УДК 519.7
DOI: 10.25559/SITITO.16.202004.841-850

Оригинальная статья

Алгоритм поиска минимальных алгебр бинарных мультиопераций ранга 3

С. И. Тодиков
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
197376, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5
sergeytodikov@gmail.com

Аннотация

В теории дискретных функций, помимо всюду определенных функций *k*-значной логики, изучаются и функции, определенные не на всех наборах. В этом случае неопределенность понимается по-разному, в зависимости от рассматриваемого класса задач. Если образ элемента является произвольным конечным подмножеством, то такие функции принято называть мультиоперациями. Теория мультиопераций является достаточно новым направлением в математике, и ее развитие, в перспективе, может привести к разработке новых подходов в теоретической информатики, математической кибернетики и их приложений. Как и в любом новом направление, в теории мультиопераций имеется много открытых проблем. Для решения таких задач необходимо разрабатывать алгоритмы, которые способны работать с большим объемом данных, так как с увеличением параметров число мультиопераций экспоненциально растет. Статья посвящена разработке алгоритма для поиска минимальных алгебр бинарных мультиопераций на трехэлементном множестве. Работа алгоритма основывается на двух этапах. Первый этап сделан для того, чтобы найти часть минимальных алгебр для второго этапа. Во втором этапе проверяются все алгебры на основе результата из первого этапа. С помощью такого подхода удалось обнаружить все минимальные алгебры, а также найти все минимальные алгебры с дополнительной метаоперацией объединения.

Ключевые слова: мультиоперации, алгебра, алгоритм, минимальный.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Тодиков, С. И. Алгоритм поиска минимальных алгебр бинарных мультиопераций ранга 3 / С. И. Тодиков. – DOI 10.25559/SITITO.16.202004.841-850 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 4. – С. 841-850.

Original article

Algorithm for Finding Minimal Algebras of Binary Multioperations of Rank 3

S. I. Todikov
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", St. Petersburg, Russian Federation
5 Professora Popova St., St. Petersburg 197376, Russian Federation
sergeytodikov@gmail.com

Abstract
The theory of discrete functions studies not only the everywhere defined functions of k-valued logic, but also functions that are not defined on all sets. Uncertainty can be understood in different ways depending on the class of problems under consideration. If the image of an element is an arbitrary finite subset, then such functions are usually called multioperations. The theory of multioperations is a fairly new direction in mathematics and has many open problems. The development of this theory, in the future, can lead to the development of new approaches in theoretical informatics, mathematical cybernetics and their applications. To solve such problems, it is necessary to develop algorithms that are capable of working with a large amount of data, since with an increase in parameters, the number of multioperations grows exponentially. The article proposes an algorithm for finding all minimal algebras of binary multioperations of rank 3. The algorithm is based on two stages. The first stage prepares the base of minimal algebras for the second stage. In the second step, all algebras are checked based on the result of the first step. This algorithm helped to find all minimal algebras of binary multioperations of rank 3, as well as find all minimal algebras closed with union.

Keywords: multioperations, algebra, algorithm, minimal.

The author declares no conflicts of interest.

For citation: Todikov S.I. Algorithm for Finding Minimal Algebras of Binary Multioperations of Rank 3. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(4):841-850. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202004.841-850

Введение

Для современного уровня развития общества характерным является переработка громадного объема информации, что естественным образом связано с развитием вычислительной техники, которая зависит от уровня разработки математических моделей дискретных преобразователей информации. На сегодняшний день булевы функции являются основным аппаратом для построения таких математических моделей.

Суперпозиция – один из основных способов задания булевых функций. Множество функций замкнутое относительно суперпозиции называют замкнутыми классами. Основоположником теории замкнутых классов является Э. Пост [1,2], деятельность которого пришлась на первую половину 20го века. Основным его достижением в этом направлении является описание всех замкнутых относительно суперпозиции множеств булевых функций, о котором стало известно в 1921 году, а спустя 20 лет появилась официальная публикация этого результата с доказательством.

Бурное развитие вычислительной техники, а также запросы со стороны смежных разделов математики поставили перед специалистами по булевым функциям целый ряд математических проблем: анализ различных форм и возможностей представления булевых функций, оценки сложности реализации булевых функций формулами и схемами, оценка сложности построения оптимальных схем и другие. Эти проблемы и направления исследований по сей день, остаются актуальными не только в теории булевых функций, но и во всей теории функций. [3,4]

Со временем обработка информации посредством математических моделей, основанных на теории булевых функций, стала затруднительной из-за постоянного быстрого роста объема информации. Для решения этой проблемы стали развиваться новые направления. Одним из таких направлений является теория функциональных систем.

Теория функциональных систем – сравнительно молодое направление в дискретной математике. Становление и развитие нового направления происходило в значительной степени благодаря трудам отечественных математиков и прежде всего С.В. Яблонского [5].

Интенсивные исследования основных классов дискретных функций, проводимые как специалистами по дискретной математике и математической кибернетике, так и специалистами из других областей математики, поставили задачу формирования такого понятия, в рамках которого можно было бы говорить о различных классах функций и о различных операциях над этими функциями. Таким понятием явилось понятие функциональной системы.

С содержательной точки зрения понятие функциональной системы близко к понятию универсальной алгебры, но в отличие от универсальной алгебры, где носителем служит множество произвольной природы, в теории функциональных систем носитель должен быть множеством функций.

Наиболее распространенные дискретные функциональные системы имеют в качестве носителей множество функций одного из трех типов: функции многозначной логики, функции натурального аргумента и автоматные функции. Список операций, рассматриваемых в теории функциональных систем гораздо шире: суперпозиция и ее различные модификации, операции логического типа, «схемные» операции, примитивная и другие виды рекурсий, минимизация, обращение, введение обратной связи и ряд других [6].

Впервые алгебраический подход к изучению функциональных систем был предложен А.И. Мальцевым. [7] Среди алгебр функций наибольшее распространение получили клоны – алгебры операций, замкнутые относительно суперпозиции и содержащие метаоперации проекции. [8,9]

В последние десятилетия интенсивно развивается теория мультиопераций на конечных множествах. Стоит сказать, что теория операций на конечных множествах содержит в себе много не решенных принципиальных вопросов, а современное состояние теории мультиопераций находится в своей ранней стадии развития. В настоящее время изучаются разные вопросы теории мультиопераций, в частности, вопросы полноты [10], связь клонов функций и клонов мультиопераций [11, 12], рассматриваются вопросы функциональной разделимости [13], вопросы представления мультиопераций в различных формах [14] и их минимизация [15-17], вопросы связанные с алгебрами операций и мультиопераций [18-24]. При этом необходимо отметить, что результаты данной теории востребованы в таких разделах науки как информатика, математическая логика, криптография, теория алгоритмов, синтез управляющих систем.

Работы по теории мультиопераций интересны как специалистам по дискретной математике, так и специалистам по приложениям математики, занимающихся разработкой электронных схем, синтезом дискретных преобразователей информации, защитой информации, разработкой систем искусственного интеллекта и поддержки принятия решений.

Цель исследования

Целью данного исследования является нахождение всех минимальных алгебр бинарных мультиопераций ранга 3. Для решения поставленной задачи необходимо произвести теоретический и практический анализ. Отметим, что по этой задаче имеются только схожие исследования, которые касаются унарных операций и мультиопераций, но разница в том, что количество унарных и бинарных мультиопераций ранга 3 очень сильно различается (количество унарных мультиопераций = 512, а количество бинарных мультиопераций = 134 217 728). Получается, что все разработанные алгоритмы не подходят для решения поставленной задачи, и основная проблема заключалось в том, что необходимо было разработать такой алгоритм, который будет способен работать с большим объемом данных за приемлемое время.

При всем вышеописанном цель исследования включала в себя следующие задачи:

1) произвести анализ близких по постановке исследований с целью нахождения некоторых минимальных алгебр теоретическим способом;
2) разработать алгоритм, способный в большом диапазоне алгебр находить минимальные алгебры;
3) на основе разработанного алгоритма найти все минимальные алгебры бинарных мультиопераций ранга 3.

Основная часть

Основные понятия

Пусть 2^A – множество всех подмножеств. Отображение из A^n в 2^A называется *n*-местной мультиоперацией на *A*. Множество всех *n*-местных мультиопераций на *A* будем обозначать через $M^n{}_A$. Под рангом мультиоперации понимается мощность множества *A*. При $|A|$ = k будем использовать обозначение $\mathrm{M}^n{}_k$. Используем также обозначения:

$$M_A = \bigcup_{n \ge 0} M_A^n ; M_k = \bigcup_{n \ge 0} M_k^n$$

Мультиоперации заданные на *k*-элементном множестве *A* будем называть мультиоперациями ранга *k*.

Для более простого понимания, *n*-местную мультиоперацию *f* на множестве *A* = {1,2,4} будем представлять, как отображение [25]

$$f\{1,2\}^n \to \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

используя следующие кодировки

$$\{\varnothing\} \to \{0\};\{1\} \to \{1\};\{2\} \to \{2\};\{1,2\} \to 3,\{4\} \to$$
$$\to 4,\{1,4\} \to 5,\{2,4\} \to 6,\{1,2,4\} \to 7$$

Также *n*-местную мультиоперацию *f* можно представить в виде вектора всех её значений $(\alpha_1,\dots,\alpha_{2^n})$, где $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\alpha_i$, если $(\alpha_1-1,\dots,\alpha_n-1)$ есть представление числа *i*-1 в двоичной системе счисления.

Определим следующие мультиоперации на *A* размерности 2:

- пустая: $o^n(a_1,\dots,a_n)=\varnothing$;
- полная: $u^n(a_1,\dots,a_n)=A$.
- проекция по первому аргументу: $e_1^2(a_1,a_2)=a_1$
- проекция по второму аргументу: $e_2^2(a_1,a_2)=a_2$

Определим следующие метаоперации на множестве $\mathrm{M}^n{}_A$:

- суперпозиция: $f(f*f_1,\dots,f_n)(a_1,\dots,a_m)=\bigcup_{b_i\in f_i(a_1,\dots,a_m)} f(b_1,\dots,b_n)$;
- разрешимость мультиоперации $(\mu_i f)(a_1,\dots,a_n)=\{a \mid a_i \in f(a_1,\dots a_{i-1},a,a_{i+1},\dots,a_n)\}$;
- пересечение мультиопераций $(f\cap g)(a_1,\dots,a_n)=f(a_1,\dots,a_n)\cap g(a_1,\dots,a_n)$
- объединение мультиопераций $(f\cup g)(a_1,\dots,a_n)=f(a_1,\dots,a_n)\cup g(a_1,\dots,a_n)$

Определение 1. Алгеброй мультиопераций ранга *k*, размерности *n* называется любое подмножество $R \subseteq \mathrm{M}^n{}_k$, содержащее все *n*-местные проекции, пустую, полную *n*-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции, разрешимости и пересечения.

Если мы рассматриваем алгебры с объединением, то алгебра должна быть также замкнута относительно объединения.

Очевидно, что такие алгебры образуют решетку по включению. Если алгебра *A* полностью содержаться в другой алгебре *B*, то говорят, что *A* является подалгеброй *B*. Также в решетке имеются наименьшая, полная, минимальные и максимальные алгебры.

Определение 2. Наименьшей алгеброй называется алгебра, у которой нет других подалгебр отличных от ее самой.

Определение 3. Полной алгеброй мультиопераций ранга *k* размерности *n* называется алгебра, состоящая из всех мультиопераций $M^n{}_k$.

Определение 4. Минимальной алгеброй называется алгебра, которая в качестве подалгебр содержит только саму себя и наименьшую алгебру.

Определение 5. Максимальной алгеброй называется алгебра, которая содержится в качестве подалгебры только в самой себе и в полной алгебре.

В работе не рассматриваются максимальные алгебры, так как работа ориентирована на поиск всех минимальных бинарных алгебр мультиопераций ранга 3.

Алгоритм для поиска минимальных алгебр

Перед разработкой алгоритма, при рассмотрении схожих исследований, стали известны 18 мультиопераций, которые заведомо порождают минимальные алгебры бинарных мультиопераций ранга 3. Эти мультиоперации входят в подмножество максимальных функций в теории клонов и с помощью связи Галуа можно интерпретировать данные функции в мультиоперации для суперклонов. В суперклонах эти 18 мультиопераций порождают минимальные суперклоны и это говорит о том, что эти 18 мультиопераций также будут порождать и минимальные алгебры, но разница между суперклонами и алгебрами в том, что минимальных алгебр может быть больше, чем минимальных суперклонов. Также стоит отметить, что эти 18 мультиопераций порождают минимальные алгебры в сигнатуре без объединения.

Помимо этого, рассматривались работы, в которых приводились алгоритмы для работы с алгебрами операций. При изучении алгоритмов стало очевидно, что использование схожих идей или алгоритмов для поставленной задачи невозможно, так как размер алгебр операций значительно меньше, чем размер алгебр мультиопераций. Касательно исследований алгебр мультиопераций, то большинство работ основываются на теоретическом подходе, или же предложенные методы созданы для решения совершенно других задач. Исходя из этого было принято решения разработать новый алгоритм для решения поставленной задачи.

Для того, чтобы обнаружить минимальные алгебры бинарных мультиопераций ранга 3, как минимум необходимо породить алгебры от 134 217 728 бинарных мультиопераций, где размер каждой алгебры лежит в диапазоне от 6 (наименьшая алгебра) до 134 217 728 (полная алгебра). Очевидно, что на данный момент обработать такой большой объем данных физически невозможно. Для того, чтобы получить результат, алгоритм был разбит на два этапа.

При первом этапе устанавливается небольшой размер алгебр, так как размер минимальных алгебр не очень большой. Затем начинается порождение алгебр от одной мультиоперации. В качестве порождающей мультиоперации рассматриваются все бинарные мультиоперации. Если во время порождения алгебры её размер становится больше установленного значения, то алгебра отбрасывается. Далее начинается проверка найденных алгебр на минимальность, то есть каждый элемент алгебры должен породить всю алгебру. С помощью первого этапа планировалось получить еще часть минимальных алгебр перед выполнением второго этапа.

При втором этапе берутся все имеющиеся минимальные алгебры и снова порождаются алгебры от всех бинарных мультиопераций. Если при замыкании алгебры находилась мультиоперация, которая содержится в одной из минимальных алгебр, то такая алгебра отбрасывается, в противном случае сохраняется. После, среди сохраненных алгебр, происходит поиск минимальных алгебр. По окончанию выполнения первого и второго этапа, алгоритм находит все минимальные алгебры бинарных мультиопераций ранга 3. Ниже представлен алгоритм:

1. Первый этап:

1.1. Устанавливаем размер алгебры

1.2. Берем новую бинарную мультиоперацию и порождаем от неё алгебру. Если размер алгебры меньше установленного размера алгебры, то сохраняем эту алгебру, иначе пропускаем её.

1.3. Если есть еще бинарные мультиоперации, то переходим на шаг 1.2, иначе переходим к шагу 1.4

1.4. Проверяем сохраненные алгебры на минимальность. Если алгебра минимальна, то сохраняем её, иначе удаляем.

2. Второй этап:

2.1. Берем все мультиоперации в минимальных алгебрах и сохраняем в один список.

2.2. Берем новую бинарную мультиоперацию и порождаем от неё алгебру. Если в этой алгебре нет ни одной мультиоперации из списка, то сохраняем её, иначе пропускаем её.

2.3. Если есть еще бинарные мультиоперации, то переходим на шаг 2.2, иначе переходим на шаг 2.4

2.4. Проверяем сохраненные алгебры на минимальность. Если алгебра минимальна, то сохраняем её, иначе удаляем.

Реализация алгоритма была осуществлена в Microsoft Visual Studio на языке программирования C#. Для быстродействия программы были использованы практические и теоретические ухищрения. Самым главным способом, который позволил увеличить скорость работы алгоритма, стала конструкция для представления мультиопераций в памяти компьютера. Каждая мультиоперация представляла из себя три бинарных массива (для логических элементов 1, 2 и 4 соответственно). Например, мультиоперацию (734 513 440) представлялась в алгоритме как: (110 111 000) для 1, (110 001 000) для 2 и (101 100 110) для 4. Такой подход позволил уменьшить время выполнения всех метаоперации, что привело к увеличению скорости выполнения алгоритма при порождении алгебр. Также очевидно, что операция суперпозиция является самой дорогостоящей и её выполнение должно быть в самый последний момент. Так как мы работаем с границами алгебр, то было разумно сначала выполнять быстродействующие метаоперации, для того чтобы увеличить размер алгебры, и быстрее дать понять алгоритму подходит нам текущая алгебра или нет. Еще одним способом для улучшения быстродействия программы стало использование словарей. Во время порождения алгебры получается много новых мультиопераций, и каждый раз необходимо проверять имеется ли в алгебре мультиоперация, которая получилась при замыкании, или нет. Так как обращение к словарю это O(1), то было решено для каждой мультиоперации дать свой ключ, а всю алгебру хранить в словаре. Таким образом, во время проверки нам не нужно было проверять всю алгебра, а достаточно было посмотреть принадлежит ли ключ алгебре или нет. Ключ же представляется следующим образом. Например, у нас имеется мультиоперация (471 040 112). Так как это бинарная мультиоперация ранга 3, то мы возводим 8 (2^3) в степень позиции элемента и на этот элемент. То есть ключ для мультиоперации (471 040 112) строится следующим образом: 8^8 * 4 + 8^7 * 7 + … + 8^0 * 2 = 82 067 529.

Полученные результаты

С помощью разработанного алгоритма удалось добиться поставленной цели и найти все минимальные алгебры бинарных мультиопераций ранга 3. В результате оказалось, что кроме заранее известных 18 минимальных бинарных алгебр мультиопераций ранга 3, больше никаких минимальных бинарных алгебр мультиопераций ранга 3 нет. Из этого не следует общий вывод о том, что число минимальных суперклонов всегда будет совпадать с числом минимальных алгебр. Также удалось найти все минимальные алгебры бинарных мультиопераций ранга 3 в сигнатуре с объединением. Их оказалось 5 штук. В таблице 1 приведены полученные результаты для алгебр без объединения, а в таблице 2 для алгебр с объединением.

Таблица 1. **Минимальные алгебры без объединения**

Table 1. **Minimal algebras without union**

Порождающая мультиоперация	Размер алгебры	Элементы алгебры
(111 111 111)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (111 111 111), (777 000 000), (700 700 700), (100 010 001), (700 000 000), (111 000 000), (100 100 100), (100 000 000), (124 000 000), (100 200 400)
(222 222 222)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (222 222 222), (000 777 000), (070 070 070), (200 020 002), (000 070 000), (000 222 000), (020 020 020), (000 020 000), (000 124 000), (010 020 040)

Порождающая мультиоперация	Размер алгебры	Элементы алгебры
(444 444 444)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (444 444 444), (000 000 777), (007 007 007), (400 040 004), (000 000 007), (000 000 444), (004 004 004), (000 000 004), (000 000 124), (001 002 004)
(333 333 333)	23	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (333 333 333), (777 777 000), (770 770 770), (300 030 003), (700 070 000), (111 222 000), (120 120 120), (100 020 000), (124 124 000), (110 220 440), (333 333 000), (330 330 330), (300 030 000), (770 770 000), (330 330 000), (110 220 000), 120 120 000)
(555 555 555)	23	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (555 555 555), (777 000 777), (707 707 707), (500 050 005), (700 000 007), (111 000 444), (104 104 104), (100 000 004), (124 000 124), (101 202 404), (555 000 555), (505 505 505), (500 000 005), (707 000 707), (505 000 505), (101 000 404), (104 000 104)
(666 666 666)	23	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (666 666 666), (000 777 777), (077 077 077). (600 060 006), (000 070 007), (000 222 444), (024 024 024), (000 020 004), (000 124 124), (011 022 044), (000 666 666), (066 066 066), (000 060 006), (000 077 077), (000 066 066), (000 022 044), (000 024 024)
(166 166 166)	13	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (166 166 166), (700 077 077), (100 060 006), (100 022 044), (111 666 666), (100 024 024), (100 066 066)
(525 525 525)	13	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (525 525 525), (707 070 707), (500 020 005), (101 020 404), (555 222 555), (104 020 104), (505 020 505)
(334 334 334)	13	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (334 334 334), (770 770 007), (300 030 004), (110 220 004), (333 333 444), (120 120 004), (330 330 004)
(175 175 175)	30	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (175 175 175), (777 070 077), (726 726 726), (100 070 005), (111 020 044), (111 777 555), (700 777 707), (124 020 024), (777 222 666), (100 222 404), (700 020 006), (175 070 075), (100 124 104), (111 175 155), (111 070 055), (777 020 066), (726 020 026), (100 777 505), (100 175 105), (100 726 504), (175 020 064), (726 222 626), (700 222 606), (700 726 706)
(327 327 327)	30	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (327 327 327), (707 777 007), (574 574 574), (300 020 007), (101 222 004), (333 222 777), (770 070 777), (104 124 004), (555 777 444), (110 020 444), (500 070 004), (307 327 007), (120 020 124), (323 222 327), (303 222 007), (505 777 004), (504 574 004), (330 020 777), (320 020 327), (130 020 574), (105 327 004), (554 574 444), (550 070 444), (570 070 574)
(764 764 764)	30	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (764 764 764), (700 770 777), (137 137 137), (700 060 004), (100 220 444), (777 666 444), (777 077 007), (100 120 124), (111 333 777), (111 022 004), (100 030 007), (700 760 764), (124 024 004), (764 664 444), (700 660 444), (100 330 777), (100 130 137), (777 066 004), (764 064 004), (137 026 004), (100 320 764), (111 133 137), (111 033 007), (137 037 007)

Порождающая мультиоперация	Размер алгебры	Элементы алгебры
(735 735 735)	15	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (735 735 735), (777 770 707), (700 030 005), (111 220 404), (777 333 555), (124 120 104), (735 730 705), (735 331 515), (777 330 505), (735 330 505)
(376 376 376)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (376 376 376), (770 777 077), (300 070 006), (110 222 044), (333 777 666), (120 124 024), (370 376 076), (332 376 266), (330 777 066), (330 376 066)
(567 567 567)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (567 567 567), (707 077 777), (500 060 007), (101 022 444), (555 666 777), (104 024 124), (507 067 567), (545 466 567), (505 066 777), (505 066 567)
(241 241 241)	20	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (241 241 241), (007 700 070), (412 412 412), (200 040 001), (001 200 040), (222 444 111), (400 010 002), (070 007 700), (004 100 020), (444 111 222), (020 004 100), (010 002 400), (002 400 010), (040 001 200)
(142 421 214)	7	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (142 421 214)
(735 376 567)	7	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (735 376 567)

Т а б л и ц а 2. **Минимальные алгебры с объединением**

T a b l e 2. **Minimal algebras with union**

Порождающая мультиоперация	Размер алгебры	Элементы алгебры
(142421214)	17	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (135 326 564), (711 272 447), (724 174 127), (735 376 567), (142 421 214), (153 623 654), (166 525 334), (742 471 217), (177 727 774), (753 673 657), (766 575 337)
(735376777)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (135 326 564), (711 272 447), (724 174 127), (735 376 567), (735 376 777), (775 776 567), (737 377 567), (775 776 777), (777 777 567), (737 377 777)
(735377577)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (135 326 564), (711 272 447), (724 174 127), (735 376 567), (735 377 577), (777 376 567), (735 776 767), (777 377 577), (777 776 767), (735 777 777)
(735777567)	16	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (135 326 564), (711 272 447), (724 174 127), (735 376 567), (735 777 567), (737 376 767), (775 376 577), (737 777 767), (777 376 777), (775 777 577)
(737776577)	12	(000 000 000), (777 777 777), (111 222 444), (124 124 124), (700 070 007), (100 020 004), (135 326 564), (711 272 447), (724 174 127), (735 376 567), (737 776 577), (775 377 767)

В итоге, на основе проделанных вычислений и рассуждений, получается следующие предложение.

Предложение. Верны следующие утверждения:

1. Количество минимальных алгебр бинарных мультиопераций ранга 3 в сигнатуре $< u,\ \theta,\ e_2^1,\ e_2^2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \cap,\ * >$ равно 18.
2. Количество минимальных алгебр бинарных мультиопераций ранга 3 в сигнатуре $< u,\ \theta,\ e_2^1,\ e_2^2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \cap,\ \cup,\ * >$ равно 5.

Заключение

Представленное исследование позволило, во-первых, найти все минимальные алгебры бинарных мультиопераций над трехэлементным множеством. Во-вторых, был разработан новый алгоритм для проведения исследований в теории мультиопераций. Благодаря хорошей конструкции и оптимизации алгоритма поиск минимальных алгебр был осуществлен за приемлемое время и обработал большое количество информации.

В дальнейшем планируется на основе приведенного алгоритма разрабатывать и улучшать методы и алгоритмы для решения задач, которые связанны с исследованиями алгебр мультиопераций. Стоит отметить, что если рассматривать другие задачи в этом направлении, или же увеличить размерность или ранг мультиопераций, то разработанный алгоритм будет уже не так эффективен и для решения таких задач необходимы новые решения.

Список использованных источников

[1] Post, E. L. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic / E. L. Post. – DOI 10.2307/2268608. – Princeton-London: Princeton Univ. Press, 1941.

[2] Post, E. L. Determination of All Closed System of Truth Tables / E. L. Post // Bulletin American Mathematical Society. – 1920. – Vol. 26. – Pp. 437.

[3] Избранные вопросы теории булевых функций / Под ред. С. Ф. Винокурова, Н. А. Перязева. – М.: Физматлит, 2001.

[4] Марченков, С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков. – М.: Физматлит, 2000.

[5] Яблонский, С. В. Функции алгебры логики и классы Поста / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев. – М.: Наука, 1966.

[6] Кудрявцев, В. Б. О функциональных системах / В. Б. Кудрявцев. – М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[7] Мальцев, А. И. Итеративные алгебры Поста / А. И. Мальцев. – Новосибирск: НГУ, 1976.

[8] Яблонский, С. В. Функциональные построения в *k*-значной логике / С. В. Яблонский // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 1958. – Т. 51 – С. 5-142.

[9] Lau, D. Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory / D. Lau. – DOI 10.1007/3-540-36023-9 // Springer Monographs in Mathematics. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. – URL: https://link.springer.com/book/10.1007%2F3-540-36023-9 (дата обращения: 03.08.2020).

[10] Пантелеев, В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, № 3. – С. 95-114. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=12916752 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[11] Перязев, Н. А. Теория Галуа для клонов и суперклонов / Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев. – DOI 10.4213/dm1349 // Дискретная математика. – 2015. – Т. 27, № 4. – С. 79-93. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24849942 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[12] Перязев, Н. А. Об одном достаточном условии равенства мультиклона и суперклона / Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев. – DOI 10.17516/1997-1397-2018-11-1-97-102 // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 97-102. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=32431531 (дата обращения: 03.08.2020).

[13] Шаранхаев, И. К. О методе декомпозиции мультифункций / И. К. Шаранхаев // Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Междунар. конф.: труды / Отв. ред.: В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. – М.: МАКС Пресс, 2015. – С. 266-267. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23678474 (дата обращения: 03.08.2020).

[14] Перязев, Н. А. Стандартные формы мультиопераций в суперклонах / Н. А. Перязев // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 88-95. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15540118 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[15] Перязев, Н. А. Минимизация мультиопераций в классе стандартных форм / Н. А. Перязев, И. А. Яковчук // Известия Иркутского государственного университета. Серия: «Математика». – 2009 – Т. 2, № 2. – С. 117-126. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15183533 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[16] Казимиров, А. С. О сложности стандартных форм мультифункций / А. С. Казимиров. – DOI 10.26516/1997-7670.2017.22.63 // Известия Иркутского государственного университета. Серия: «Математика». – 2017. – Т. 22. – С. 63-70. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30716136 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[17] Тодиков, С. И. Минимизация мультиопераций в классе ключевых стандартных форм / С. И. Тодиков // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2019. – №. 5. – С. 53-58. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=38247454 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[18] Перязев, Н. А. Теория Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций ранга 2 / Н. А. Перязев. – DOI 10.26516/1997-7670.2019.28.113 // Известия Иркутского государственного университета. Серия: «Математика». – 2019. – Т. 28. – С. 113-122. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=38228683 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[19] Перязев, Н. А. Тождества в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности / Н. А. Перязев. – DOI

10.26516/1997-7670.2019.29.86 // Известия Иркутского государственного университета. Серия: «Математика». – 2019. – Т. 29. – С. 86-97. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=39562117 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[20] Перязев, Н. А. Алгебры мультиопераций / Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев // Алгебра и теория моделей / Под ред. А. Г. Пинуса, Е. Н. Порошенко, С. В. Судоплатова, Е. И. Тимошенко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – С. 102-111.

[21] Peryazev, N. A. Algebras of *n*-ary Operations and Multioperations / N. A. Peryazev // XV International Conference on "Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications". – Tula: TSPU. – 2018. – Pp. 113-116.

[22] Peryazev, N. A. Finite Algebras of Multioperations / N. A. Peryazev // XVI International Conference on "Algebras, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications". – Tula: TSPU, 2019. – Pp. 51-54.

[23] Еременко, Д. А. Алгебры унарных операций ранга 3 / Д. А. Еременко // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2019. – № 7. – С. 14-18. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=42372860 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[24] Еременко, Д. А. Минимальные алгебры бинарных операций ранга 3 / Д. А. Еременко. – DOI 10.32603/2071-2340-2020-1-38-48 // Компьютерные инструменты в образовании. – 2020. – № 1. – С. 38-48. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=44070229 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

[25] Перязев, Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2009. – Т. 151, № 2. – С. 120-125. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=12833150 (дата обращения: 03.08.2020). – Рез. англ.

Поступила 03.08.2020; одобрена после рецензирования 12.11.2020; принята к публикации 05.12.2020.

Об авторе:

Тодиков Сергей Игоревич, аспирант кафедры вычислительной техники, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)» (197376, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1249-6838, sergeytodikov@gmail.com

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

[1] Post E.L. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Princeton-London: Princeton Univ. Press; 1941. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.2307/2268608

[2] Post E.L. Determination of All Closed System of Truth Tables. *Bulletin American Mathematical Society*. 1920; 26:437. (In Eng.)

[3] Vinokurov S.F., Periazeva N.A. (ed.) *Izbrannye voprosy teorii bulevyh funkcij* [Selected Questions of the Theory of Boolean Functions]. Fizmatlit, Moscow; 2001. (In Russ.)

[4] Marchenkov S.S. *Zamknutye klassy bulevyh funkcij* [Closed Classes of Boolean Functions]. Fizmatlit, Moscow; 2000. (In Russ.)

[5] Yablonskiy S.V., Gavrilov G.P., Kudryavtsev V.B. *Funkcii algebry logiki i klassy Posta* [Logic Algebra Functions and Post Classes]. Nauka, Moscow; 1966. (In Russ.)

[6] Kudryavtsev V.B. *O funkcional'nyh sistemah* [On Functional Systems]. Computing Center of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow; 1981. (In Russ.)

[7] Maltsev A.I. *Iterativnye algebry Posta* [Iterative Post Algebras]. Novosibirsk: NSU; 1976. (In Russ.)

[8] Yablonskii S.V. Functional constructions in a *k*-valued logic. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova* = Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1958; 51:5-142. (In Russ.)

[9] Lau D. Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. *Springer Monographs in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg; 2006. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-36023-9

[10] Panteleev V.I. The criteria of completeness for redefining Boolean function. *Vestnik NSU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics*. 2009; 9(3):95-114. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=12916752 (accessed 03.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[11] Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. Galois theory for clones and superclones. *Discrete Mathematics and Applications*. 2016; 26(4):227-238. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1515/dma-2016-0020

[12] Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. On some sufficient condition for the equality of multi-clone and super-clone. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2018; 11(1):97-102. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-1-97-102

[13] Sharankhaev I. K. *O metode dekompozicii mul'tifunkcij* [On the method of decomposition of multifunctional functions]. In: V. B. Alekseev, D. S. Romanov, B. R. Danilov (ed.) Discrete models in the theory of control systems. MAKS Press, Moscow; 2015. p. 266-267. (In Russ.)

[14] Peryazev N.A. Standard forms of multioperations in superclones. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2010; 3(4):88-95. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=15540118 (accessed 03.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[15] Peryazev N.A., Yakovjuk I.A. Minimisation of multioperations in a class standard forms. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2009; 2(2):117-126. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=15183533 (accessed 03.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[16] Kazimirov A.S. On complexity of standard forms for multifunctions. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2017; 22:63-70. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.22.63

[17] Todikov S.I. Minimisation of multioperations in a class key standerd forms. *Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University*. 2019; (5):53-58. Available at: https://

elibrary.ru/item.asp?id=38247454 (accessed 03.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[18] Peryazev N.A. Galois theory for finite algebras of operations and multioperations of rank 2. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2019; 28:113-122. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.113

[19] Peryazev N.A. Identities in fixed dimension algebras of multioperations. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2019; 29:86-97. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.86

[20] Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. *Algebry mul'tioperacij* [Algebras of Multioperations]. In: Pinus A.G., Poroshenko E.N., Sudoplatov S.V., Timoshenko E.I. (ed.) Algebra and Model Theory 11. Collection of papers. NSTU Publisher, Novosibirsk; 2017. p. 102-111. (In Russ.)

[21] Peryazev N.A. Algebras of *n*-ary Operations and Multioperations. In: *XV International Conference on "Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications".* Tula State Pedagogical University, Tula; 2018. p. 113-116. (In Eng.)

[22] Peryazev N.A. Finite Algebras of Multioperations. In: *XVI International Conference on "Algebras, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications".* TSPU; 2019. p. 51-54. (In Russ.)

[23] Eremenko D.A. Algebras of unary operations of rank 3. *Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University.* 2019; (7):14-18. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=42372860 (accessed 03.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

[24] Eremenko D.A. Minimal Algebras of Binary Operations of Rank 3. *Kompjuternye instrumenty v obrazovanii* = Computer Tools in Education. 2020; (1):38-48. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-1-38-48

[25] Peryazev N.A. Clones, Co-Clones, Hyperclones and Superclones. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2009; 151(2):120-125. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=12833150 (accessed 03.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)

Submitted 03.08.2020; approved after reviewing 12.11.2020; accepted for publication 05.12.2020.

About the author:

Sergey I. Todikov, postgraduate student of the Department of Computer Science and Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI" (5 Professora Popova St., St. Petersburg 197376, Russian Federation), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1249-6838, sergeytodikov@gmail.com

The author has read and approved the final manuscript.