УДК 517.946
DOI: 10.25559/SITITO.16.202004.862-871

Оригинальная статья

Периодические решения уравнения Эйлера-Бернулли колебаний балки с жестко заделанными концами

И. А. Рудаков[1,2*], М. Д. Зиновьев[1]

[1] ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Российская Федерация
105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация
125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

[*] rudakov_ia@mail.ru

Аннотация

Исследуется задача о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения вынужденных колебаний двутавровой балки с закрепленными концами. Нелинейное слагаемое и правая часть уравнения являются периодическими по времени функциями. В работе изучается случай, когда период времени соизмерим с длиной балки. Решение ищется в виде ряда Фурье. Для построения соответствующей ортонормированной системы исследуется задача Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения. Исследовано трансцендентное уравнение, которому удовлетворяют собственные значения задачи Штурма-Лиувилля. Из него получена асимптотика собственных значений, которая используется при обосновании гладкости решения уравнения Эйлера-Бернулли. Доказана равномерная ограниченность собственных функций задачи Штурма-Лиувилля и получены оценки для их производных. Получены условия обратимости дифференциального оператора уравнения Эйлера-Бернулли. Доказана вполне непрерывность резольвенты этого оператора на дополнении к спектру. С помощью исследования двойных сумм рядов Фурье доказано существование и регулярность решений соответствующей линейной задачи. Исследована задача о периодических решениях квазилинейного уравнения колебаний балки. Рассмотрен случай, когда при достаточно больших по модулю значениях аргумента отношение нелинейного слагаемого к аргументу не совпадает с собственными значениями дифференциального оператора. Доказана теорема о существовании обобщенного периодического решения, для которого граничные условия выполнены в классическом смысле. Периодическое решение найдено как неподвижная точка соответствующего оператора с помощью топологических методов.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Бернулли, периодические решения, ряды Фурье, неподвижные точки.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования России (проект № 0705-2020-0047).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Рудаков, И. А. Периодические решения уравнения Эйлера-Бернулли колебаний балки с жестко заделанными концами / И. А. Рудаков, М. Д. Зиновьев. – DOI 10.25559/SITITO.16.202004.862-871 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 4. – С. 862-871.

Original article

Periodic Solutions of the Euler-Bernoulli Equation for Vibrations of a Beam with Fixed Ends

I. A. Rudakov[a,b*], M. D. Zinovyev[a]

[a] Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russian Federation

5/1 2nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russian Federation

[b] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

[*] rudakov_ia@mail.ru

Abstract

The problem of time-periodic solutions of the quasilinear equation of forced vibrations of an I-beam with fixed ends is investigated. The nonlinear term and the right-hand side of the equation are time-periodic functions. In the paper we study the case when the time period is comparable to the length of the beam. The solution is sought in the form of Fourier series. To construct the corresponding orthonormal system, we study the Sturm-Liouville problem on eigenfunctions and eigenvalues. A transcendental equation that satisfies the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem is investigated. The eigenvalue asymptotics is derived from it, which is used to justify the smoothness of the solution of the Euler-Bernoulli equation. The uniform boundedness of the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem is proved and estimates for their derivatives are obtained. Invertibility conditions for the differential operator of the Euler-Bernoulli equation are obtained. The complete continuity of the resolvent of this operator on the complement to the spectrum is proved. The existence and regularity of solutions to the corresponding linear problem are proved by studying double sums of Fourier series. The problem of periodic solutions of the quasilinear equation of beam vibrations is investigated. We consider the case when, for sufficiently large modulo values of the argument, the ratio of the nonlinear term to the argument does not coincide with the eigenvalues of the differential operator. We prove a theorem on the existence of a generalized periodic solution for which the boundary conditions are met in the classical sense. Using the topological methods, we found the periodic solution as a fixed point of the corresponding operator.

Keywords: Euler-Bernoulli equation, periodic solutions, Fourier series, fixed points.

Funding: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0705-2020-0047).

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Rudakov I.A., Zinovyev M.D. Periodic Solutions of the Euler-Bernoulli Equation for Vibrations of a Beam with Fixed Ends. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(4):862-871. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202004.862-871

Введение

Рассмотрим квазилинейное уравнение колебаний балки

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} - g(x,t,u) = f(x,t), 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

с однородными граничными условиями вида

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0, t \in \mathbb{R}; \quad (2)$$

и условием периодичности

$$u(x,t+T) = u(x,t), 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Уравнение Эйлера-Бернулли (1) является математической моделью продольных колебаний стержней и проводов, способных сопротивляться изгибу, двутавровых балок [1]. Правая часть $f(x,t)$ этого уравнения и нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ являются T–периодическими по времени функциями. Начиная с 70-х годов прошлого века вышло достаточно большое количество работ, посвященных проблеме существования периодических решений эволюционных уравнений таких как волновое уравнение [2] – [12]. При $a = 0$ задача о периодических колебаниях балки изучалась в достаточно большом числе работ (см., например, [12] – [23]). В работе [25] S. Ji H. Wei исследовали уравнение Эйлера-Бернулли с переменными коэффициентами и с однородными граничными условиями общего вида также при $a = 0$. Такое уравнение представляет собой математическую модель колебаний неоднородного стержня. В [25] доказано существование периодического решения в случае резонанса на собственном значении дифференциального оператора Эйлера-Бернулли. В работе [26] доказано существование счетного числа решений для различных однородных граничных условий. Статья [12] представляет одну из первых работ, в которой исследована задача о периодических решениях уравнения (1) для случая $a \neq 0$ и с граничными условиями вида

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0, t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

В [12] доказано существование периодического решения малой амплитуды, если правая часть $f(x,t)$ уравнения (1) достаточно мала. В работе [27] при $a \neq 0$ доказано существование бесконечного числа решений задачи (1) – (3) с граничными условиями (4), если нелинейное слагаемое g имеет степенной рост. В статьях [28], [29] исследована задача о периодических решениях уравнения (1), когда на одном конце отрезка выполнено условие жесткого закрепления (2), а на другом конце выполнено условие (4) (шарнирно-опертый конец балки). При изучении этих задач возникает задача Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения для дифференциального оператора четвертого порядка. В случае граничных условий (4) соответствующее уравнение на собственные значения легко явно решается (собственные значения равны $n^4 + an^2$, собственные функции $\sin nx$). При рассмотрении смешанных граничных условий вида (2) и (4) на разных концах, возникает громоздкое трансцендентное уравнение на собственные значения. В работах [28], [29] получена асимптотика собственных значений и доказана ограниченность собственных функций. Основной теоремой в [28] является теорема о существовании счетного числа периодических решений для уравнения (1) со смешанными граничными условиями. В [29] доказано существование периодического решения в случае резонанса на произвольном собственном значении дифференциального оператора. В случае граничных условий (2) возникает еще более громоздкое трансцендентное уравнение на собственные значения, исследованию которого посвящена первая часть данной работы. Целью работы является получение асимптотических формул для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля, доказательство ограниченности собственных функций и основной теоремы о существовании решения задачи (1) – (3) для произвольной периодической по времени правой части f, без предположения ее малости.

Задача на собственные значения и собственные функции

Уравнению (1) с граничными условиями (2) соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения

$$\begin{cases} X^{(4)} - aX'' = \lambda X, 0 < x < \pi, a > 0; \\ X(0) = X'(0) = 0; \\ X(\pi) = X'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Стандартно доказывается, что собственные значения λ задачи (5) являются положительными и удовлетворяют следующему уравнению

$$\cos(b\pi) = \frac{1}{ch(c\pi)} + \frac{a}{2bc}\sin(b\pi)\text{th}(c\pi). \quad (6)$$

Здесь

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a\right)}, c = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}\right)}. \quad (7)$$

Собственные функции примут вид

$$X = C_1\big(\text{ch}(cx) - \cos(bx)\big) + C_2\left(\text{sh}(cx) - \frac{c}{b}\sin(bx)\right), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Выразим λ из (7):

$$\lambda = b^4 + ab^2. \quad (8)$$

Покажем, что найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого натурального $n \geqslant n_0$ на интервале $(n; n + \frac{1}{2})$ существует единственный корень b_n уравнения (6), а на отрезке $[n + \frac{1}{2}; n + 1]$ это уравнение не имеет решений. Рассмотрим функцию

$$G(b) = \frac{1}{\text{ch}(c\pi)} + \frac{a}{2bc}\sin(b\pi)\,\text{th}(c\pi) - \cos(b\pi) \quad (9)$$

Из неравенств $G(2n) < 0$ и $G(2n+\frac{1}{2}) > 0$ следует, что на интервале $(2n; 2n+\frac{1}{2})$ уравнение (6) имеет решение. Для любого натурального числа n имеет место неравенство $G(2n-1) > 0$, а также найдется такое натуральное N_1, что для любого $n > N_1$ имеет место неравенство $G(2n-\frac{1}{2}) < 0$. Поэтому при $n \geqslant N_1$ существует корень уравнения (6) на интервале $(2n-1; 2n-\frac{1}{2})$. Если $b \in [2n+\frac{1}{2}; 2n+1]$, то $\sin(b\pi) \geqslant 0, \cos(b\pi) \leqslant 0, F(b) > 0$, и значит на данном отрезке уравнение (6) не имеет корней.

Осталось проверить, что при достаточно больших n на отрезке $\left[2n-\frac{1}{2}; 2n\right]$ нет корней уравнения (6). Для доказательства данного факта рассмотрим уранение (6) на отрезках $\left[2n-\frac{1}{2}; 2n-\frac{1}{4}\right]$ и $\left[2n-\frac{1}{4}; 2n\right]$. Пусть N_2 есть такое натуральное число, что при любом $b \geq N_2$ имеют место оценки

$$\frac{4b^2}{\mathrm{ch}(b\pi)} \leq a, \mathrm{ch}(b\pi) \geq 2, th(b\pi) \geq \frac{3}{4}.$$

Отсюда и (9) следует, что для любого натурального числа $n \in (N_2, +\infty)$ имеем неравенства

$$G(b) < -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) < 0 \ \ \forall b \in (2n-\frac{1}{4}; 2n], \quad G(b) < \frac{a}{cb}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) < 0 \ \forall b \in \left[2n-\frac{1}{2}; 2n-\frac{1}{4}\right].$$

Поэтому при $n \in (N_2, +\infty)$ на отрезке $\left[2n-\frac{1}{2}; 2n\right]$ уравнение (6) решений не имеет.

Покажем, что для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ на интервалах $(n; n+\frac{1}{2})$ уравнение (6) имеет единственный корень b_n. Пусть $N_3 = \max(N_1, N_2)$. При $n > N_3$ корень $b \in (n; n+\frac{1}{2})$ уравнения (6) можно записать следующим образом:

$$b = n + \frac{1}{2} - \rho, \rho \in (0; \tfrac{1}{2}).$$

Используя данное соотношение, уравнение (6) можно привести к виду

$$\sin(\rho\pi) = \frac{(-1)^n}{\mathrm{ch}(c\pi)} + a\cos(\rho\pi)\,\mathrm{th}(c\pi)\frac{1}{bc}.$$

Из данного равенства следует $\rho \to 0$ при $n \to \infty$. Для производной G' имеет место следующее представление

$$G'(b) = \pi\sin(b\pi) + \varphi(b),$$

где $\varphi(b) = O\left(\frac{1}{b^2}\right)$ при $b \to \infty$. Поэтому найдется натуральное число $N_4 > N_3$, такое, что

$$|G'(b)| \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - |\varphi(b)| > 0 \ \forall b \in [n+\tfrac{1}{4}, n+\tfrac{1}{2}),$$

если $n \geq N_4$. Отсюда вытекает единственность корня b_n уравнения (6) на каждом интервале $(n; n+\frac{1}{2})$ при $n \geq N_4$. Таким образом, согласно (8) при $n = N_4, N_4+1, \ldots$ получим равенства

$$b_n = n + \frac{1}{2} - \rho_n, \qquad (10)$$

$$\lambda_n = (n + \tfrac{1}{2} - \rho_n)^4 + a(n+\tfrac{1}{2}-\rho_n)^2, \qquad (11)$$

где $\rho_n \in (0; \frac{1}{2})$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 0$. Выведем оценку скорости стремления к нулю последовательности ρ_n.

Из (10) и уравнения (6) следует равенство

$$\rho_n = (-1)^n \frac{\pi\rho_n}{\sin(\pi\rho_n)}\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi c_n)} + \frac{a}{2\pi b_n c_n}\mathrm{th}(\pi c_n)\cos(\pi\rho_n)\frac{\pi\rho_n}{\sin(\pi\rho_n)}. \quad (12)$$

Здесь $c_n = \sqrt{b_n^2 + a}$. Поскольку $1 < \pi\theta_n/\sin(\pi\theta_n) < \pi/2$ для любого $n \geq N_4$, то из (12) вытекает существование $N_0 \in \mathbb{N}$ и $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ таких, что при всех натуральных числах $n \geq N_0$ имеет место следующее двойное неравенство

$$\frac{C_1}{n^2} \leqslant \rho_n \leqslant \frac{C_2}{n^2}. \ (13)$$

Поскольку [31] множество собственных значений задачи (5) не имеет предельных точек, кроме бесконечности, то на интервале $(0, \lambda_{N_0})$ имеется не более конечного числа собственных значений. Из общей формулы (7.2) работы [32] для дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами и однородными разделенными граничными условиями следует, что

$$k = N_0 - 1.$$

Для данного дифференциального оператора $\frac{d}{dx^4} - a\frac{d}{dx^2}$ с постоянными коэффициентами формула (11) является уточнением формулы (7.2). Таким образом, все собственные значения задачи (5) можно перенумеровать в порядке возрастания: λ_n, $n \in \mathbb{N}$ (с учетом кратности на интервале $(0, \lambda_{N_0})$, на промежутке $[\lambda_{N_0}, +\infty)$ все собственные значения простые) и при $n \geq N_0$ имеет место представление (11) и оценка (13). Собственные функции $X_n(x)$ соответствующие λ_n при $n \geq N_0$ имеют следующий вид.

$$X_n = C_n((ch(c_n\pi) - \cos(b_n\pi))(\mathrm{sh}(c_n x) - \frac{c_n}{b_n}\sin(b_n x)) +$$

$$+ (\cos(b_n x) - \mathrm{ch}(c_n x))(\mathrm{sh}(c_n\pi) - \frac{c_n}{b_n}\sin(b_n\pi))).$$

Если нормировать собственные функции X_n в $L_2(0;\pi)$, то для множителя C_n будет иметь место следующее представление:

$$C_n = 1/(sh(c_n\pi)(\pi + O\left(\tfrac{1}{n}\right)))\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}.$$

Отсюда вытекает существование констант $A_k > 0, k \in \mathbb{Z}_+$ таких, что для любого натурального n имеет место неравенство

$$|X_n^{(k)}| \leqslant A_k \cdot n^k \ \forall x \in [0, \pi].$$

Теорема о существовании решения задачи (1) – (3)

Будем предполагать, что период в условии (3) представлен в виде:

$$T = 2\pi\frac{b}{c}, b, c \in \mathbb{N}, (b, c) = 1. \quad (14)$$

Введем обозначение: $\Omega = [0;\pi] \times \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$. Решение исходной задачи (1) – (3) будет представлено в виде ряда Фурье по следующей полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе функций:

$$\left\{\frac{1}{T}X_n, \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\cos(\frac{c}{b}mt), \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\sin(\frac{c}{b}mt)\right\}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (15)$$

Предположим, что коэффициент a в уравнении (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$a > 0, \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)b \notin \mathbb{N}. \quad (16)$$

Для функций из системы (15) введем следующее обозначение:

$$e^c_{nm} = \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\cos(\frac{c}{b}mt), e^s_{nm} = \sqrt{\frac{2}{T}}X_n\sin(\frac{c}{b}mt) \quad (17)$$

Обозначим D множество конечных линейных комбинаций функций из системы (15). Пусть $A_0: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ есть оператор с областью определения $D(A_0) = D$, и такой, что $A_0 u = u_{tt} + u_{xxxx} - a u_{xx}, u \in D$. Далее обозначим $A = A_0^*$ в $L_2(\Omega)$. Оператор A является самосопряженным в $L_2(\Omega)$. Обозначим

$$\mu_{nm} = \frac{c^2}{b^2}P(n, m)(\frac{b}{c}\sqrt{\lambda_n} + m), \quad (18)$$

где $P(n, m) = (\frac{b}{c}\sqrt{\lambda_n} - m)$. Числа μ_{nm} являются собственными значениями оператора A, которым соответствуют собственные функции (17).

Пусть $H_1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, $H_2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ есть пространства Соболева, $\sigma = \{\mu_{nm} | \, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$ есть множество собственных значений A. Обозначим

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx\,dy, \|f\| = \sqrt{(f, f)} \;\; \forall f, g \in L_2(\Omega).$$

Лемма. Пусть выполнены условия (14), (16). Тогда существует $N_5 \in \mathbb{N}$ и положительные константы α_0, c_0, такие, что

$$|P(n, m)| \geqslant \alpha_0, \forall n > N_5, m \in \mathbb{Z}_+; \quad (19)$$

$$|\mu_{nm}| \geqslant c_0(n^2 + m), \quad (20)$$

если $\mu_{nm} \neq 0$. Оператор $A^{-1}: R(A) \to R(A)$ является вполне непрерывным и имеют место следующие включения:

$$u = A^{-1}f \in H_1(\Omega) \cap C(\Omega), u_x \in C(\Omega) \quad \forall f \in L_2(\Omega) \cap R(A), \quad (21)$$

$$A^{-1}f \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega) \, \forall f \in H_1(\Omega) \cap R(A). \quad (22)$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\sqrt{\lambda_n} = (n + \frac{1}{2} - \theta_n)^2\sqrt{1 + \frac{a}{(n + 1/2 - \theta_n)^2}}.$$

Для произвольного $\phi \in (0; 1/2)$ обозначим $n_0(\phi) = [\phi\sqrt{a/(1-2\phi)}] + 1$. Тогда для любого натурального $n \geqslant n_0(\phi)$ имеет место соотношение

$$\sqrt{\lambda_n} = (n + \frac{1}{2} - \theta_n)^2 + \gamma(n)a, \gamma(n) \in (\phi, 1/2). \quad (23)$$

Зафиксируем $\phi \in (0, 1/2)$. Из (23) следует, что при $n \geqslant n_0(\phi)$ имеет место равенство

$$|P(n, m)| = \frac{1}{c}|b(n^2 + n) - cm + \beta(n) + V_n|,$$

где $\beta(n) = b(\theta_n^2 - (2n + 1)\theta_n), V_n = b(\frac{1}{4} + \gamma(n)a)$. Из условия (16) следует

$$\frac{1}{2}(a + \frac{1}{2})b \in (k - 1, k), k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $k = 1$. Тогда $a < \frac{2}{b} - \frac{1}{2}, b < 4$ и для V_n будет справедлива оценка

$$0 < \frac{b}{4} < V_n < \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2})b < 1. \quad (24)$$

Рассмотрим случай $k \geqslant 2$. Тогда если $k \geqslant \frac{b}{4} + 1$, то зафиксируем $\phi = ((2(k-1)/b - 1/2)/a + 1)/4 \in (0; 1/2)$. Для любого $n \geqslant n_0(\phi)$ будет иметь место оценка

$$k - 1 < \frac{1}{4}(1 + (\frac{2(k-1)}{b} - \frac{1}{2} + a))b < V_n < \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2})b < k \quad (25)$$

Если же $b > 4$ и $k \leqslant \frac{b}{4} + 1$, то для $\phi = \frac{1}{4}$ при $n \geqslant n_0(\phi)$ получим следующие неравенства:

$$k - 1 < \frac{1}{4}(a + 1)b < V_n < \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2})b < k. \quad (26)$$

Из (24), (25), (26) следует существование $\alpha_1 \in (0,1)$ такого, что для любого целого числа l имеет место неравенство

$$|V_n + l| \geqslant \alpha_1. \quad (27)$$

Из (13) следует, что если зафиксировать $n_1 \geqslant n_0(\phi)$, то для любого $n \geqslant n_1$ имеет место оценка $|\beta_n| < \frac{\alpha_1}{2}$. Отсюда и (27) получим (19). Неравенство (20) вытекает из (11), (18), (19). Вполне непрерывность оператора $A^{-1}: R(A) \to R(A)$ и включения (21), (22) доказываются по плану леммы 2.2 работы [30]. Лемма доказана.

Будем полагать, что нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ удовлетворяет условиям:

$$g \in C^1(\Omega \times R), T \text{ периодична по } t; \tag{28}$$

Существуют константы $\alpha, \beta, \tilde{u}$, что

$$\frac{g(x,t,u)}{u} \in [\alpha, \beta] \; \forall (x,t) \in \Omega, \forall\, u \in (-\infty; -\tilde{u}] \cup [\tilde{u}; +\infty). \tag{29}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1) – (3) называется функция $u \in H_1(\Omega)$, такая, что

$$(u, A\varphi) = (g(x,t,u) + f(x,t), \varphi) \; \forall \varphi \in D.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (14), (16), (28), (29), где

$$\alpha < \beta, \tilde{u} > 0, [\alpha, \beta] \cap \sigma = \emptyset, \tag{30}$$

Тогда задача (1) – (3) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ для любой T–периодической по t правой части $f \in H_1(\Omega)$ и $u_x \in C(\Omega)$.

Доказательство. Введем обозначения: $H = L_2(\Omega), r(x,t,u) = g(x,t,u) - \alpha u$. Из леммы следует вполне непрерывность оператора $A: R(A) \to R(A)$. Так как $\alpha \not\in \sigma$, то оператор $(A - \alpha I)^{-1}: H \to H$ также является вполне непрерывным.

Будем искать обобщенное решение задачи (1) – (3), как решение операторного уравнения

$$Au = g(x,t,u) + f \tag{31}$$

Для доказательства существования решения уравнения (31) воспользуемся методом работы [2]. Если обозначить $T(u) = (A - \alpha I)^{-1}(r(x,t,u) + f)$, то уравнение (31) можно переписать в виде

$$u = T(u) \tag{32}$$

Оператор $T: H \to H$ является вполне непрерывным. Воспользуемся принципом Лере-Шаудера о неподвижной точке и рассмотрим уравнение

$$u = \xi T(u) \tag{33}$$

с параметром $\xi \in (0,1]$. Оценим L_2-норму возможных решений уравнения (33). Обозначим $\omega = (A - \alpha I)^{-1} f$ и перепишем уравнение в следующем виде:

$$r(x,t,u) = -\frac{1}{\xi}(\alpha I - A)(u - \xi\omega). \tag{34}$$

Пусть λ_1, λ_2 есть соседние собственные значения оператора A, т.е. $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma = \emptyset$, потребуем, чтобы $[\alpha, \beta] \subset (\lambda_1, \lambda_2)$. Умножим равенство (34) скалярно на $u - \xi\omega$ в H. Воспользуемся тем, что $\alpha - \lambda_2$ является наименьшим по модулю отрицательным собственным значением оператора $\alpha I - A$ и неравенством Брезиса-Ниренберга [2].

$$(r(x,t,u), u - \xi\omega) = -\frac{1}{\xi}\big((\alpha I - A)(u - \xi\omega), u - \xi\omega\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\xi(\lambda_2 - \alpha)} \|(\alpha I - A)(u - \xi\omega)\|^2 = \frac{\xi}{\lambda_2 - \alpha}\|r(x,t,u)\|^2. \tag{35}$$

Из условий (29), (30) вытекает существование положительных констант C_1, C_2, таких, что

$$u \cdot r(x,t,u) \geqslant -C_1, |r(x,t,u)| \leqslant (\beta - \alpha)|u| + C_2 \; \forall (x,t,u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Из этих неравенств и (35) получим:

$$\frac{\xi}{\lambda_2 - \alpha}\|r(x,t,u)\|^2 \geqslant \int_\Omega |r(x,t,u) \cdot u + C_1| dxdt - C_1\|\Omega\| - \|\omega\| \cdot \|r(x,t,u)\| \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega (|p(x,t,u) \cdot u| - C_1) dxdt - C_1\|\Omega\| - \|\omega\| \cdot \|r(x,t,u)\| \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega |r(x,t,u)| \cdot |u| dxdt - 2\pi T C_1 - \|\omega\| \cdot \|r(x,t,u)\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\beta - \alpha}\|r(x,t,u)\|^2 - C_3\|r(x,t,u)\| - 2\pi T C_1, (36)$$

где C_3 есть некоторая положительная константа. Из (35), (36) получим следующие оценки

$$\|r(x,t,u)\| \leqslant C_4, \|(A - \alpha I)(u - \xi\omega)\| \leqslant C_4.$$

Константа C_4 не зависит от ξ. Так как $\alpha \not\in \sigma$, из последнего неравенства получим $\|u\| \leqslant C_5$, C_5 также не зависит от ξ. Следовательно, выполнены условия принципа Лере-Шаудера о неподвижной точке. Из него вытекает существование решения $u \in H$ уравнения (32). Гладкость обобщенного решения вытекает из конечномерности ядра оператора A (согласно (20)) и леммы. Теорема доказана.

Замечание (о единственности решения). Если дополнительно условиям теоремы функция $g(x,t,u)$ удовлетворяет условию

$\alpha \leqslant g'_u(x,t,u) \leqslant \beta \; \forall (u,x,t) \in \mathbb{R} \times \Omega$, то задача (1) – (3) имеет единственное решение.

Заключение

В работе получены асимптотические оценки собственных значений задачи на собственные функции и собственные значения, доказана ограниченность собственных функций, получена оценка модулей их производных, доказана теорема о существовании периодического по времени решения для квазилинейного уравнения (1) с граничными условиями, соответствующими жестко заделанным концам балки.

Список использованных источников

[1] Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968.

[2] Brezis, H. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems / H. Brezis, L. Nirenberg // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série. – 1978. – Vol. 5, issue 2. – Pp. 225-326.

[3] Tanaka, K. Infinitely Many Periodic Solutions for the Equation: II / K. Tanaka. – DOI 10.2307/2001191 // Transactions of the American Mathematical Society. – 1988. – Vol. 307, No. 2. – Pp. 615-645.

[4] Rabinowitz, P. H. Large Amplitude Time Periodic Solutions of a Semilinear Wave Equation / P. H. Rabinowitz. – DOI 10.1002/cpa.3160370203 // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1984. – Vol. 37, issue 2. – Pp. 189-206. – URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160370203 (дата обращения: 12.09.2020).

[5] Berti, M. Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities / M. Berti, L. Biasco. – DOI 10.1016/j.anihpc.2005.05.004 // Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. – 2006. – Vol. 23, issue 4. – Pp. 439-474.

[6] Baldi, P. Forced Vibrations of a Nonhomogeneous String / P. Baldi, M. Berti. – DOI 10.1137/060665038 // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2008. – Vol. 40, issue 1. – Pp. 382-412. – URL: https://epubs.siam.org/doi/10.1137/060665038 (дата обращения: 12.09.2020).

[7] Berti, M. Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities / M. Berti, P. Bolle. – DOI 10.1007/s00030-007-7025-5 // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. – 2008. – Vol. 15, issue 1. – Pp. 247-276. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00030-007-7025-5 (дата обращения: 12.09.2020).

[8] Berti, M. KAM for Reversible Derivative Wave Equations / M. Berti, L. Biasco, M. Procesi. – DOI 10.1007/s00205-014-0726-0 // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2014. – Vol. 212, issue 3. – Pp. 905-955. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00205-014-0726-0 (дата обращения: 12.09.2020).

[9] Рудаков, И. А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами / И. А. Рудаков. – DOI 10.4213/sm1525 // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 91-108. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9541673 (дата обращения: 12.09.2020).

[10] Ji, S. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with -dependet coefficients / S. Ji. – DOI 10.1007/s00526-007-0132-7 // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. – 2008. – Vol. 32, issue 2. – Pp. 137-153. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00526-007-0132-7 *(дата обращения: 12.09.2020).*

[11] Ji, S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity / S. Ji. – DOI 10.1016/j.jde.2018.02.001 // Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 264, issue 9. – Pp. 5527-5540. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039618300834 (дата обращения: 12.09.2020).

[12] Rudakov, I. A. Periodic Solutions of the Qusilinear Equation of Forced Vibrations of an Inhomogeneous String / I. A. Rudakov. – DOI 10.1134/S000143461701014X // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101, issue 1-2. – Pp. 137-148. – URL: https://link.springer.com/article/10.1134/S000143461701014X (дата обращения: 12.09.2020).

[13] Yamaguchi, M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications / M. Yamaguchi // Funkcialaj Ekvacioj. – 1995. – Vol. 38. – Pp. 519-538.

[14] Eliasson, L. H. KAM for the nonlinear beam equation / L. H. Eliasson, B. Grébert, S. B. Kuksin. – DOI 10.1007/s00039-016-0390-7 // Geometric and Functional Analysis. – 2016. – Vol. 26, issue 6. – Pp. 1588-1715. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00039-016-0390-7 (дата обращения: 12.09.2020).

[15] Elishakoff, I. Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with s tip mass / I. Elishakoff, V. Johnson. – DOI 10.1016/j.jsv.2005.01.050 // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 286, issue 4-5. – Pp. 1057-1066. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05001057 (дата обращения: 12.09.2020).

[16] Elishakoff, I. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams / I. Elishakoff, D. Pentaras. – DOI 10.1016/j.jsv.2006.05.028 // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 298, issue 1-2. – Pp. 439-445. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X06004469 (дата обращения: 12.09.2020).

[17] Wang, Y. A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term / Y. Wang, J. Si. – DOI 10.1007/s00033-011-0172-x // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2012. – Vol. 63, issue 1. – Pp. 189-190. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00033-011-0172-x (дата обращения: 12.09.2020).

[18] Wang, Y. Quasi-periodic solutions of a quasi-periodically forced nonlinear beam equation / Y. Wang. – DOI 10.1016/j.cnsns.2011.10.022 // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2012. – Vol. 17, issue 6. – Pp. 2682-2700. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570411005922 (дата обращения: 12.09.2020).

[19] Wang, Y. Time periodic solutions to the beam equation with weak damping / Y. Wang, Y. Li. – DOI 10.1063/1.5046821 // Journal of Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 59, issue 11. – Article 111503. – URL: https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5046821 (*дата обращения*: 12.09.2020).

[20] Wang, Y. Quasi-periodic solutions for a completely resonant beam equation with a nonlinear term depending on the time and space variables / Y. Wang. – DOI 10.1016/j.na.2019.111585 // Nonlinear Analysis. – 2019. – Vol. 189, Article 111585. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X19302305 (*дата обращения*: 12.09.2020).

[21] Chen, B. Periodic Solutions to Nonlinear Euler-Bernoulli Beam Equations / B. Chen, Y. Gao, Y. Li. – DOI 10.4310/CMS.2019.v17.n7.a10 // Communications in Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 17, issue 7. – Pp. 2005-2034.

[22] Chen, B. The existence of periodic solutions for nonlinear beam equations on $\mathbb{T}^d$ by a para-differential method / B. Chen, Y. Li, Y. Gao. – DOI 10.1002/mma.4758 // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – Vol. 41, issue 7. – Pp. 2546-2574. – URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/mma.4758 (*дата обращения*: 12.09.2020).

[23] Chen, B. Quasi-periodic solutions to nonlinear beam equations on compact Lie groups with a multiplicative potential / B. Chen, Y. Gao, S. Jiang, Y. Li. – DOI 10.1016/j.jde.2018.02.005 // Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 264, issue 11. – Pp. 6959-6993. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039618300871 (*дата обращения*: 12.09.2020).

[24] Shi, Y. On the existence of Sobolev quasi-periodic solutions of multidimensional nonlinear beam equation / Y. Shi. – DOI 10.1063/1.4964258 // Journal of Mathematical Physics. – 2016. – Vol. 57, issue 10. – Article 102701. – URL: https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4964258 (*дата обращения*: 12.09.2020).

[25] Shi, Y. Quasi-periodic Solutions for a Class of Higher Dimensional Beam Equation with Quasi-periodic Forcing / Y. Shi, J. Xu, X. Xu. – DOI 10.1007/s10884-018-9657-z // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 2019. – Vol. 31, issue 2. – Pp. 745-763. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10884-018-9657-z *(дата обращения: 12.09.2020).*

[26] Wei, H. Periodic solutions of a semilinear Euler-Bernoulli beam equation with variable coefficients / H. Wei, S. Ji // ArXiv:2001.05693. – 2001. – URL: https://arxiv.org/abs/2001.05693 (дата обращения: 12.09.2020).

[27] Rudakov, I. A. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced beam vibration with homogeneous boundary conditions / I. A. Rudakov. – DOI 10.1070/IM2015v079n05ABEH002772 // Izvestiya: Mathematics. – 2015. – Vol. 79, No. 5. – Pp. 1064-1086. – URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1070/IM2015v079n05ABEH002772 (дата обращения: 12.09.2020).

[28] Rudakov, I. A. On Periodic Solutions of a Beam Vibration Equation / I. A. Rudakov. – DOI 10.1134/S0012266118050117 // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54, issue 5. – Pp. 687-695. – URL: https://link.springer.com/article/10.1134%2FS0012266118050117 (дата обращения: 12.09.2020).

[29] Rudakov, I. A. Oscillation Equation of a Beam with Fixed and Pivotally Supporter Ends / I. A. Rudakov. – DOI 10.3103/S0027132220020011 // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2020. – Vol. 75, issue 2. – Pp. 53-57. – URL: https://link.springer.com/article/10.3103/S0027132220020011 (дата обращения: 12.09.2020).

[30] Рудаков, И. А. Задача о периодических колебаниях двутавровой балки с жёстко закреплённым концом в случае резонанса / И. А. Рудаков. – DOI 10.1134/S0374064120030061 // Дифференциальные уравнения. – 2020. – *Т.* 56, № 3. – *С.* 343-352. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=42569403 (дата обращения: 12.09.2020).

[31] Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – 3-е изд. – М: Физматлит, 2010.

[32] Nazarov, A. I. Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems / A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin. – DOI 10.1007/s00440-004-0337-z // Probability Theory and Related Fields. – 2004. – Vol. 129, issue 4. – Pp. 469-494. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00440-004-0337-z (дата обращения: 12.09.2020).

Поступила 12.09.2020; одобрена после рецензирования 20.11.2020; принята к публикации 05.12.2020.

Об авторах:

Рудаков Игорь Алексеевич, профессор кафедры прикладной математики (ФН-2), ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); профессор кафедры 813, института № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), доктор физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4669-0532, rudakov_ia@mail.ru

Зиновьев Михаил Дмитриевич, студент кафедры прикладной математики (ФН-2), ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5889-521X, mzi.fn@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Collatz L. *Zadachi na sobstvennye znachenija* [Eigenvalue Problems]. Nauka, Moscow; 1968. (In Russ.)

[2] Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*. 1978; 5(2):225-326. (In Eng.)

[3] Tanaka K. Infinitely Many Periodic Solutions for the Equation: II. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1988; 307(2):615-645. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.2307/2001191

[4] Rabinowitz P.H. Large Amplitude Time Periodic Solutions of a Semilinear Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1984; 37(2):189-206. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160370203

[5] Berti M., Biasco L. Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. 2006; 23(4):439-474. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2005.05.004

[6] Baldi P., Berti M. Forced Vibrations of a Nonhomogeneous String. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2008; 40(1):382-412. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1137/060665038

[7] Berti M., Bolle P. Cantor families of periodic solutions of wave equations with nonlinearities. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 2008; 15(1):247-276. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00030-007-7025-5

[8] Berti M., Biasco L., Procesi M. KAM for Reversible Derivative Wave Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2014; 212(3):905-955. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00205-014-0726-0

[9] Rudakov I.A. Periodic solutions of a quasilinear wave equation with variable coefficients. *Sbornik: Mathematics*. 2007; 198(7):993. (In Eng.) DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM2007v198n07ABEH003870

[10] Ji S. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with -dependet coefficients. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2008; 32(2):137-153. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00526-007-0132-7

[11] Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity. *Journal of Differential Equations*. 2018; 264(9):5527-5540. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.02.001

[12] Rudakov I.A. Periodic Solutions of the Qusilinear Equation of Forced Vibrations of an Inhomogeneous String. *Mathematical Notes*. 2017; 101(1-2):137-148. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S000143461701014X

[13] Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1995; 38:519-538. (In Eng.)

[14] Eliasson L.H., Grébert B., Kuksin S.B. KAM for the nonlinear beam equation. *Geometric and Functional Analysis*. 2016; 26(6):1588-1715. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00039-016-0390-7

[15] Elishakoff I., Johnson V. Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*. 2005; 286(4-5):1057-1066. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.050

[16] Elishakoff I., Pentaras D. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. *Journal of Sound and Vibration*. 2006; 298(1-2):439-445. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.05.028

[17] Wang Y., Si J. A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2012; 63(1):189-190. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00033-011-0172-x

[18] Wang Y. Quasi-periodic solutions of a quasi-periodically forced nonlinear beam equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012; 17(6):2682-2700. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.10.022

[19] Wang Y., Li Y. Time periodic solutions to the beam equation with weak damping. *Journal of Mathematical Physics*. 2018; 59(11):111503. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1063/1.5046821

[20] Wang Y. Quasi-periodic solutions for a completely resonant beam equation with a nonlinear term depending on the time and space variables. *Nonlinear Analysis*. 2019; 189:111585. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111585

[21] Chen B., Gao Y., Li Y. Periodic Solutions to Nonlinear Euler-Bernoulli Beam Equations. *Communications in Mathematical Sciences*. 2019; 17(7):2005-2034. (In Eng.) DOI: https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2019.v17.n7.a10

[22] Chen B., Li Y., Gao Y. The existence of periodic solutions for nonlinear beam equations on $\mathbb{T}^d$ by a para-differential method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018; 41(7):2546-2574. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1002/mma.4758

[23] Chen B., Gao Y., Jiang S., Li Y. Quasi-periodic solutions to nonlinear beam equations on compact Lie groups with a multiplicative potential. *Journal of Differential Equations*. 2018; 264(11):6959-6993. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.02.005

[24] Shi Y. On the existence of Sobolev quasi-periodic solutions of multidimensional nonlinear beam equation. *Journal of Mathematical Physics*. 2016; 57(10):102701. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1063/1.4964258

[25] Shi Y., Xu J., Xu X. Quasi-periodic Solutions for a Class of Higher Dimensional Beam Equation with Quasi-periodic Forcing. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2019; 31(2):745-763. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s10884-018-9657-z

[26] Wei H., Ji S. Periodic solutions of a semilinear Euler-Bernoulli beam equation with variable coefficients. *ArXiv*:2001.05693. 2001. Available at: https://arxiv.org/abs/2001.05693 (accessed 12.09.2020). (In Eng.)

[27] Rudakov I.A. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced beam vibration with homogeneous boundary conditions. *Izvestiya: Mathematics*. 2015; 79(5):1064-1086. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1070/IM2015v079n05ABEH002772

[28] Rudakov I.A. On Periodic Solutions of a Beam Vibration Equation. *Differential Equations*. 2018; 54(5):687-695. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118050117

[29] Rudakov I.A. Oscillation Equation of a Beam with Fixed and Pivotally Supporter Ends. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2020; 75(2):53-57. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.3103/S0027132220020011

[30] Rudakov I.A. Problem on Periodic Vibrations of an I-beam with Clamped Endpoint in the Resonance Case. *Differential Equations*. 2020; 56(3):330-339. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120030064

[31] Naimark M.A. Linear Differential Operators: Two Volumes Bound as One. Ed. by Everitt W. N. Dover Publications, Incorporated, 2012. (In Eng.)

[32] Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. *Probability Theory and Related Fields*. 2004; 129(4):469-494. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00440-004-0337-z

Submitted 12.09.2020; approved after reviewing 20.11.2020; accepted for publication 05.12.2020.

About the authors:

Igor A. Rudakov, Professor of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (National Research University) (5/1 2nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russian Federation); Professor of Department No. 813, Institute No. 8 "Information Technologies and Applied Mathematics", Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation), Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4669-0532, rudakov_ia@mail.ru

Mikhail D. Zinovyev, student of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (National Research University) (5/1 2nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russian Federation), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5889-521X, mzi.fn@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.