

на промежутке $[0; l]$. Результаты вычислительных экспериментов приведены в данной статье для $l = 10$.

После замены $y = x^{\nu} u$ уравнение (2) приводится к виду

$$u'' + \frac{(1 + 2\nu) u'}{x} + u = 0 \,. \tag{3}$$

Для уравнения (3) будем решать задачу Коши $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Точное решение этой задачи выражается через функцию Бесселя $J_{\nu}(x) = \dfrac{x^{\nu} u(x)}{2^{\nu} \Gamma(\nu + 1)}$, приближение которой и будет построено далее.

Для применения указанных выше многослойных методов интегрирования дифференциальных уравнений преобразуем уравнение (3) второго порядка в систему первого порядка

$$\begin{cases} u' = z, \\ z' = -\dfrac{(1 + 2\nu)}{x} z - u. \end{cases} \tag{4}$$

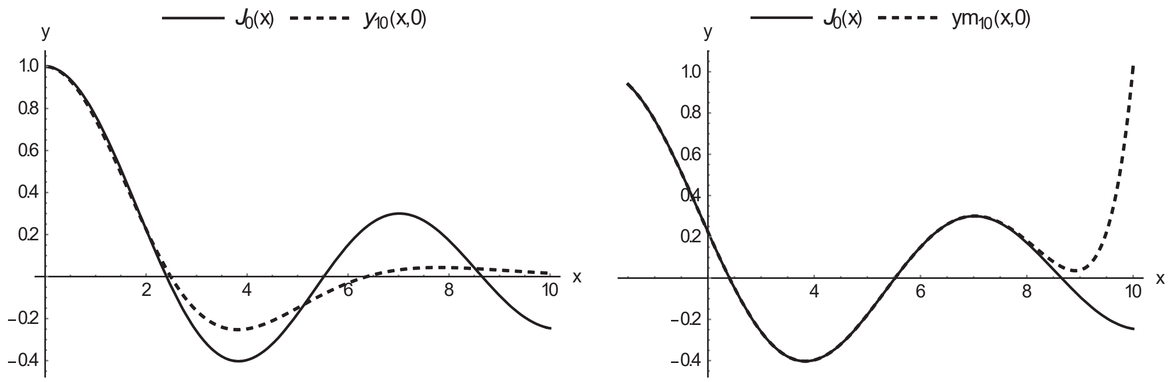
В качестве разбиения интервала с переменным правым концом рассмотрим равномерное разбиение $h_k = x/n$.
Так как уравнение (3) имеет особенность при $x = 0$, проще всего применить к нему неявный метод Эйлера, для которого оператор F имеет вид $F(\mathbf{f}, h_k, x_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = h_k \mathbf{f}(x_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$. Тогда систему (4) можно преобразовать к системе рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} u_k = u_{k-1} + h_k z_k, \\ z_k = z_{k-1} - h_k \left(\dfrac{(1+2\nu)}{x_k} z_k + u_k \right). \end{cases} \tag{5}$$

Подставляя первое равенство во второе и учитывая, что $h_k = x/n$, $x_k = kx/n$, получаем

$$z_k = n(nz_{k-1} - xu_{k-1})/(n^2 + n^2(1+2\nu)/k + x^2), \quad u_k = u_{k-1} + xz_k/n.$$

Рис. 1 иллюстрирует качество приближений, построенных для $J_0(x)$ по многослойному методу с базовым неявным методом Эйлера для 10 слоев и по усечению степенного ряда соответствующего порядка. Очевидно, что многослойное решение имеет более равномерный характер приближения, а формула Маклорена дает большое отклонение в конце рассматриваемого промежутка.

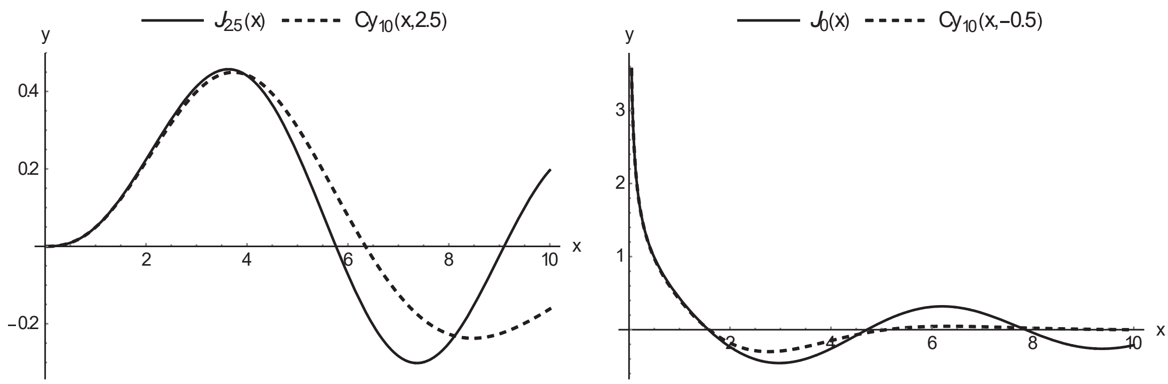


a) b)

Р и с. 1. Графики функции Бесселя $J_0(x)$ и приближённых решений (2), построенных а) по неявному методу Эйлера и b) разложением в ряд Маклорена при $n = 10$

F i g. 1. Graphs of the Bessel function $J_0(x)$ and approximate solutions (2), constructed a) using the implicit Euler method and b) expansion in a Maclaurin series for $n = 10$

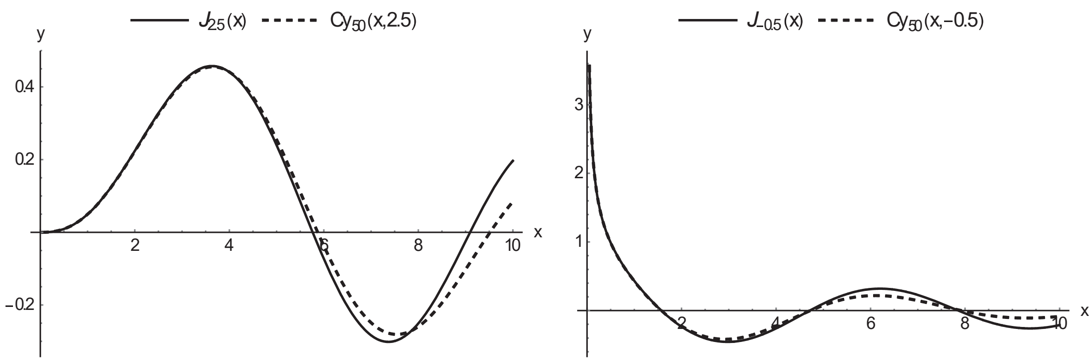
Одним из главных преимуществ нашего метода является возможность построения единого параметрического приближения для функций Бесселя разных порядков. Такие решения представлены на рис. 2 для полуцелых отрицательного и положительного порядков в случае десятислойной аппроксимации. Как уже было отмечено, использование классических методов как базовых позволяет построить сколь угодно точное приближенное решение путем выбора необходимого числа слоев метода. Рис. 3 иллюстрирует уменьшение ошибки для полуцелых порядков при увеличении числа слоев с 10 до 50 по сравнению с рис. 2. На рис.4 представлен аналогичный результат для $J_0(x)$.



a) b)

Р и с. 2. Графики функций Бесселя $J_\nu(x)$ и приближённых решений (2), построенных по неявному методу Эйлера при $n = 10$ для a) $\nu = 2.5$ и b) $\nu = -0.5$

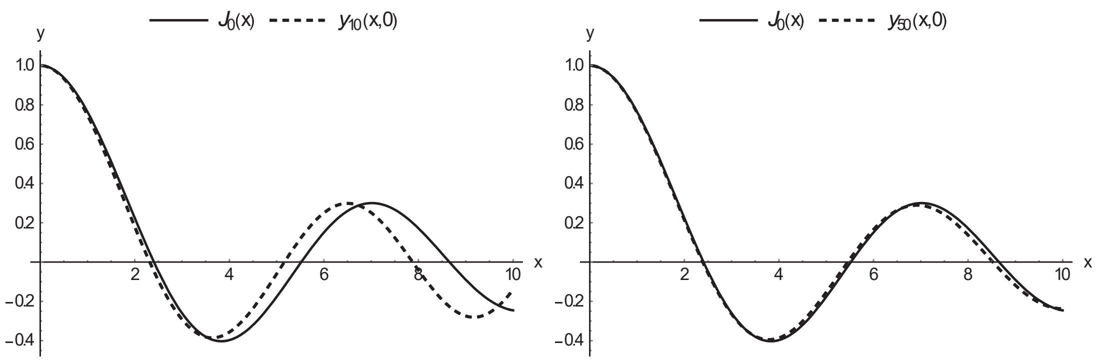
F i g. 2. Graphs of the Bessel function $J_\nu(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for $n = 10$ for a) $\nu = 2.5$ and b) $\nu = -0.5$



a) b)

Р и с. 3. Графики функций Бесселя $J_v(x)$ и приближённых решений (2), построенных по неявному методу Эйлера при $n = 50$ для a) $v = 2.5$ и b) $v = -0.5$

F i g. 3. Graphs of the Bessel function $J_v(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for $n = 50$ for $v = 2.5$ and b) $v = -0.5$



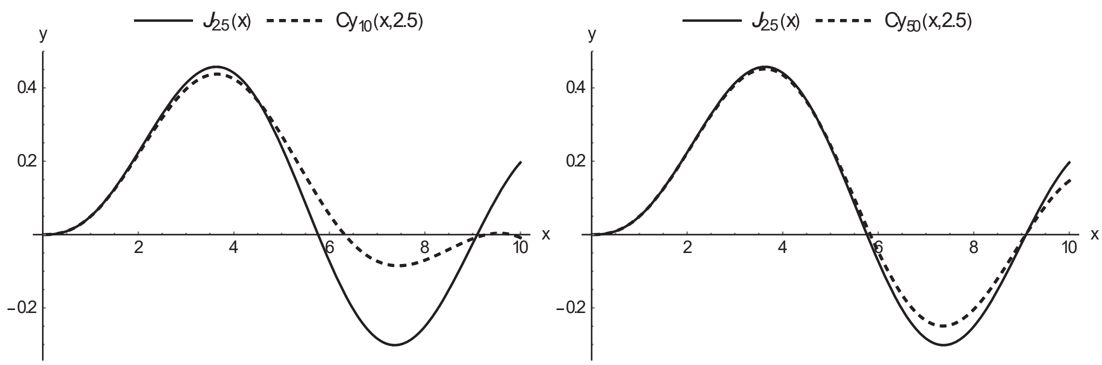
a) b)

Р и с. 4. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и приближённых решений (2), построенных по явному методу Эйлера при a) $n = 10$ и b) $n = 50$

F i g. 4. Graphs of the Bessel function $J_0(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for a) $n = 10$ and b) $n = 50$

Далее представлены результаты применения явного метода. В этом случае будем считать, что $\frac{z}{x}(0) = z'(0)$, откуда $\frac{z}{x}(0) = -\frac{1}{2(1+v)}$.

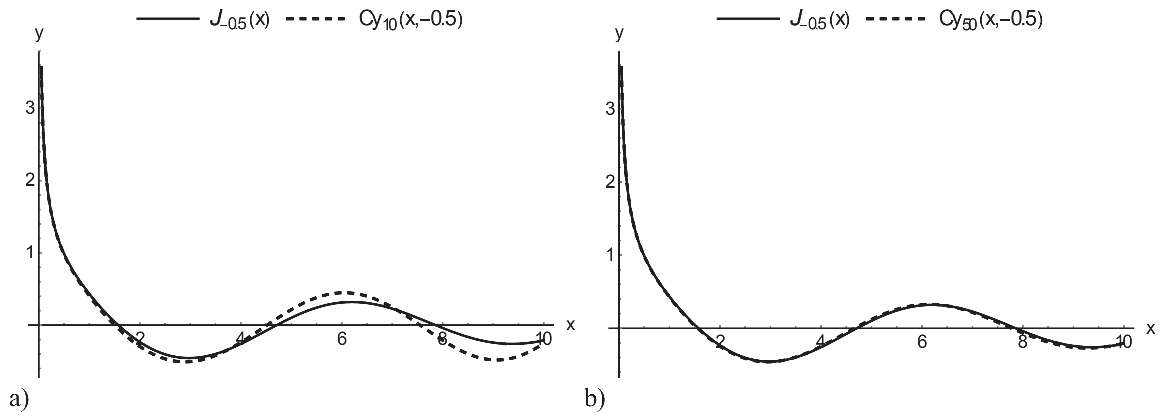
Рис. 5-6 иллюстрируют возрастание точности приближения при увеличении числа слоев и для явной схемы.



a) b)

Р и с. 5. Графики функций Бесселя $J_v(x)$ для $v = 2.5$ и приближённых решений (2), построенных по явному методу Эйлера при a) $n = 10$ и b) $n = 50$

F i g. 5. Graphs of the Bessel function $J_v(x)$ for $v = 2.5$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for a) $n = 10$ and b) $n = 50$



Р и с. 6. Графики функций Бесселя $J_\nu(x)$ для $\nu=-0.5$ и приближённых решений (2), построенных по явному методу Эйлера при а) $n=10$ и b) $n=50$

F i g. 6. Graphs of the Bessel function $J_\nu(x)$ for $\nu=-0.5$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for a) $n=10$ and b) $n=50$

Как было заявлено, мы продолжаем исследование влияния выбора оптимальной (в смысле ошибки) начальной точки на точность аппроксимации многослойными методами. Сдвинем начальную точку x_0 в некоторое положение на промежутке $[0;10]$. Это, кроме того, позволяет применить к системе (4) явные методы. Применение явного метода Эйлера приводит к замене формул (5) рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} u_{k+1}=u_k+h_{k-1}z_k, \\ z_{k+1}=z_k-h_{k-1}\left(\dfrac{(1+2\nu)}{x_k}z_k+u_k\right). \end{cases} \quad (6)$$

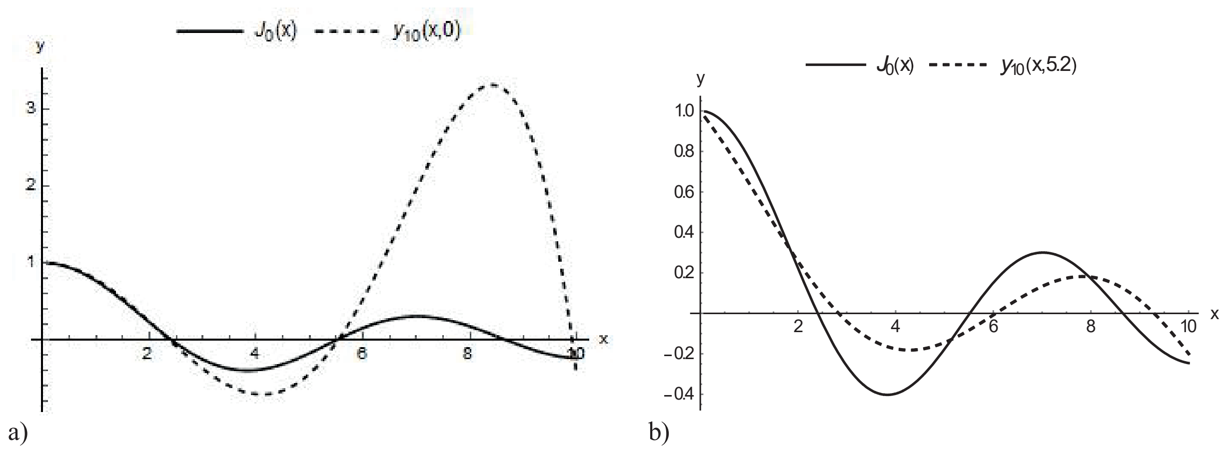
Учитывая, что $h_k=x/n$, $x_k=kx/n$, получаем

$$\begin{cases} u_{k+1}=u_k+\dfrac{x-x_0}{n}z_k, \\ z_{k+1}=z_k-(x-x_0)\left(\dfrac{(1+2\nu)}{kx+(n-k)x_0}z_k+u_k\right). \end{cases} \quad (7)$$

Удовлетворение начальных условий приводит к равенствам $u_n(0)=1$, $z_n(0)=0$. Для нахождения постоянных u_0 и z_0 подставим $x=0$ в соотношения (7). Решаем получившуюся систему относительно $u_k(0)$ и $z_k(0)$. При $\nu=0$ получаем

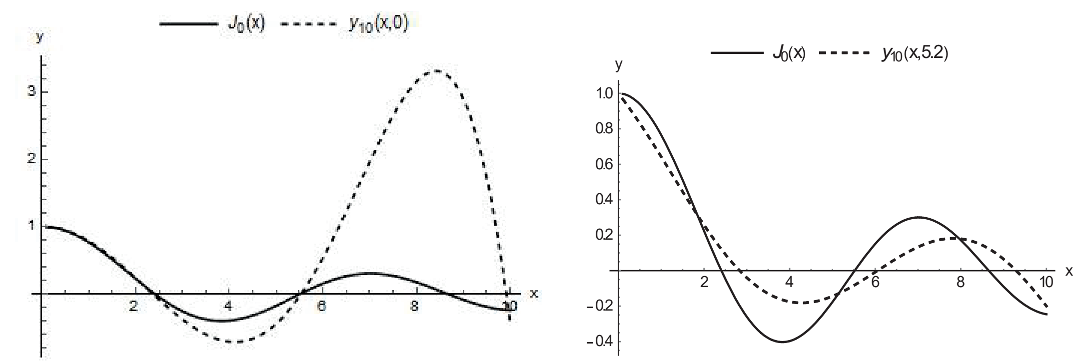
$$\begin{cases} u_k(0)=\dfrac{u_{k+1}(0)\left(1+\dfrac{1}{n-k}\right)+\dfrac{x_0}{n}z_{k+1}(0)}{1+\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{x_0^2}{n^2}}, \\ z_k(0)=\dfrac{z_{k+1}(0)-\dfrac{x_0}{n}u_{k+1}(0)}{1+\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{x_0^2}{n^2}}. \end{cases} \quad (8)$$

Вычислительный процесс разбивается на два этапа. Сперва вычисляем по формулам (8) от $k=n-1$ до $k=0$, потом по формулам (7) от $k=0$ до $k=n-1$.



Р и с. 7. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и приближённых решений (2), построенных по явному методу Эйлера при $n=10$ для а) $x_0=0$ и b) $x_0=5.2$

F i g. 7. Graphs of the Bessel function $J_0(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for $n=10$ for a) $x_0=0$ and b) $x_0=5.2$



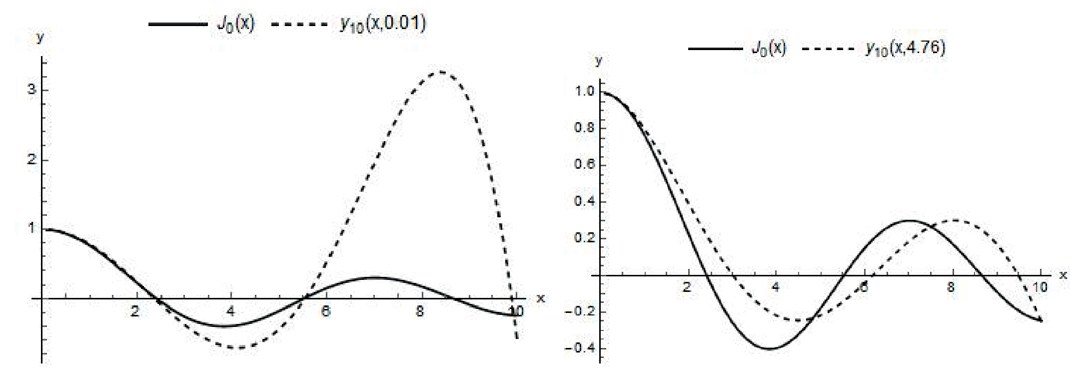
a) b)

Р и с. 8. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и приближённых решений (2), построенных по явному методу Эйлера при $n = 50$ для a) $x_0 = 0$ и b) $x_0 = 5.2$

F i g. 8. Graphs of the Bessel function $J_0(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for $n = 50$ for a) $x_0 = 0$ and b) $x_0 = 5.2$ 2

Для построения приближённого решения можно воспользоваться технически более простым подходом. Для этого построим два решения, исходя из соотношений (7) с двумя начальными значениями $u_{1,n}(x)$ с $u_0 = 1$, $z_0 = 0$ и $u_{2,n}(x)$ с $u_0 = 0$, $z_0 = 1$.

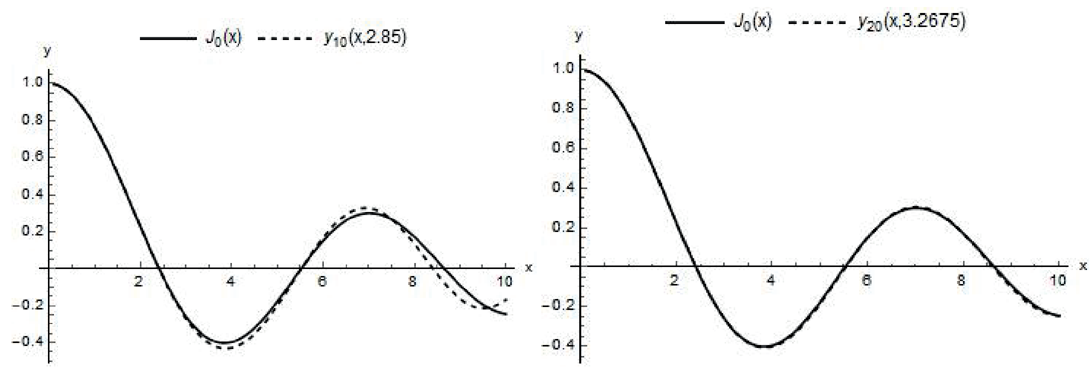
После этого строим искомое решение в виде линейной комбинации $u_n(x) = c_1 u_{1,n}(x) + c_2 u_{2,n}(x)$; константы c_1, c_2 подбираем исходя из условий $u_n(0) = 1$, $u_n'(0) = 0$.



a) b)

Р и с. 9. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и приближённых решений (2), построенных по явному методу Эйлера при $n = 10$ a) для $x_0 = 0.01$ и b) для оптимальной начальной точки $x_0 = 4.76$

F i g. 9. Graphs of the Bessel function $J_0(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for $n = 10$ a) for $x_0 = 0.01$ and b) for the optimal starting point $x_0 = 4.76$



a) b)

Р и с. 10. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и приближённых решений (2), построенных по уточнённому методу Эйлера для оптимальной начальной точки a) при $n = 10$, $x_0 = 2.85$ и b) при $n = 20$, $x_0 = 3.2675$

F i g. 10. Graphs of the Bessel function $J_0(x)$ and approximate solutions (2), constructed using the implicit Euler method for the optimal starting point a) for $n = 10$, $x_0 = 2.85$ and b) for $n = 20$, $x_0 = 3.2675$

Так же, как и в предыдущих случаях, с ростом числа слоёв точность увеличивается.
Улучшает результаты применение более точных методов. Так, применение уточнённого метода Эйлера [5] приводит к замене соотношений (7) рекуррентными формулами:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_{k-1} + 2\dfrac{x-x_0}{n} z_k, \\ z_{k+1} = z_{k-1} - 2(x-x_0)\left(\dfrac{(1+2\nu)}{kx+(n-k)x_0} z_k + u_k\right). \end{cases} \quad (9)$$

Для этого метода на рис. 10 приведены результаты для 10 и 20 слоёв. В связи с особенностями формул (9) сложность получающегося решения для данного метода примерно совпадает со сложностью решения, полученного по методу Эйлера с половинным числом слоёв. Решение с начальной точкой в окрестности начала координат получается совершенно неудовлетворительным, поэтому не приводится. Так же, как и в предыдущих случаях, с ростом числа слоёв точность увеличивается.
Заметим, что при $n=10$ получается вполне обозримое решение в виде рациональной функции

$$\begin{aligned}
&(6.93*10\wedge 22 + 3.47*10\wedge 23x + 7.37*10\wedge 23x^2 + \\
&+8.73*10\wedge 23x^3 + 6.23*10\wedge 23x^4 + 2.53*10\wedge 23x^5 + \\
&+2.83*10\wedge 22x^6 - 3.09*10\wedge 22x^7 - 2.15*10\wedge 22x^8 - \\
&-7.21*10\wedge 21x^9 - 1.33*10\wedge 21x^{10} - 6.04*10\wedge 19x^{11} + \\
&+3.99*10\wedge 19x^{12} + 1.26*10\wedge 19x^{13} + 1.79*10\wedge 18x^{14} + \\
&+7.35*10\wedge 16x^{15} - 2.21*10\wedge 16x^{16} - 5.06*10\wedge 15x^{17} - \\
&-4.73*10\wedge 14x^{18} - 4.433*10\wedge 12x^{19} + 4.58*10\wedge 12x^{20} + \\
&+6.1*10\wedge 11x^{21} + 3.29*10\wedge 10x^{22} - 7.64*10\wedge 8x^{23} - \\
&-2.77*10\wedge 8x^{24} - 2.22*10\wedge 7x^{25} - 758*10\wedge 3x^{26} + \\
&+19100x^{27} + 3910x^{28} + 249x^{29} + 9.96x^{30} + 0.273x^{31} + \\
&+0.0052x^{32} + 0.0000662x^{33} + 5.08*10\wedge -7x^{34} + \\
&+1.78*10\wedge -9x^{35}) / (6.93*10\wedge 22 + 3.47*10\wedge 23x + \\
&+7.54*10\wedge 23x^2 + 9.59*10\wedge 23x^3 + 8.09*10\wedge 23x^4 + \\
&+4.87*10\wedge 23x^5 + 2.18*10\wedge 23x^6 + 7.51*10\wedge 22x^7 + \\
&+2.03*10\wedge 22x^8 + 4.39*10\wedge 21x^9 + 7.67*10\wedge 20x^{10} + \\
&+1.09*10\wedge 20x^{11} + 1.27*10\wedge 19x^{12} + 1.22*10\wedge 18x^{13} + \\
&+9.61*10\wedge 16x^{14} + 6.21*10\wedge 15x^{15} + 3.28*10\wedge 14x^{16} + \\
&+1.41*10\wedge 13x^{17} + 4.84*10\wedge 11x^{18} + 1.32*10\wedge 10x^{19} + \\
&+2.76*10\wedge 8x^{20} + 4.29*10\wedge 6x^{21} + 46600x^{22} + 315x^{23} + x^{24})
\end{aligned}$$

Заключение

В данной статье успешно применен универсальный метод построения многослойных приближённых решений дифференциальных уравнений, основанных на классических итерационных формулах, к решению задачи аналитической аппроксимации функций Бесселя первого рода. Особенности метода позволяют построить сколь угодно точные приближения. Кроме того, точность приближения может быть увеличена при сохранении меньшего числа слоев путем использования оптимальной стартовой точки для многослойной схемы. Одним из преимуществ рассматриваемого метода является естественная возможность построения единой параметрической аппроксимации для функций Бесселя разных порядков.

Список использованных источников

[1] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977.

[2] Harrison, J. Fast and Accurate Bessel Function Computation / J. Harrison. — DOI 10.1109/ARITH.2009.32 // 2009 19th IEEE Symposium on Computer Arithmetic. — Portland, OR, 2009. — Pp. 104-113. — URL: https://ieeexplore. ieee. org/document/5223347 (дата обращения: 02.09.2020).

[3] Kadri, U. Multiple-location matched approximation for Bessel function J0 and its derivatives / U. Kadri. — DOI 10.1016/j. cnsns.2018.12.005 // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — Vol. 72. — Pp. 59-63. — URL: https://www. sciencedirect. com/science/article/pii/S1007570418303812 (дата обращения: 02.09.2020).

[4] Maass, F. Precise analytic approximations for the Bessel function J1(x) / F. Maass, P. Martin. — DOI 10.1016/j. rinp.2018.01.071 // Results in Physics. — 2018. — Vol. 8. — Pp. 1234-1238. — URL: https://www. sciencedirect. com/science/article/pii/S2211379718300111 (дата обращения: 02.09.2020).

[5] Martin, P. Analytic approximations for special functions, applied to the modified Bessel functions I2(x) and I2/3(x) / P. Martin, J. Olivares, F. Maass, E. Valero. — DOI 10.1016/j. rinp.2018.10.029 // Results in Physics. — 2018. — Vol. 11. — Pp. 1028-1033. — URL: https://www. sciencedirect. com/science/article/pii/S2211379718320771 (дата обращения: 02.09.2020).

[6] Maass, F. Analytic approximation to Bessel function J0(x) / F. Maass, P. Martin, J. Olivares. — DOI 10.1007/s40314-020-01238-z // Computational and Applied Mathematics. — 2020. — Vol. 39, Issue 3. — Article number: 222. — URL: https://link. springer. com/article/10.1007/s40314-020-01238-z (дата обращения: 02.09.2020).

[7] Lazovskaya, T. Multilayer neural network models based on grid methods / T. Lazovskaya, D. Tarkhov. — DOI 10.1088/1757-899X/158/1/012061 // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. — Pp. 012061. — URL: https://iopscience. iop. org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012061 (дата обращения: 02.09.2020).

[8] Васильев, А. Н. Многослойные нейросетевые модели процессов деформации и разрушения образцов на основе экспериментальных данных / А. Н. Васильев, Д. А. Тархов, И. П. Болгов, Т. Т. Каверзнева, С. А. Колесова, Т. В. Лазовская, Е. В. Лукинский, А. А. Петров, В. М. Филькин // CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016). — 2016. — Vol. 1763. — Pp. 6-14. — URL: http://ceur-ws. org/Vol-1763/paper01.pdf (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[9] Тархов, Д. А. Приближенные аналитические решения уравнения Матьё, построенные на основе классиче-

ских численных методов / Д. А. Тархов, Е. А. Шершнева // CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016). — 2016. — Vol. 1761. — Pp. 356-362. — URL: http://ceur-ws. org/Vol-1761/paper46.pdf (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[10] Васильев, А. Н. Приближенные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Васильев, Д. А. Тархов, Т. А. Шемякина // CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016). — 2016. — Vol. 1761. — Pp. 393-400. — URL: http://ceur-ws. org/Vol-1761/paper50.pdf (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[11] Tarkhov, D. Semi-empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development / D. Tarkhov, A. Vasilyev. — DOI 10.1016/C2017-0-02027-X // Academic Press, Elsevier, 2020. — 288 pp. — URL: https://www. sciencedirect. com/book/9780128156513/semi-empirical-neural-network-modeling-and-digital-twins-development (дата обращения: 02.09.2020).

[12] Kuznetsov, E. B. Multilayer method for solving a problem of metals rupture under creep conditions / E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, D. A. Tarkhov, A. N. Vasilyev. — DOI 10.2298/TSCI19S2575K // Thermal Science. — 2019. — Vol. 23, Issue Suppl. 2. — Pp. 575-582. — URL: http://www. doiserbia. nb. rs/Article. aspx? id=0354-983619575K (дата обращения: 02.09.2020).

[13] Будкина, Е. М. Сравнение решений жёсткой задачи на сфере многослойным методом и методом продолжения по наилучшему параметру / Е. М. Будкина, Е. Б. Кузнецов, Д. А. Тархов, А. А. Гомзина, С. Д. Мальцев. — DOI 10.25559/SITITO.14.201803.533-541 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2018. — Т. 14, № 3. — С. 533-541. — URL: https://elibrary. ru/item. asp? id=37031830 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[14] Кузнецов, Е. Б. Численные методы решения задач с контрастными структурами / Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов, Д. А. Тархов, Е. Д. Цапко, А. А. Бабинцева. — DOI 10.25559/SITITO.14.201803.542-551 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2018. — Т. 14, № 3. — С. 542-551. — URL: https://elibrary. ru/item. asp? id=37031831 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[15] Картавченко, А. Е. Сравнение методов построения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений на примере элементарных функций / А. Е. Картавченко, Д. А. Тархов. — DOI 10.25559/SITITO.2017.3.440 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2017. — Т. 13, № 3. — С. 16-23. — URL: https://elibrary. ru/item. asp? id=30725822 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[16] Тархов, Д. А. Применение приближённых многослойных методов решения дифференциальных уравнений к задаче стабилизации перевёрнутого маятника / Д. А. Тархов, А. Д. Суббота, И. Ю. Суриков // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — Сборник научных трудов II Международной научной конференции и XII Международной научно-практической конференции / Под редакцией В. А. Сухомлина. — М.: МАКС-Пресс, 2017. — С. 57-67. — URL: https://elibrary. ru/item. asp? id=32661941 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[17] Васильев, А. Н. Многослойные нейросетевые модели процессов деформации и разрушения образцов на основе экспериментальных данных / А. Н. Васильев, Д. А. Тархов, И. П. Болгов, Т. Т. Каверзнева, С. А. Колесова, Т. В. Лазовская, Е. В. Лукинский, А. А. Петров, В. М. Филькин // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2016. — Т. 12, № 1. — С. 6-14. — URL: https://www. elibrary. ru/item. asp? id=27539212 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[18] Тархов, Д. А. Приближенные аналитические решения уравнения Матьё, построенные на основе классических численных методов / Д. А. Тархов, Е. А. Шершнева // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2016. — Т. 12, № 3-1. — С. 202-208. — URL: https://www. elibrary. ru/item. asp? id=27411993 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[19] Васильев, А. Н. Нейросетевой подход в информационном процессе прогнозирования загрязнения торфяным пожаром воздуха в районе автомагистрали / А. Н. Васильев, В. Н. Ложкин, О. В. Ложкина, Д. А. Тархов, В. Д. Тимофеев // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2016. — Т. 12, № 3-2. — С. 181-187. — URL: https://www. elibrary. ru/item. asp? id=27705974 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[20] Васильев, А. Н. Приближенные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Васильев, Д. А. Тархов, Т. А. Шемякина // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2016. — Т. 12, № 3-2. — С. 188-195. — URL: https://www. elibrary. ru/item. asp? id=27705975 (дата обращения: 02.09.2020). — Рез. англ.

[21] Kaverzneva, T. T. From Differential Equations to Multilayer Neural Network Models / T. T. Kaverzneva, G. F. Malykhina, D. A. Tarkhov. — DOI 10.1007/978-3-030-22796-8_3 // Advances in Neural Networks — ISNN 2019. ISNN 2019. Lecture Notes in Computer Science; H. Lu, H. Tang, Z. Wang (ed.) Springer, Cham. — 2019. — Vol. 11554. — Pp. 19-27. — URL: https://link. springer. com/chapter/10.1007/978-3-030-22796-8_3 (дата обращения: 02.09.2020).

[22] Zulkarnay, I. U. A Two-layer Semi Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam / I. U. Zulkarnay, T. T. Kaverzneva, D. A. Tarkhov, V. A. Tereshin, T. V. Vinokhodov, D. R. Kapitsin. — DOI 10.1088/1742-6596/1044/1/012005 // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2017 IMEKO TC1-TC7-TC13 Joint Symposium. — 2018. — Vol. 1044. — Pp. 012005. — URL: https://iopscience. iop. org/article/10.1088/1742-6596/1044/1/012005 (дата обращения: 02.09.2020).

[23] Vasilyev, A. N. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging / A. N. Vasilyev, D. A. Tarkhov, V. A. Tereshin, M. S. Berminova, A. R. Galyautdinova. — DOI 10.1007/978-3-319-66604-4_21 // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence; B. Kryzha-

novsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (ed.). Springer, Cham. — 2018. — Vol. 736. — Pp. 138-144. — URL: https://link. springer. com/chapter/10.1007/978-3-319-66604-4_21 (дата обращения: 02.09.2020).

[24] Lazovskaya, T. Multi-Layer Solution of Heat Equation / T. Lazovskaya, D. Tarkhov, A. Vasilyev. — DOI 10.1007/978-3-319-66604-4_3 // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence; B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (ed.). — Springer, Cham. — 2018. — Vol. 736. — Pp. 17-22. — URL: https://link. springer. com/chapter/10.1007/978-3-319-66604-4_3 (дата обращения: 02.09.2020).

[25] Takhov, D. A. Semiempirical Model of the Real Membrane Bending / D. A. Takhov, M. R. Bortkovskaya, T. T. Kaverzneva, D. R. Kapitsin, I. A. Shishkina, D. A. Semenova, P. P. Udalov, I. U. Zulkarnay // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research II. NEUROINFORMATICS 2018. Studies in Computational Intelligence; B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko, Y. Tiumentsev (ed.). Springer, Cham. — 2019. — Vol. 799. — Pp. 221-226. — URL: https://link. springer. com/chapter/10.1007/978-3-030-01328-8_26 (дата обращения: 02.09.2020).

[26] Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Оникс 21 век, 2005. — 400 с.

Поступила 02.09.2020; принята к публикации 20.09.2020; опубликована онлайн 30.09.2020.

Об авторах:

Васильев Александр Николаевич, профессор кафедры высшей математики, Институт прикладной математики и механики, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0227-0162, a.n.vasilyev@gmail.com

Лазовская Татьяна Валерьевна, магистр прикладной математики и механики, старший преподаватель кафедры высшей математики, Институт прикладной математики и механики, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3324-6213, tatianala@list.ru

Тархов Дмитрий Альбертович, профессор кафедры высшей математики, Институт прикладной математики и механики, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9431-8241, dtarkhov@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravnenija matematicheskoj fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka; 1977. (In Russ.)

[2] Harrison J. Fast and Accurate Bessel Function Computation. In: *2009 19th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*. Portland, OR; 2009. p. 104-113. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/ARITH.2009.32

[3] Kadri U. Multiple-location matched approximation for Bessel function J_0 and its derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019; 72:59-63. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.12.005

[4] Maass F., Martin P. Precise analytic approximations for the Bessel function $J_1(x)$. *Results in Physics*. 2018; 8:1234-1238. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.01.071

[5] Martin P., Olivares J., Maass F., Valero E. Analytic approximations for special functions, applied to the modified Bessel functions $I_2(x)$ and $I_{2/3}(x)$. *Results in Physics*. 2018; 11:1028-1033. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.10.029

[6] Maass F., Martin P., Olivares J. Analytic approximation to Bessel function $J_0(x)$. *Computational and Applied Mathematics*. 2020; 39(3):222. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s40314-020-01238-z

[7] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* 2016; 158:012061. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012061

[8] Vasilyev A., Tarkhov D., Bolgov I., Kaverzneva T., Kolesova S., Lazovskaya T., Lukinskiy E., Petrov A., Filkin V. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction. In: *CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016).* 2016; 1763:6-14. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[9] Tarkhov D., Shershneva E. Approximate analytical solutions of Mathieu's equations based on classical numerical methods. In: *Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016.)* 2016; 1761: 356-362. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[10] Vasilyev A., Tarkhov D., Shemyakina T. Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. In: *CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016).* 2016; 1761:393-400. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[11] Tarkhov D., Vasilyev A. Semi-empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development. Academic Press, Elsevier; 2020. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/C2017-0-02027-X

[12] Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Multilayer method for solving a problem of metals rupture under creep conditions. *Thermal Science*. 2019; 23(S 2):575-582. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.2298/TSCI19S2575K

[13] Budkina E.M., Kuznetsov E.B., Tarkhov D.A., Gomzina A.A., Maltsev S.D. Comparison of solving a stiff equation on a sphere by the multi-layer method and method of continuing at the best parameter. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2018; 14(3):533-541. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.533-541

[14] Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Tsapko E.D., Babintseva A.A. Numerical methods for solving problems with contrast structures. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2018; 14(3):542-551. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.542-551

[15] Kartavchenko A.E., Tarkhov D.A. Comparison of methods of construction of approximate analytical solutions of differential equations considering on the example of elementary functions. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2017; 13(3):16-23. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.2017.3.440

[16] Tarkhov D.A., Subbota A.D. Surikov I.Yu. The use of multilayer approximate methods of solving differential equations to the problem of stabilization of an inverted pendulum. In: V. A. Sukhomlin (ed.) *Proceedings of the II International Scientific Conference and the XII International Scientific and Practical Conference*. Moscow, MAKS-Press; 2017. p. 57-67. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=32661941 (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[17] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Bolgov I.P., Kaverzneva T.T., Kolesova S.A., Lazovskaya T.V., Lukinsky E.V., Petrov A.A., Filkin V.M. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2016; 12(1):6-14. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27539212 (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[18] Tarkhov D.A., Shershneva E.A. Approximate analytical solutions of Mathieu's equations based on classical numerical methods. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2016; 12(3-1):202-208. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27411993 (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[19] Vasilyev A.N., Lozhkin V.N., Lozhkina O.V., Tarkhov D.A., Timofeev V.D. Neural network approach in information process for predicting highway area air pollution by peat fire. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2016; 12(3-2):181-187. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27705974 (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[20] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2016; 12(3-2):188-195. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27705975 (accessed 02.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[21] Kaverzneva T.T., Malykhina G.F., Tarkhov D.A. From Differential Equations to Multilayer Neural Network Models. In: H. Lu, H. Tang, Z. Wang (ed.) Advances in Neural Networks – ISNN 2019. ISNN 2019. *Lecture Notes in Computer Science*. 2019; 11554:19-27. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-22796-8_3

[22] Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A Two-layer Semi Empirical Model of Nonlinear Bending of the Cantilevered Beam. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2017 IMEKO TC1-TC7-TC13 Joint Symposium*. 2018; 1044:012005. (In Eng.) DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1044/1/012005

[23] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. In: B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (ed.) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. *Studies in Computational Intelligence*. 2018; 736:138-144. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21

[24] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation. In: B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko (ed.) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. *Studies in Computational Intelligence*. 2018; 736:17-22. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_3

[25] Takhov D.A., Bortkovskaya M.R., Kaverzneva T.T., Kapitsin D.R., Shishkina I.A., Semenova D.A., Udalov P.P., Zulkarnay I.U. Semiempirical Model of the Real Membrane Bending. In: B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko, Y. Tiumentsev (ed.) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research II. NEUROINFORMATICS 2018. *Studies in Computational Intelligence*. 2019; 799:221-226. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-01328-8_26

[26] Verzhbitsky V.M. *Chislennye metody. Matematicheskij analiz i obyknovennye differencial'nye uravnenija* [Numerical methods. Mathematical analysis and ordinary differential equations]. Moscow, Onyx 21st Century; 2005. (In Russ.)

Submitted 02.09.2020; revised 20.09.2020; published online 30.09.2020.

About the authors:

Alexander N. Vasilyev, Professor of the Higher Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia), Dr.Sci. (Engineering), Associate Professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0227-0162, a.n.vasilyev@gmail.com

Tatyana V. Lazovskaya, Master of Applied Mathematics and Mechanics, Senior Lecturer of the Higher Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3324-6213, tatianala@list.ru

Dmitriy A. Tarkhov, Professor of the Higher Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), Dr.Sci. (Engineering), Associate Professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9431-8241, dtarkhov@gmail.com

All authors have read and approved the final manuscript.