

УДК 517.958

DOI: 10.25559/SITITO.16.202002.449-459

Задача об исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды

Д. В. Беляков

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

125993, Россия, г. Москва, ш. Волоколамское, д. 4

dimbel@rambler.ru

Аннотация

Работа посвящена построению и исследованию математической модели автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды. В качестве модели воздействия среды на тело принята модель квазистатического обтекания пластинки средой. Согласно этой гипотезе, аэродинамические силы, действующие на тело, прикладываются в центре давления. В рассматриваемой задаче центр давления является подвижным относительно пластинки. Получены уравнения движения для рассматриваемого тела. Проведен переход к новым безразмерным переменным. Показано нарушение единственности при определении угла атаки. Проведен параметрический анализ областей неоднозначности. Найдены все стационарные точки, являющиеся решениями уравнений равновесия. Показано, что в наиболее характерном положении равновесия, соответствующем состоянию покоя областей неоднозначности нет. Проведено исследование устойчивости различных положения равновесия, в которых реализован критерий Гурвица и изображены области устойчивости. Показано, что силы аэродинамического воздействия для тел с одними формами могут способствовать развитию автоколебаний, а для других затуханию. В математическом пакете MATLAB 18 написан комплекс программ, позволяющий строить области устойчивости и проводить численное интегрирование уравнений, описывающих колебания тела, для того, чтобы подтвердить адекватность построенной модели.

Ключевые слова: тело, стационарный режим, устойчивость, область устойчивости флаттер.

Для цитирования: Беляков, Д. В. Задача об исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды / Д. В. Беляков. – DOI 10.25559/SITITO.16.202002.449-459 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 2. – С. 449-459.

© Беляков Д. В., 2020



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



The Problem of Studying the Self-Oscillations of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Medium

D. V. Belyakov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia
dimbel@rambler.ru

Abstract

The paper is devoted to the construction and research of a mathematical model of self-oscillations of an aerodynamic pendulum in the flow of a medium. As a model of the influence of the medium on the body, the model of quasi-static flow around the plate by the medium is adopted. According to this hypothesis, the aerodynamic forces acting on the body are applied at the center of pressure. In this problem, the center of pressure is mobile relative to the plate. The equations of motion for the body under consideration are obtained. The transition to new dimensionless variables is performed. Violation of uniqueness in determining the angle of attack is shown. Parametric analysis of ambiguity areas is performed. All stationary points that are solutions of the equilibrium equations are found. It is shown that there is no ambiguity in the most characteristic equilibrium position corresponding to the state of rest. A study of the stability of various equilibrium positions in which the Hurwitz criterion is implemented and the stability regions are depicted. It is shown that the forces of aerodynamic action for bodies with some shapes can contribute to the development of self-oscillations, and for others to damping. In the MATLAB 18 mathematical package, a set of programs is written that allows you to build stability regions and perform numerical integration of equations describing body vibrations in order to confirm the adequacy of the constructed model.

Keywords: body, stationary mode, stability, stability region, flutter.

For citation: Belyakov D.V. The Problem of Studying the Self-Oscillations of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Medium. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(2):449-459. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>



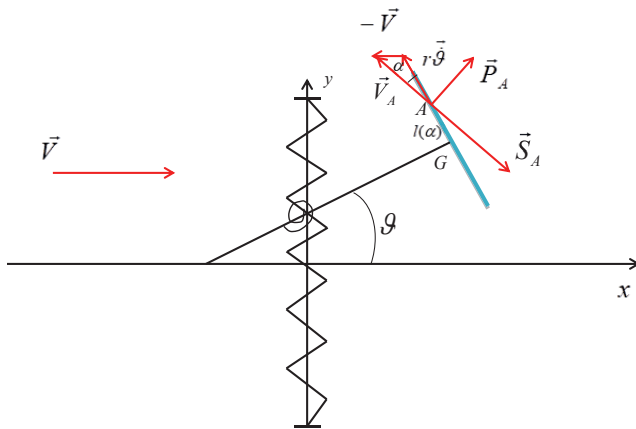
Введение

Под флаттером в широком смысле понимают самовозбуждающиеся колебания упругой системы в потоке. Эти колебания возникают, если энергия, получаемая за цикл колебаний от потока, превышает затраты энергии, необходимые для преодоления конструкционного демпфирования. Амплитуда этих колебаний может увеличиваться столь быстро, что за несколько циклов колебаний в конструкции возникают деформации, опасные для её прочности. Колебания начинаются с определённой скорости потока, которую принято называть критической скоростью, или скоростью флаттера. При детальном изучении флаттера почти во всех случаях обнаруживаются нелинейные аэродинамические эффекты. Однако в ряде ситуаций оказалось возможным успешно решить задачу с помощью методов теории устойчивости по первому приближению. Рассмотрим одну модельную задачу, которая часто обсуждается в литературе, в которой можно использовать такой подход.

Постановка задачи

Рассматривается задача о теле, представляющем из себя тонкую пластинку, установленную ортогонально стержню длины r . Тело закреплено в центре масс с помощью двух упругих элементов и совершает автоколебания в потоке среды (см. рисунок 1). Введем неподвижную систему координат XOY . Будем считать, что в положении покоя маятник занимает положение равновесия, в котором он ориентирован по потоку. Будем считать, что центр масс тела может двигаться только по вертикальной прямой, а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе $F = -kx$ и возвращающему моменту $M = -c\vartheta$.

Аэродинамические силы, приложенные к телу приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины [21-23].



Р и с. 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды
Fig. 1. Oscillations of a body of complex configuration in a medium flow

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку A можно считать подвижной относительно пластинки. Аналогичная задача, только с неподвижным центром давления рассматривалась в работе [1]. Сдвиг центра давления описывается функцией $l(\alpha)$ (см. рис 4 для $\lambda = 8$),

которая описывает расстояние между центром давления A и геометрическим центром пластинки G . Зависимость $l(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными [13]. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила сопротивления \vec{S}_A , направленная против скорости \vec{V}_A точки A относительно потока среды, и подъемная сила \vec{P}_A , направленные ей ортогонально [15]. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2$$

где α - угол атаки между вектором \vec{V}_A и пластинкой p, s - аэродинамические функции углов атаки, A_x, A_y - безразмерные аэродинамические функции (см. рис 2,3 для $\lambda = 8$), ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций для разных форм пластинок приводится в [6]. Будем считать, что среда не влияет на стержень.

Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату y центра масс тела и угол ϑ отклонения пластинки от горизонтали.

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось OY и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$m\ddot{y} = s(\alpha)V_A(l(\alpha)\dot{\vartheta}\sin\vartheta - r\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{y}) - \quad (1)$$

$$- p(\alpha)V_A(r\dot{\vartheta}\sin\vartheta + l(\alpha)\dot{\vartheta}\cos\vartheta + V) - ky$$

$$J\ddot{\vartheta} = rV_A^2\tau(\alpha) - l(\alpha)V_A^2n(\alpha) - c\vartheta$$

где

$$\tau(\alpha) = p(\alpha)\sin\alpha - s(\alpha)\cos\alpha$$

$$n(\alpha) = p(\alpha)\cos\alpha + s(\alpha)\sin\alpha$$

аэродинамические функции нормальной и касательной сил. Кинематические соотношения, связывающие $V_A, \alpha, y, \dot{y}, \vartheta, \dot{\vartheta}$, имеют вид:

$$V_A \sin\alpha = l(\alpha)\dot{\vartheta} - \dot{y}\sin\vartheta + V \cos\vartheta \quad (2)$$

$$V_A \cos\alpha = r\dot{\vartheta} + \dot{y}\cos\vartheta + V \sin\vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(2)

Введем новые безразмерным переменным:

$$Y = \frac{y}{b} \text{ безразмерная координата центра масс (здесь } b \text{ - ширина пластинки)}$$

$$\tau = \frac{V}{b}t \text{ безразмерное время}$$

$$\Omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V} \text{ безразмерная угловая скорость}$$

$$U = \frac{V_A}{V} \text{ безразмерная скорость центра давления}$$

$$M = \frac{mb}{0.5\rho\sigma} \text{ безразмерная масса}$$

$$K = \frac{kb}{0.5\rho\sigma V^2} \text{ безразмерный коэффициент жесткости пружины}$$



$C = \frac{c}{0.5\rho\sigma V^2}$ безразмерный коэффициент восстанавливаю-

щего момента пружины

$I = \frac{J}{0.5\rho\sigma b}$ безразмерный момент инерции

$\varepsilon(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{b}$ безразмерная функция сдвига центра давления

$R = \frac{r}{b}$ безразмерная длина стержня

При переходе к новым безразмерным переменным уравнения (1) преобразуются к виду:

$$M\ddot{Y} = c_x(\alpha)U(R\Omega \cos \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \sin \vartheta - \dot{Y}) + c_y(\alpha)U(R\Omega \sin \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \cos \vartheta + 1) - KY \quad (3)$$

$$I\ddot{\vartheta} = U^2(Rc_r(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)) - C\vartheta$$

$c_n(\alpha)$, $c_r(\alpha)$ изображены на рисунках 5,6 для $\lambda = 8$

После простых преобразований кинематические соотношения (2) будут иметь вид:

$$U \sin \alpha = \varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{Y} \sin \vartheta + \cos \vartheta \quad (4)$$

$$U \cos \alpha = R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (3)-(4)

Неоднозначность определения угла атаки

В уравнения движения (3)-(4) рассматриваемой задачи входят функции $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$, $l(\alpha)$, являющиеся экспериментальными данными. Решение задачи (3)-(4) можно найти только численно. При численном интегрировании уравнений движения, нужно сначала определить угол атаки из соотношений (4). Разделим первое уравнение (4) на второе и, избавляясь от U , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{Y} \sin \vartheta + \cos \vartheta}{R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta} \quad (5)$$

Умножим правую и левую части уравнения (5) на знаменатель $R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta \neq 0$

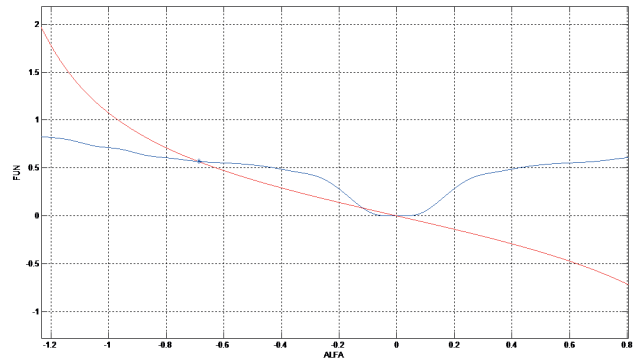
Если знаменатель все-таки обращается в нуль, то тогда может быть потеряно решение $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Получим нелинейное уравнение (6), равносильное соотношению (5):

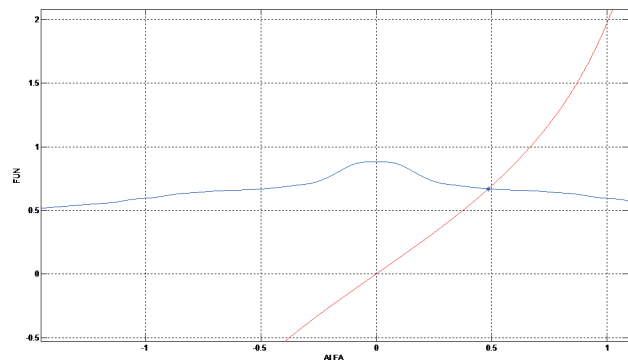
$$(R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta) \operatorname{tg} \alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha)\Omega \quad (6)$$

Мы можем решить уравнение (6) и найти угол атаки α при различных значениях фазовых переменных $\dot{Y}, \vartheta, \dot{\vartheta}$. Поверхность $\alpha = \alpha(\dot{Y}, \vartheta, \dot{\vartheta})$ можно изобразить только в четырехмерном пространстве. Мы будем изображать поверхность $\alpha = \alpha(\vartheta, \dot{\vartheta})$ только при фиксированных значениях скорости центра масс \dot{Y} . Приведем графическую интерпретацию результатов решений уравнения (6) для пластинки шириной один метр с удлинением $\lambda = 8$, из которой следует нарушение единственности определения угла атаки при некоторых значениях $\dot{Y}, \vartheta, \dot{\vartheta}$.

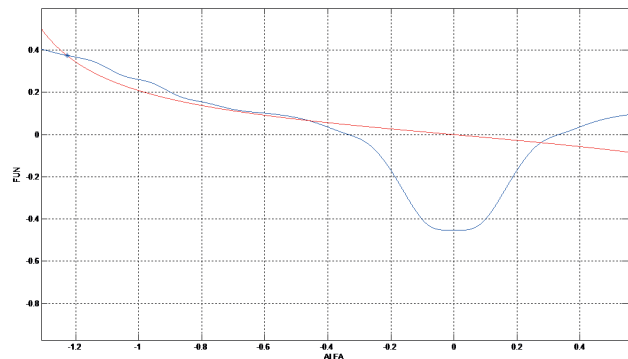
$\Omega > 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$



$\Omega < 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$



$\Omega < 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$



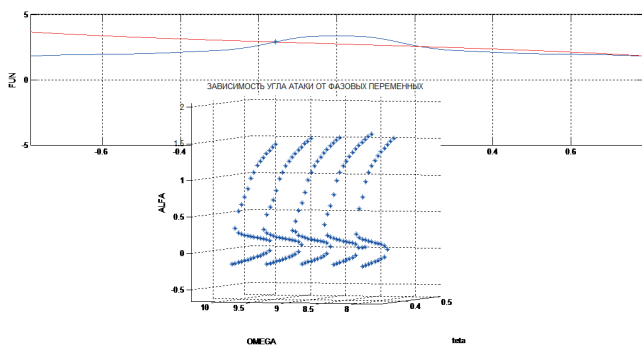
Р и с. 2. Неоднозначность углов атаки

F i g. 2. Ambiguity of the angles of attack

$\Omega < 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$

Таким образом, существуют значения $\dot{Y}, \dot{\vartheta}, \vartheta$, при которых поверхность $\alpha = \alpha(\vartheta, \dot{\vartheta})$ имеет складку, внутри которой кинематические соотношения (4) имеют ровно по три решения. Участок области неоднозначности для поверхности $\alpha = \alpha(\vartheta, \dot{\vartheta})$ при фиксированном значении $\dot{Y} = 8$ изображен на рисунке 3 для рассматриваемых пластинок.

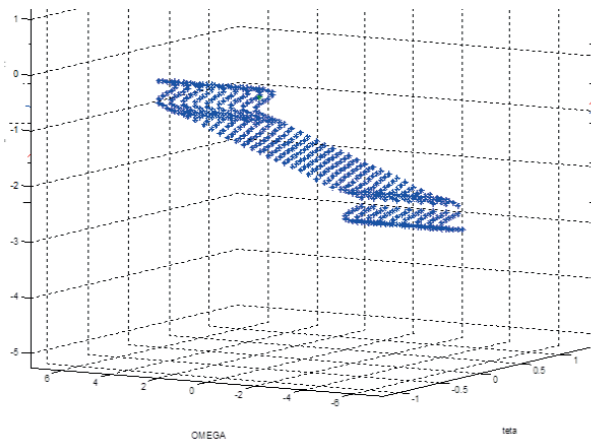




Р и с. 3. Решения уравнения (6) в случае $\dot{Y} = 8$
 Fig. 3. Solutions to equation (6) in the case $Y = 8$

При уменьшении значения скорости центра масс \dot{Y} до нуля на рассматриваемой поверхности, эта тенденция не сохраняется, и области неоднозначности исчезают.

Изобразим на рисунке 4, последовательно находя численное решение уравнения (6), другую поверхность $\alpha = \alpha(\Omega, \dot{Y})$ на участке неоднозначности при фиксированных значениях угла ϑ ориентации тела. Построенная для случая $\vartheta = 0$ поверхность симметрична относительно точки $(0, 0, \frac{\pi}{2})$ и имеет по краям две складки.



Р и с. 4. Решения уравнения (6) при $\vartheta = 0$. Области неоднозначности.
 Fig. 4. Solutions to equation (6) when $\vartheta = 0$. Areas of ambiguity.

Возникает вопрос: какое решение при прохождении области неоднозначности является истинным, и по какому правилу можно выбирать нужную ветвь при моделировании? Ведь неоднозначность определения угла атаки означает, что неоднозначно определяются аэродинамические функции и сдвиг центра давления. Учитывая то, что характер обтекания маятника носит непрерывный характер, значения угла атаки α нужно выбирать, сохраняя его непрерывность. Приступим к проведению анализа положений равновесия для нашего тела^{1, 2}.

Решение уравнений равновесия

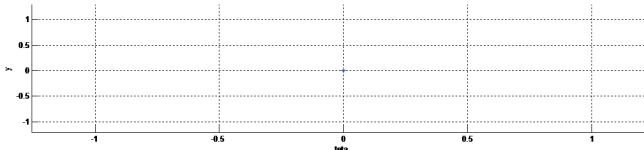
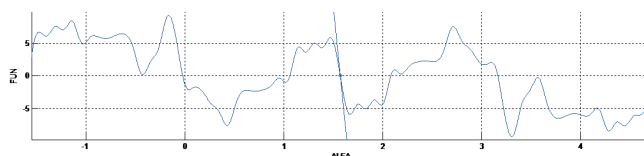
Рассмотрим поступательное движение тела. Найдем возможные стационарные решения.

При $\dot{Y} = 0, \dot{\theta} = 0$ из кинематических соотношений (4), учитывая, что $\theta_* = const, Y_* = const$ следует, что $tg\alpha_* = ctg\theta_*$, откуда $\alpha_* + \theta_* = \frac{\pi}{2}$. Запишем уравнения равновесия для системы (7)

$$\begin{cases} c_y(\alpha_*) - kY_* = 0 \\ Rc_r(\alpha_*) - \varepsilon(\alpha_*)c_n(\alpha_*) = C(\frac{\pi}{2} - \alpha_*) \end{cases} \quad (7)$$

Проведем анализ решений системы (7) в системе MATLAB для пластинок, имеющих удлинение восемь при уменьшении коэффициента жесткости c от больших значений до нуля. Второе уравнение системы (7) всегда имеет решение $\alpha = \frac{\pi}{2}$, которое соответствует стационарной точке - состоянию покоя $\theta = 0, y = 0$, причем правая часть второго уравнения системы (3) симметрична относительно этой точки и имеет период 2π . Сначала рассмотрим случай $R > 0$ (тело ориентировано по потоку) [11], [12].

- При $C \gg 1$ имеем только одну стационарную точку $\theta = 0, y = 0$ (см. Рис. 1).
- При уменьшении коэффициента жесткости c прямая в правой части второго уравнения системы (3) становится более пологой, появляются новые положения равновесия, происходит их ветвление и число стационарных точек увеличивается. Добавляются еще два решения, изображенных на рисунке 2. Этим решениям соответствуют два изолированных положения равновесия, симметричных относительно $\theta = 0, y = 0$ (см. рис. 3).

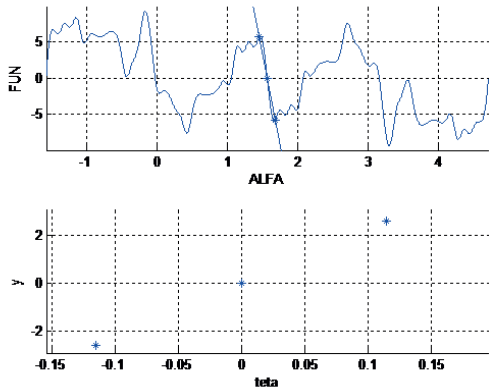


Р и с. 5. Решение уравнений равновесия
 Fig. 5. Solutions of the equilibrium equations

¹ Паршин, Д. Е. Качественный анализ в задаче о движении аэродинамического маятника / Д. Е. Паршин, В. А. Самсонов. -

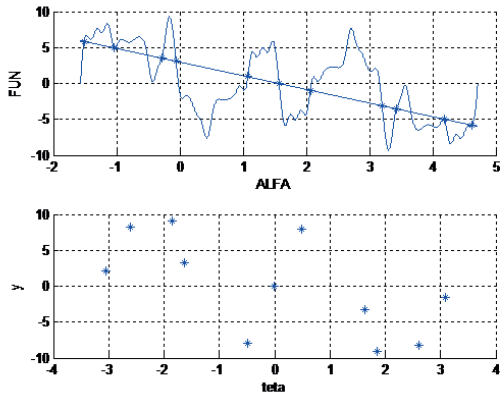
² Локшин, Б. Я. Качественный анализ движения твердого тела в сопротивляющейся среде / Б. Я. Локшин, В. А. Привалов, В. А. Самсонов // Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. -



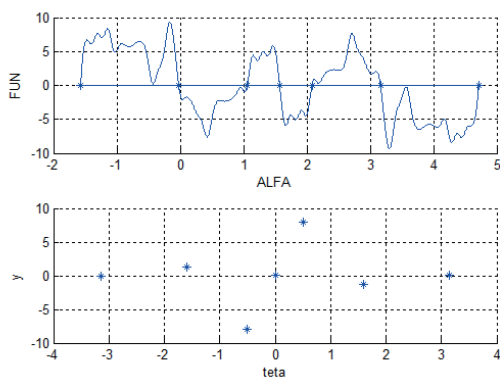


Р и с. 6.
Fig. 6.

• Далее этот процесс ветвления стационарных точек продолжается. При малом значении C Число положений равновесия становится уже достаточно большим.



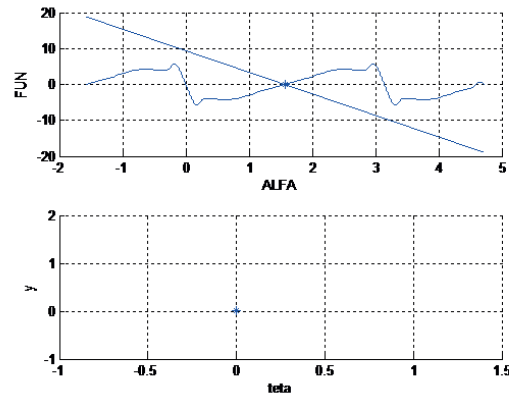
Р и с. 7. Решение уравнений равновесия
Fig. 7. Solutions of the equilibrium equations



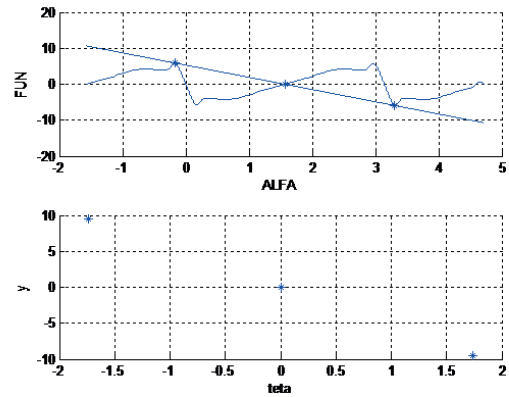
Р и с. 8. Решения уравнений равновесия при $c=0$
Fig. 8. Solution of the equilibrium equation when $c=0$

В случае $C=0$ имеем счетное множество стационарных решений, как в [4], [7], [8].
Продолжим анализ стационарных точек в случае $R=0$ (пластинка ориентирована поперек потока). Если $C \gg 1$ имеем одно

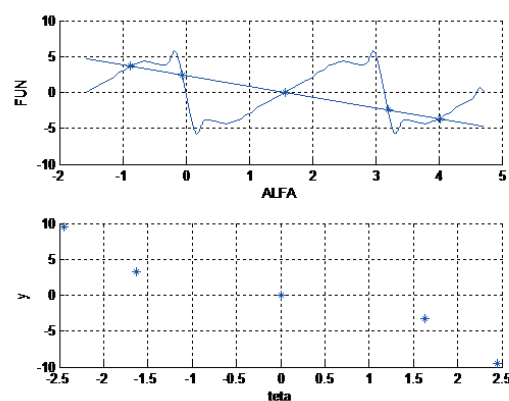
тривиальное положение равновесия в состоянии покоя $\theta = 0, y = 0$. При уменьшении c появляются сначала 2 а потом 4 симметричных стационарных точки (см. рис. 15, 16).



Р и с. 9. Решение уравнения равновесия в случае $r=0, C \gg 1$
Fig. 9. Solution of the equilibrium equation when $r=0, C \gg 1$



Р и с. 10. Решение уравнения равновесия в случае $r=0$
Fig. 10. Solution of the equilibrium equation when $r=0$

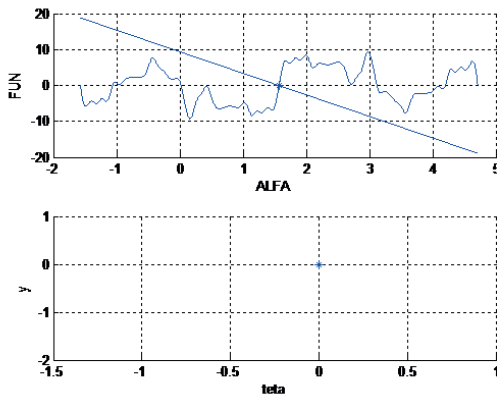


Р и с. 11. Решение уравнения равновесия в случае $r=0$
Fig. 11. Solution of the equilibrium equation when $r=0$

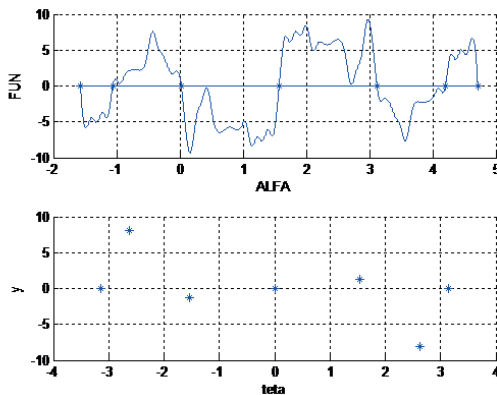
• Далее этот процесс ветвления стационарных точек продолжается. При малом значении C Число положений равновесия становится уже достаточно большим.



- В случае $C=0$ имеем счетное множество стационарных решений.
- Продолжим анализ стационарных точек в случае $R < 0$ (пластинка ориентирована навстречу потоку). Если $c \gg 1$ имеем одно тривиальное положение равновесия в состоянии покоя (см. рис. 12) $\theta = 0, y = 0$.
- При уменьшении коэффициента жесткости c прямая в правой части второго уравнения системы (3) становится более пологой, появляются новые положения равновесия, происходит их ветвление по аналогии с уже ранее рассмотренными случаями.



Р и с. 12. Решение уравнения равновесия в случае $r < 0$
 F i g. 12. Solution of the equilibrium equation when $r < 0$



Р и с. 13. Решение уравнения равновесия в случае $r < 0, C = 0$
 F i g. 13. Solution of the equilibrium equation when $r < 0, C = 0$

В случае, когда $C=0$, имеем счетное множество стационарных точек. Таким образом, у рассматриваемого тела есть интересные и неочевидные изолированные положения равновесия. Все найденные стационарные точки симметричны относительно положения $\theta = 0, Y = 0$, что подтверждает симметрию рассматриваемой задачи. Для всех найденных стационарных точек уравнение (6) преобразуется к виду: $t g \alpha = c t g \theta$. Это уравнение при фиксированном θ имеет только одно решение, которое никогда не попадает в область неоднозначности. Таким образом, целесообразно проводить исследование устойчивости в рассматриваемых стационарных точках. На этом анализ простейших положений равновесия можно за-

кончить. Далее будет проведено исследование устойчивости произвольного положения равновесия: $\theta = \theta_*, Y = Y_*$ в общем случае.

Построение области устойчивости для произвольных стационарных точек

Будем считать, что маятник совершает малые колебания около произвольного положения равновесия $Y = Y_*, \vartheta = \vartheta_*$. Исследуем его устойчивость. Для исследования устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для системы четвертого порядка.

Пусть $Y \rightarrow Y_*$ и $\vartheta \rightarrow \vartheta_*$. Введем малые отклонения: $Y = Y_* + \Delta Y, \vartheta = \vartheta_* + \Delta \vartheta$.

Линеаризуем уравнения движения (3) - (4), если $\Delta Y \rightarrow 0$ и $\Delta \vartheta \rightarrow 0$

$$\begin{cases} M\Delta\ddot{Y} + (c_y'(\frac{\pi}{2}) + c_x(\frac{\pi}{2}))\Delta\dot{Y} + Ky + \\ + (a(\vartheta_*)R - b(\vartheta_*))\Delta\dot{\vartheta} + c_y'(\frac{\pi}{2})R\Delta\vartheta \sin \vartheta_* = 0 \\ -(\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})\Delta\dot{Y} + I\Delta\ddot{\vartheta} - \\ - (b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*))\Delta\dot{\vartheta} + \\ + (C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2}))\Delta\vartheta = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $a(\vartheta_*), b(\vartheta_*), b_1(\vartheta_*), b_2(\vartheta_*), b_3(\vartheta_*)$ — некоторые функции угла ϑ_* вид которых мы приводить не будем из-за того, что это достаточно большие и громоздкие выражения.

Характеристическое уравнение системы (15) имеет вид:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

Приведем условия Гурвица

$$a_0 = MI > 0 \text{ (Выполнено всегда)}$$

$$a_1 = M(b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*)) + c_x I > 0$$

$$a_2 = M(C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})) + \\ + c_x(\frac{\pi}{2})(b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*)) + KI > 0$$

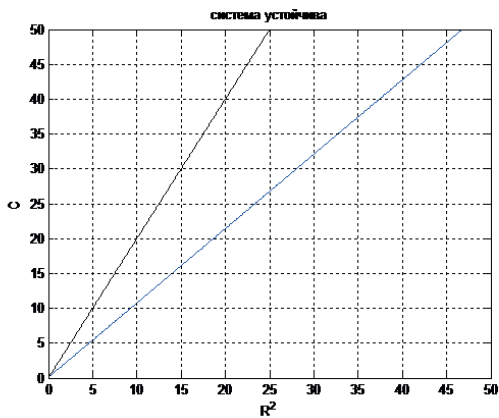
$$a_3 = c_x(\frac{\pi}{2})(C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})) - \\ - K(b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*)) + \\ + (a(\vartheta_*)R - b(\vartheta_*))(\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})) > 0$$

$$a_4 = K(C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})) > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

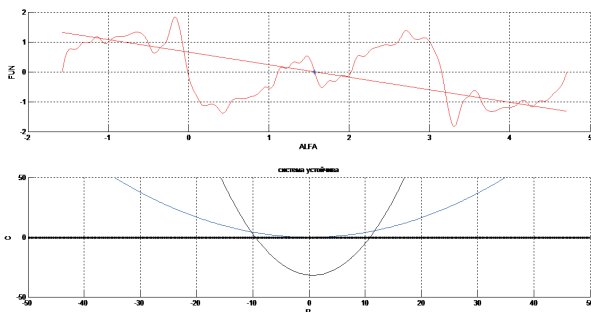
Сначала изобразим область устойчивости для положения $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$ на плоскости безразмерных параметров (R^2, I) .





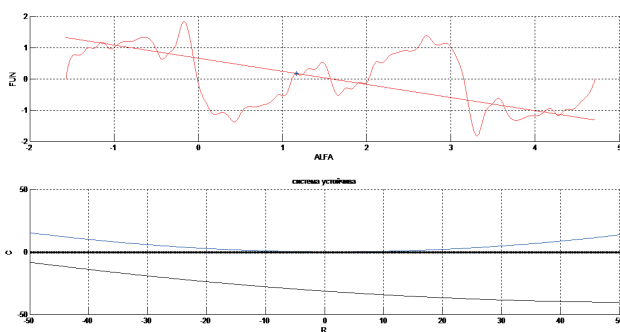
Р и с. 14. Область устойчивости (выше черной прямой)
F i g. 14. Stability area (above the black line)

Можно изобразить область устойчивости для положения $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$ на плоскости безразмерных параметров (R, C) .



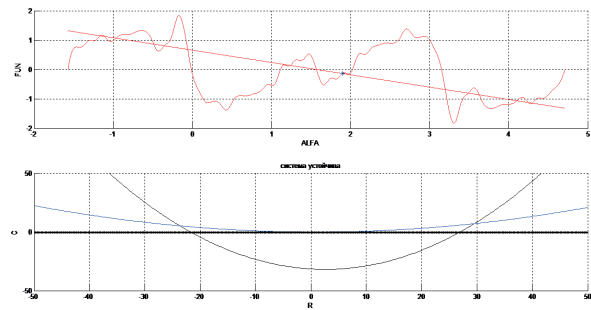
Р и с. 15. Область устойчивости (выше черной параболы)
F i g. 15. Stability area (above the black parabola)

Область устойчивости для произвольного положения равновесия Y_*, ϑ_* , будем брать положения равновесия, лежащие слева недалеко от состояния покоя, изобразим на плоскости безразмерных параметров (R, C) (выше синей параболы).



Р и с. 16.
F i g. 16.

Область устойчивости для произвольного положения равновесия, справа недалеко от состояния покоя, изобразим на плоскости безразмерных параметров (выше черной и синей Парабол).



Р и с. 17.
F i g. 17.

Область устойчивости для произвольного положения равновесия, слева недалеко от состояния покоя, изобразим на плоскости безразмерных параметров (выше черной и синей Парабол).

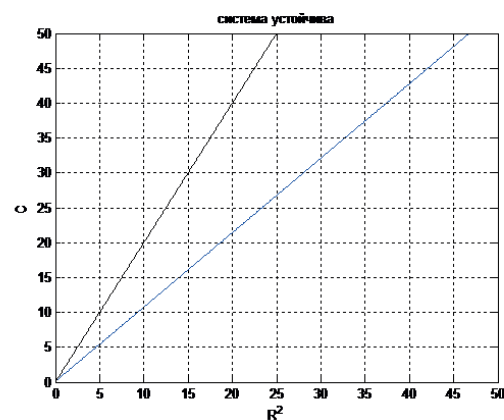
Граница области устойчивости является параболой и соответствует появлению нулевого корня в характеристическом уравнении. С ростом скорости потока условие $a_4 > 0$ нарушается. Такая форма потери устойчивости сопровождается ветвлением положений равновесия.

Исследование показало, что силы аэродинамического воздействия для тел с одними формами могут способствовать развитию автоколебаний, а для других затуханию.

Перейдем к следующему этапу данной работы - построению программы, которая строит области устойчивости и реализует численное интегрирование системы уравнений движения

Построение области устойчивости в состоянии покоя

Написана программа, которая реализует критерий Гурвица для уравнения (8) и изображает на плоскости параметров R^2, C область устойчивости. В начале работы программы вводятся основные параметры m, J, V, k, c . Далее используются аэродинамические функции $c_x(\alpha), c_y(\alpha), c_z(\alpha)$ для пластинки с удлинением $\lambda = 8$, которые являются экспериментальными данными и получены из публикации [6]. Далее реализуется критерий Гурвица. При выполнении условий критерия Гурвица выводится сообщение: «Система устойчива». В противном случае выводится сообщение: «Система неустойчива».



Р и с. 18. Область устойчивости (выше черной прямой)
F i g. 18. Stability area (above the black line)



Программа, интегрирующая уравнения движения

В математическом пакете MATLAB 18 написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений (3)-(4), описывающих колебания пластинки. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. При поиске численного решения аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном.

В программе задается интервал интегрирования, значения R и C вводятся путем выбора точки на графике области устойчивости. Начальные условия также выбираются графически. Полученные путем интегрирования точки, изображаются как траектории в конфигурационном пространстве системы.

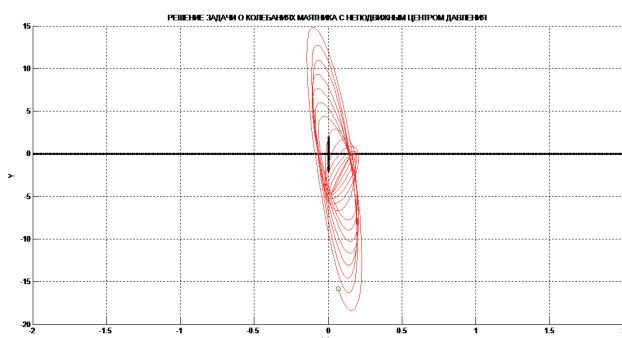


Рис. 19.
Fig. 19.

Заключение

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель колебаний аэродинамического маятника.
2. Показано нарушение единственности при определении угла атаки. Проведен параметрический анализ областей неоднозначности.
3. Проведены численные исследования устойчивости, в которых реализован критерий Гурвица и изображены области устойчивости при различных значениях параметров β , R .
4. Предложен комплекс программ, позволяющий строить области устойчивости и проводить численное интегрирование уравнений движения для исследуемой модели.

Список использованных источников

- [1] Беляков, Д. В. Исследование движений несимметричного тела в сопротивляющейся среде / Д. В. Беляков, В. А. Самсонов, В. В. Филиппов // Вестник Московского энергетического института. — 2006. — № 4. — С. 5-10. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (дата обращения: 02.07.2020). — Рез. англ.
- [2] Беляков, Д. В. Разработка и исследование математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде / Д. В. Беляков // Мехатроника, Автоматизация, Управление. — 2007. — № 11. — С. 20-24. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (дата обращения: 02.07.2020). — Рез. англ.

- [3] Самсонов, В. А. Вертикальное снижение тяжелого симметричного авторотирующего тела в сопротивляющейся среде / В. А. Самсонов, Д. В. Беляков, И. Ф. Чебурахин // Научные труды (Вестник МАТИ). — 2005. — № 9(81). — С. 145-150.
- [4] Самсонов, В. А. Математическое моделирование движения симметричного авторотирующего тела, раскрученного до высокой угловой скорости, в воздушной среде / В. А. Самсонов, Д. В. Беляков // Научные труды (Вестник МАТИ). — 2006. — № 10(82). — С. 196-200.
- [5] Беляков, Д. В. Оценка возможностей нового типа ротирующего спускающегося в воздухе объекта / Д. В. Беляков, В. А. Самсонов // Тезисы XXVI Академических чтений по космонавтике / Под ред. А. К. Медведевой. — М., 2002. — С. 100.
- [6] Беляков, Д. В. Математическое моделирование движения ротирующего спускающегося в воздухе объекта / Д. В. Беляков // Пятый Международный аэрокосмический конгресс IAC-06. Посвящается 20-летию вывода в космос орбитальной станции «МИР». Тезисы докладов. — М., 2006. — С. 62-63.
- [7] Беляков, Д. В. Математическая модель несимметричного авторотирующего тела в сопротивляющейся среде / Д. В. Беляков // Тезисы докладов XXXIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения». — М.: МАТИ, 2007. — С. 27-28.
- [8] Беляков, Д. В. Математическое моделирование движения ротирующего спускающегося в воздухе объекта / Д. В. Беляков // Пятый Международный аэрокосмический конгресс IAC-06. Посвящается 20-летию вывода в космос орбитальной станции «МИР». — М., 2006.
- [9] Беляков, Д. В. Перспективные технологии создания системы безопасного спуска в воздушной среде / Д. В. Беляков // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции «Новые материалы и технологии» — НТМ-2008. — М.: МАТИ — РГТУ, 2008. — С. 117.
- [10] Локшин, Б. Я. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде / Б. Я. Локшин, В. А. Привалов, В. А. Самсонов. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [11] Samsonov, V. A. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium / V. A. Samsonov, M. Z. Dosaev, Yu. D. Selyutskiy. — DOI 10.1142/S021812741103026X // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2011. — Vol. 21, No. 10. — Pp. 2955-2961. — URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021812741103026X> (дата обращения: 02.07.2020).
- [12] Hartog, J. P. D. Mechanical Vibrations / J. P. D. Hartog. — McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.
- [13] Табачников, В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки / В. Г. Табачников // Труды ЦАГИ. — 1974. — № 1621.
- [14] Strickland, J. H. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study / J. H. Strickland, B. T. Webster, T. Nguyen. — DOI 10.1115/1.3449018 // Journal of Fluids Engineering. — 1979. — Vol. 101, Issue 4. — Pp. 500-505.
- [15] Лятхер, В. М. Высотная ветровая электростанция с ортогональными агрегатами / В. М. Лятхер // Альтернативная энергетика и экология. — 2014. — № 7. — С. 21-



38. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21497653> (дата обращения: 02.07.2020). — Рез. англ.
- [16] Paraschivoiu, I. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines) / I. Paraschivoiu, F. Delclaux. — DOI 10.2514/3.48077 // *Journal of Energy*. — 1983. — Vol. 7, No. 3. — Pp. 250. — URL: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.48077> (дата обращения: 02.07.2020).
- [17] Alqurashi, F. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine / F. Alqurashi, M. H. Mohamed. — DOI 10.1155/2020/1368369 // *Modelling and Simulation in Engineering*. — 2020. — Vol. 2020, Article 1368369. — URL: <https://www.hindawi.com/journals/mse/2020/1368369> (дата обращения: 02.07.2020).
- [18] Parashivoiu, I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines / I. Parashivoiu. — DOI 10.2514/6.1981-2582 // *Journal of Energy*. — 1982. — Vol. 6. — Pp. 406-412. — URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1981-2582> (дата обращения: 02.07.2020).
- [19] Журавлев, В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. — М.: Наука, 1988.
- [20] Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.: Наука, 1966.
- [21] Досаев, М. З. О динамике малой ветроэлектростанции / М. З. Досаев, В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий // *Доклады Академии наук*. — 2007. — Т. 416, № 1. — С. 50-53. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9533786> (дата обращения: 02.07.2020).
- [22] Самсонов, В. А. Сопоставление различных форм записи уравнений движения тела в потоке среды / В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2008. — № 1. — С. 171-178. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10293701> (дата обращения: 02.07.2020).
- [23] Самсонов, В. А. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды / В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2004. — № 4. — С. 24. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (дата обращения: 02.07.2020).
- [24] Привалов, В. А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды / В. А. Привалов, В. А. Самсонов // *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1990. — № 2. — С. 32-38.
- [25] Zhang, J. Z. Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls / J. Z. Zhang, Y. Liu, X. Sun, J. H. Chen, L. Wang. — DOI 10.6052/1000-0992-16-034 // *Advances in Mechanics*. — 2018. — Vol. 48, Issue 1. — Pp. 299-319. — URL: <http://lxjz.cstam.org.cn/EN/10.6052/1000-0992-16-034> (дата обращения: 02.07.2020).

Поступила 02.07.2020; принята к публикации 25.08.2020;
опубликована онлайн 30.09.2020.

Об авторе:

Беляков Дмитрий Валерьевич, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, ш. Волоколамское, д. 4), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbel@rambler.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. Motion Investigation of Asymmetric Solid in Resistant Environment. *Vestnik MEI. Bulletin of Moscow Power Engineering Institute*. 2006; (4):5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (accessed 02.07.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [2] Belyakov D.V. Development and Features of Mathematical Model of Movement Asymmetrical Autorotating Bodies in Quasi-static to Environment. *Mechatronics, Automation, Control*. 2007; (11):20-24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (accessed 02.07.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [3] Samsonov V.A., Belyakov D.V., Cheburakhin I.F. Vertical reduction of a heavy symmetric autorotating body" in a resisting medium. *Scientific Works (Bulletin of MATI)*. 2005; (9):145-150. (In Russ.)
- [4] Samsonov V.A., Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion of a symmetric autorotating body, untwisted to a high angular velocity, in the air environment. *Scientific Works (Bulletin of MATI)*. 2006; (10):196-200. (In Russ.)
- [5] Belyakov D.V., Samsonov V.A. Evaluation of the capabilities of a new type of rotating object descending in the air. In: Medvedeva A.K. (ed.) *Theses of XXVI Academic Readings on Cosmonautics*. Moscow; 2002. p. 100. (In Russ.)
- [6] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion of a rotating object descending in the air. In: *Fifth international Aerospace Congress IAC-06. Dedicated to the 20th anniversary of the launch of the MIR space station*. Moscow; 2006. p. 62-63. (In Russ.)
- [7] Belyakov D.V. Mathematical model of an unsymmetric autorotating body in a resisting medium. In: *Proceedings of the XXXIII International Youth Scientific Conference "Gagarin Readings"*. M.: MATI; 2007. p. 27-28. (In Russ.)
- [8] Belyakov D.V. Mathematical modeling of the motion of a rotating object descending in the air. In: *Fifth international Aerospace Congress IAC-06. Dedicated to the 20th anniversary of the launch of the MIR space station*. Moscow; 2006. (In Russ.)
- [9] Belyakov D.V. Promising technologies for creating a safe descent system in the air. In: *Proceedings of the all-Russian scientific and technical conference "New materials and technologies"* — *NTM-2008*. M.: MATI- RSTU; 2008. p. 117. (In Russ.)
- [10] Lokshin B.Ya., Privalov V.A., Samsonov V.A. Introduction to the problem of the movement of a point and a body in a resisting medium. M.: MSU Publ.; 1992. (In Russ.)
- [11] Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Yu.D. Methods of



- Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011; 21(10):2955-2961. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [12] Hartog J.P.D. Mechanical Vibrations. McGraw-Hill Book Company, Inc.; 1956. (In Eng.)
- [13] Tabachnikov V.G. Stationary characteristics of wings at low speeds in the entire range of angles of attack. *TsAGI Science Journal*. 1974; (1621). (In Russ.)
- [14] Strickland J.H., Webster B.T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. *Journal of Fluids Engineering*. 1979; 101(4):500-505. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [15] Lyatkher V.M. High Jet Power Station with Orthogonal Power Units. *Alternativnaya Energetika i Ekologiya = Alternative Energy and Ecology*. 2014; (7):21-38. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21497653> (accessed 02.07.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [16] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines). *Journal of Energy*. 1983; 7(3):250. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [17] Alqurashi F, Mohamed M.H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine. *Modelling and Simulation in Engineering*. 2020; 2020:1368369. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>
- [18] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines. *Journal of Energy*. 1982; 6:406-412. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [19] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Prikladnye metody v teorii kolebanij* [Applied Methods in Vibrations Theory]. M.: Nauka; 1988. (In Russ.)
- [20] Malkin I.G. Theory of Stability of Motion. U.S. Atomic Energy Commission; 1952. (In Eng.)
- [21] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Seliutski Yu.D. On the Dynamics of a Small-Scale Wind Power Generator. *Doklady Physics*. 2007; 52(9):493-495. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.1134/S1028335807090091>
- [22] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. Comparison of Different Notation for Equations of Motion of a Body in a Medium Flow. *Mechanics of Solids*. 2008; 43(1):146-152. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.1007/s11964-008-1015-x>
- [23] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. About Vibrations of a Plate in a Flow of a Resisting Medium. *Mechanics of Solids*. 2004; (4):24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (accessed 02.07.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [24] Privalov V.A., Samsonov V.A. On the Stability of Motion of a Body Autorotating in the Flow of a Medium. *Izv. USSR Acad. Sci. MTT*. 1990; (2):32-38. (In Russ.)
- [25] Zhang J.Z., Liu Y., Sun X., Chen J.H., Wang L. Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls. *Advances in Mechanics*. 2018; 48(1):299-319. (In Eng.) DOI: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>

Submitted 02.07.2020; revised 25.08.2020;
published online 30.09.2020.

About the author:

Dmitry V. Belyakov, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), Ph.D. (Engineering), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbel@rambler.ru

The author has read and approved the final manuscript.

